LA SIMPLICITÉ MATHÉMATIQUE

Thèse présentée à la Faculté des Lettres de l'Université de Lyon pour l'obtention du Doctorat ès-lettres

par

Maximine PORTAZ
Licenciée ès Sciences

«Οὐσία παντὸς ὡραίου: ἡ ἁπλότης »
Γ. Ἀντωνιάδης.

Imprimerie PAQUET
10, Rue Jarente - LYON

Table des Matières

PREMIERE PARTIE

LE PROBLEME DE LA SIMPLICITE MATHEMATIQUE

CHAPITRE PREMIER. — *La notion de simplicité existe en mathématiques* ..... p. 9

CHAPITRE II. — *La notion de simplicité trouve en mathématiques un emploi* ..... p. 29

CHAPITRE III. — *La notion de simplicité semble guider le mathématicien* ..... p. 56

CHAPITRE IV. — *La notion de simplicité n'est pas une notion simple* ..... p. 83

IIe PARTIE

THEORIES OBJECTIVISTES DE LA SIMPLICITE EN MATHEMATIQUES

CHAPITRE V. — *De la nécessité de se référer aux théoriciens des mathématiques* ..... p. 109

CHAPITRE VI. — *Comment les Logisticiens conçoivent-ils les mathématiques ?* ..... p. 113

CHAPITRE VII. — *Ce que les Logisticiens entendent par « simplicité » dans les enchaînements mathématiques* ..... p. 148

CHAPITRE VIII. — *Ce que les Logisticiens entendent par « simplicité » des notions et « êtres » mathématiques* . . . . . p. 191
CHAPITRE IX. — *Ce qu'est, en général, la simplicité mathématiques, pour les Logisticiens* . . . . . p. 219

IIIe PARTIE

THEORIES SUBJECTIVISTES DE LA SIMPLICITE EN MATHEMATIQUES

CHAPITRE X. — *La doctrine de Henri Poincaré* . . . . p. 231
CHAPITRE XI. — *Qu'est-ce, pour Henri Poincaré, que la simplicité des enchaînements mathématiques ?* . . . . . p. 243
CHAPITRE XII. — *De la critique mathématique chez quelques philosophes « subjectivistes »* . . . . . .
CHAPITRE XIII. — *Qu'est-ce que la simplicité des « enchaînements » mathématiques, pour ces philosophes ?* (pour MM. Ed. Goblot. Ph. Chaslin. etc...) . . . . . p. 291
CHAPITRE XIV. — *Qu'est-ce, du point de vue « subjectiviste » en général, que la simplicité des « notions » mathématiques ?* . . . . . p. 304
CHAPITRE XV. — *Qu'est-ce que la simplicité mathématique pour Henri Poincaré, et pour les critiques de tendances subjectivistes ?* . . . . . p. 337

IVe PARTIE

THEORIE DE LA SIMPLICITE MATHEMATIQUE D'APRES M. BRUNSCHVICG

CHAPITRE XVI. — *La philosophie mathématique de M. Brunschvicg* . . . . . p. 343
CHAPITRE XVII. — *Qu'est-ce, pour M. Brunschvicg,*

que la simplicité des « enchaînements » mathématiques ? ..... p. 372
CHAPITRE XVIII. — *Qu'est-ce, pour M. Brunschvicg, que la simplicité des « notions » mathématiques ?* ..... p. 417

Ve PARTIE

CONCLUSIONS

CHAPITRE XIX. — *La conclusion apparente de cette étude: la notion de simplicité se réduirait, en mathématiques, au fait d'un petit nombre d'éléments, dans tout ce qui est « simple »*..... p. 447
CHAPITRE XX. — *Insuffisance de la conception suivant laquelle la simplicité, se réduirait, en mathématiques, au fait, pour tout ce qui est simple, de comporter un petit nombre d'éléments*..... p. 455
CHAPITRE XXI. — *Insuffisance de la conception suivant laquelle, il y aurait plusieurs simplicités mathématiques, irréductibles les unes aux autres* p. 487
CHAPITRE XXII. — *La simplicité mathématique: caractère des « formes élémentaires » — Le problème de la simplicité en général*..... p. 502

BIBLIOGRAPHIE . ..... p. 523

A LA MEMOIRE VENEREE DE MON PERE

ET

A MA MERE

à qui je dois tout ce que je suis

A MES MAITRES

EDMOND GOBLOT

ET

ETIENNE SOURIAU

Avec respect et profonde gratitude

PREMIERE PARTIE

Le problème de la Simplicité Mathématique

CHAPITRE PREMIER

LA NOTION DE SIMPLICITE EXISTE EN MATHEMATIQUES

Les mathématiciens font un emploi courant de la notion de simplicité. On en trouve des allusions constantes dans leurs traités, que ceux-ci soient tout à fait élémentaires, ou qu'ils s'adressent à des lecteurs déjà quelque peu initiés.

Souvent, c'est, semble-t-il, dans son acception la plus banale qu'on l'y rencontre. Nous voulons dire, par là, qu'elle s'y oppose nettement à la notion, soit de duplicité, soit de multiplicité. C'est ainsi que, dans les manuels les plus primaires, il est question de « règles de trois simples » (1), de « placements à intérêts simples » (2). C'est ainsi encore, que, dans de tout autres spéculations, on rencontre des expressions telles que « racines simples » (2), « asymptotes simples », « directions asymptotiques simples » (4), « point simples » (5). Dans un sens analogue, un « rapport simple » semble être, pour un mathématicien, un rapport exprimé par de petits nombres tels que 1, 2, 3 (6).

Souvent aussi « simple » a, semble-t-il, pour les auteurs de manuels, le sens d'élémentaire. C'est ainsi que les programmes officiels d'enseignement des Mathématiques, du 27 juillet 1905, portent, pour la Classe de Quatrième B « Construc-

(1) **Leysenne.** « 2e année d'Arithmétique » (à l'usage des candidats au Certificat d'Etudes primaires), p. 241.

(2) **Leysenne.** Même manuel, p. 245.

(3) **Georges Bouligand.** « Cours de géométrie analytique », p. 147.

(4) **Georges Bouligand.** Même ouvrage, p. 165.

(5) **Georges Bouligand.** Idem, p. 165.

(6) **R. Javelot.** « Comment résoudre les problèmes de géométrie élémentaire ? », p. 70.

tion de quelques courbes simples telles que la cissoïde, les conchoïdes », et que les « Instructions sur l'enseignement de la Géométrie », qui y font suite, précisent qu'« il aura lieu d'habituer les élèves à la résolution de problèmes très simples en essayant de leur faire deviner la solution et en développant ainsi leur intuition » (7). De même les programmes officiels de 1920 pour l'enseignement primaire supérieur, portent, entre autres, pour la troisième année (section maritime) : « Résolution pratique de l'équation bicarrée et de quelques équations irrationnelles très simples » (8). On pourrait dire que le mot « simple », même s'il a, ici, un autre sens que celui de « facile », presque, parfois, d'« enfantin », n'a pas forcément de portée mathématique. Car, après tout, les auteurs de programmes officiels, même d'enseignement des mathématiques, peuvent bien ne pas parler en mathématiciens. Mais les multiples affirmations des mathématiciens, aussi bien dans leurs traités les plus primaires que dans leurs ouvrages plus avancés, et l'usage qu'ils font de la notion de simplicité, autorisent, toutefois, à ne pas douter du fait que cette notion est, du point de vue mathématique, une notion importante.

Il est constamment question, chez eux, d'« exemples simples », de « cas simples ». Laisant, dans son « Initiation mathématique » expose une méthode de multiplication « sur l'exemple très simple 9347×258 » (9), et G. Bouligaud, « pour être mieux compris », traite « d'abord un exemple simple » (10) pour mettre mieux en évidence le rôle que joue, dans ses spéculations, la notion de « conservation de la forme », grâce à laquelle il lui est possible d'appliquer à des notions abstraites définies « des raisonnements en tout point analogues à ceux que l'on ferait s'il s'agissait d'une figure réelle » (11). Nous voyons encore Carlo Bourlet et Z. Desbrosses, pour montrer en quoi consiste la méthode de substitution dans la résolution des équations du premier degré à

---

(7) **Carlo Bourlet.** « Cours abrégé de géométrie (I. Géométrie plane) ». Programmes officiel, p. XI.

(8) **Carlo Bourlet et J. Desbrosses.** « Algèbre, 1re, 2e, 3e années. Programmes officiels ».

(9) **Laisant.** « Initiation mathématique », p. 53.

(10) **Georges Bouligand.** « Cours de géométrie analytique », p. 96.

(11) **Georges Bouligand.** Même ouvrage, p. 96.

plusieurs inconnues, considérer, comme exemple « le système simple

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \qquad (12)$$

Dans son traité destiné aux candidats au baccalauréat, H. Commissaire écrit, entre autres, que « les cas les plus simples » de résolution des triangles rectangles, « sont ceux où le triangle est défini par certains de ses éléments » (13). Et, pour MM. Chollet et Mineur, dans une tout autre discipline mathématique, dans cette géométrie appelée dans l'enseignement « descriptive », le fait qu'un plan soit de bout constitue, du point de vue de la détermination de la distance d'un point à un plan, un « cas simple », parce que « la perpendiculaire (n p, m' p'), menée à ce plan par le point (m, m'), est une droite de front ; de plus, le point (n, n') où elle perce le plan de bout PαQ, est le point dont la projection verticale, est à l'intersection de αQ et de m' p' » et qu'« il résulte de ces simplifications et de la remarque faite au début du chapitre (14), que la distance du point (m, m') au plan PαQ est mesurée par le segment m' n' » (15).

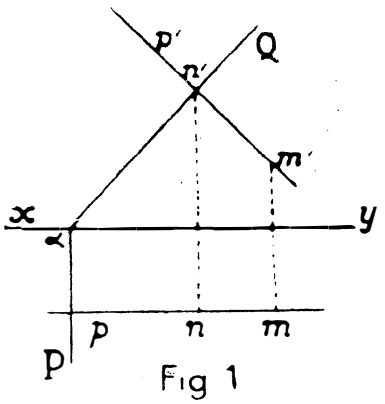


Fig 1

De même « la détermination de la section d'un polyèdre par un plan sécant perpendiculaire à l'un des plans de projection est particulièrement simple, car on a immédiatement, sans aucune construction, l'une des projections de cette section : l'autre projection s'en déduit ensuite par des lignes de rappel » (16). Enfin, il y a aussi, dans le problème de la représentation, sur une épure, des parties

---

(12) **Carlo Bourlet et J. Desbrosses.** « Algèbre 1re, 2e et 3e année », p. 109.

(13) **H. Commissaire.** « Trigonométrie et compléments d'algèbre. Classe de première C et D ». p. 117.

(14) **T. Chollet et P. Mineur.** « Traité de géométrie descriptive » (à l'usage des élèves de première C et D, et des candidats au baccalauréat). « Lorsqu'une figure plane est parallèle à l'un des plans de projection, les longueurs et les angles de cette figure se projettent sur ce plan en vraie grandeur », p. 173.

(15) **T. Chollet et P. Mineur.** Même ouvrage, p. 177.

(16) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 253.

dans l'ombre d'une figure supposée éclairée, des cas « plus simples » que les autres. Ce sont, nous disent les auteurs, les seuls abordés dans le manuel (17).

Ces deux ou trois derniers « cas simples » sont des cas de « constructions simples », en fait. Chacun sait l'importance que les constructions ont en mathématiques, et particulièrement en géométrie. C'est souvent que les mathématiciens insistent sur la simplicité de telle ou telle construction, ou, tout au moins, la rappellent. Le « moyen simple » donné par Laisant (18) pour vérifier d'une manière en quelque sorte tangible le théorème de Pythagore, et « dont on peut se servir pour constituer une démonstration très correcte », est une construction simple. Il consiste à former, pratiquement, comme le suggère la figure 2, par le déplacement dans un carré, de quatre triangles rectangles égaux, la surface du carré construit sur l'hypothénuse à l'aide des surfaces des carrés construit sur chacun des deux autres côtés. Le grand carré dans lequel se meuvent les triangles, a pour côté la somme de leurs côtés à angle droit.

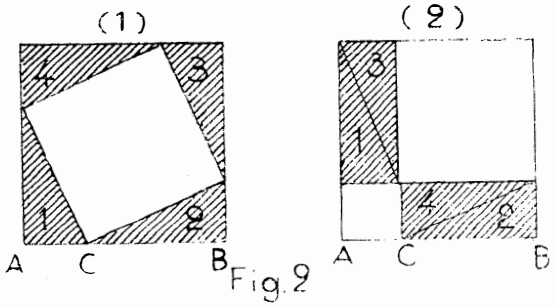


Fig. 2

Les exemples de constructions simples, du moins « plus simples » que telle ou telle autre, sont donnés aussi par Lemaire, par Javelot, par Chollet et Mineur. Soit le problème : Dans un carré de côté a, inscrire un carré de côté b. Lemaire en donne une première solution. « Pour circonscrire le premier, au second P Q R S on décrit les demi-circonférences de diamètres P S et P Q, et, par P, on mène la sécante A B, de longueur donnée. On joint A à S, B à Q, et, à ces droites, par le point R, on mène la perpendiculaire C D. On démontre que A B C D est un carré

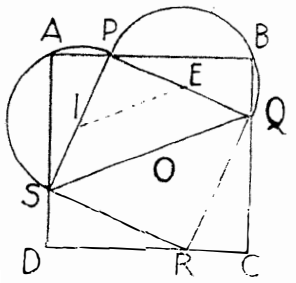


Fig. 3

(17) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 279.
(18) **Laisant.** « Initiation mathématique », p. 83.

en prouvant l'égalité des triangles rectangles APS, BQP, CRQ et DSR. Il faut que AB $\leq$ 2IE.

Or I E, joignant les milieux des côtés du triangle P Q S est égal à $\frac{QS}{2}$. La condition devient donc :

$$AB \leq QS \quad ou \quad a \leq b\sqrt{2}. \text{» (19)}$$

Puis il ajoute, immédiatement : « La solution directe du problème est plus simple que la précédente, car les carrés ayant même centre il suffit de décrire, du centre O du carré ABCD, une circonférence de rayon $\frac{b\sqrt{2}}{2}$ pour avoir le point S » (2).

Soit encore un autre problème dont nous ne reproduirons pas la discussion, nous bornant à indiquer ce qui a de l'intérêt pour le sujet de cette étude. « On donne une circonférence et deux droites, OX et OY, passant par le centre et formant un angle de 60° ; mener une tangente, telle que la portion comprise entre les deux droites ait une longueur donnée a.

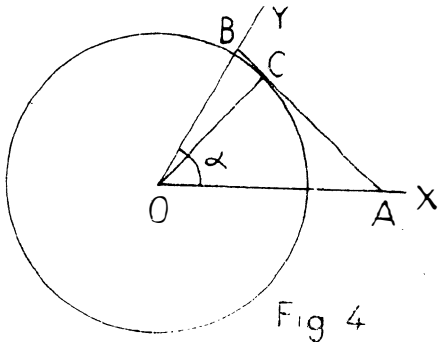


Fig 4

Soit AB la droite cherchée ; dans le triangle OAB on connaît un côté AB = a, l'angle opposé 60°, et la hauteur O C = R. C'est une construction simple si l'on place d'abord le côté » (20).

R. Javelot, au chapitre de son livre sur la résolution des problèmes de Géométrie, qui traite « des constructions de figures » (21) dit, entre autres, que « souvent la figure serait facilement constructible, si l'on pouvait en construire une autre ; quand cette autre est construite le problème est alors résolu. On essayera donc de ramener la question à une autre, plus simple, d'où le nom de méthode de substitution ; en

(19) **Lemaire.** « Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de géométrie », p. 137.

(20) **Lemaire.** Même ouvrage, p. 137.

(21) **R. Javelot.** « Comment résoudre les problèmes de géométrie élémentaire ? » Chapitre V.

pratique il y aura souvent plusieurs substitutions simples » (22). Plus loin, dans un exemple qu'il donne et où il s'agit d'abord, étant donnée, dans l'énoncé du problème, la somme ou la différence de deux longueurs, « de réaliser dans la figure cette somme ou cette différence en portant, de manière convenable, les deux longueurs sur une même droite » (23), il applique la dite méthode de substitution.

Nous pouvons donc nous rendre compte, sur l'exemple lui-même, de ce que le mathématicien entend par « une construction plus simple » qu'une autre. On demande de « construire un triangle connaissant un côté, l'angle opposé, et la somme des deux autres côtés. Soit ABC le triangle cherché, dans lequel les données sont BC, AB + AC, et l'angle $\hat{A}$.

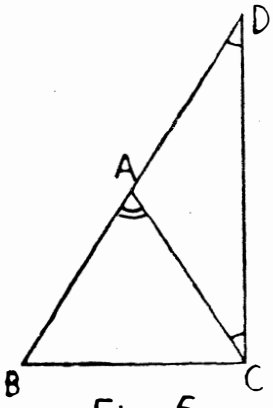


Fig. 5

On réalise la somme des côtés AC et AB en prolongeant BA d'une longueur A D = A C ; la longueur B D est donc connue et le point D doit être sur le cercle de centre B.

Mais le triangle D A C étant isocèle (par construction), on a : $\hat{A} = \hat{D} + A\hat{C}D = 2\,\hat{D}$; l'angle D est donc la moitié de l'angle donné, et le point D est sur le segment de cercle de corde BC et capable de $\frac{\hat{A}}{2}$; le point D est donc constructible ; on tracera alors BD et CD, et par C, on mènera CA faisant avec CD l'angle ACD $= \frac{\hat{A}}{2}$, qui coupera BD en A. Remarquons que A est aussi l'intersection de BD avec la perpendiculaire à CD en son milieu. La méthode de substitution a été employée en ceci que la construction de ABC a été déduite de celle de BCD » (24). Par cela seul, d'après ce qui vient d'être dit plus haut, la construction du triangle BCD, qui « est celle d'un triangle connaissant un côté, un des angles adjacents et le côté opposé à cet angle » (25) est *plus simple* que

(22) **R Javelot.** Même ouvrage, p. 145.
(23) **R. Javelot.** Idem, p. 151.
(24) **R. Javelot.** Idem, pp. 151-152.
(25) **R. Javelot.** Idem, p. 152.

ne l'aurait été celle de ABC, sans son intermédiaire, à partir des données. Mais ajoute l'auteur « voici (du même triangle BCD) une seconde construction plus simple que la précédente :

Prendre une longueur BD égale à la longueur donnée, faire l'angle $B\widehat{D}C$ égal à l'angle donné, de B comme centre décrire avec BC comme rayon une circonférence qui coupe DC en deux points : C et C' » (26).

En géométrie « descriptive », les constructions simples sont encore souvent signalées par les auteurs. On connaît la méthode générale pour la détermination des angles formés par deux plans, méthode qui « comporte la résolution de quatre problèmes distincts :

1° Détermination de l'intersection des deux plans P et Q ;

2° Construction d'un plan R perpendiculaire à cette intersection ;

3° Détermination des deux droites d'intersection D et D' de ce plan R avec les plans P et Q :

4° Détermination des angles formés par les deux droites D et D' » (27).

T. Chollet et P. Mineur en donnent une seconde basée sur le théorème : « Les angles de deux plans P et Q sont égaux aux angles des perpendiculaires ME et MF menées à ces plans par un point quelconque de l'espace » (28). Il suffit donc dans cette méthode, « pour déterminer les angles formés par les plans P et Q, de construire ceux formés par les droites ME et MF. Les constructions auxquelles conduit cette méthode, — ajoutent-ils, — sont généralement plus simples que les précédentes » (29). Pour ne pas allonger outre mesure cette énumération d'exemples où la simplicité des construction mathématiques est en cause, nous n'avons pas exposé ces construc-

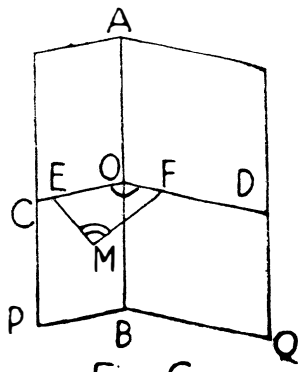


Fig. 6

(26) **R. Javelot.** Idem, p. 152.

(27) **T. Chollet et P. Mineur.** « Traité de géométrie descriptive » (à l'usage des élèves de 1re C et D et des candidats au baccalauréat), p. 192.

(28) **T. Chollet et P. Mineur.** Même ouvrage, p. 201.

tions. Nous n'exposons pas non plus celles qui pourraient leur être comparées, celles qui, c'est-à-dire, découlent de la seconde méthode, renvoyant aux auteurs même ceux que la comparaison intéresserait.

Quelquefois, en disant qu'une figure est simple, par rapport à telle autre, le mathématicien entend que son intervention dans une construction rend plus simple celle-ci. C'est ainsi que, en ce qui concerne le problème de la détermination de la droite d'intersection de deux plans quelconques, par la méthode générale dite des plans auxiliaires (30), T. Chollet et P. Mineur déclarent que, dans le cas où les deux plans $P^{\alpha}Q$ et $P_1{}^{\alpha_1}Q_1$ sont définis par leurs traces « les plans auxiliaires les plus simples qui se présentent, sont les plans de projection » (31). En effet, « le plan horizontal coupe les deux plans suivant leurs traces horizontales (P_α, xy), ($P_{1\alpha_1}$, xy) ; ces traces se rencontrent au point (a, a'). De même le plan vertical coupe les deux plans suivant leurs traces verticales (xy, $_\alpha Q$) et (xy, $_{\alpha_1} Q_1$), qui se rencontrent au point (b, b'). L'intersection des deux plans est donc la droite (ab, a' b'). Remarquons que les deux points (a, a') et (b, b') qui définissent la droite d'intersection des plans donnés sont respectivement la trace horizontale et la trace verticale de cette droite » (32).

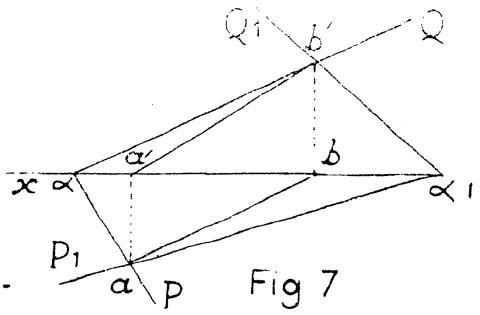


Fig 7

La plupart du temps, quand il s'agit de géométrie proprement dite, les « solutions simples », les « procédés simples », les « moyens simples », se ramènent à des contructions simples, permettant de « matérialiser » aisément, en quelque sorte, le raisonnement. Nous avons vu (33) que la simplicité de la seconde solution — de la solution « directe » — proposée par Lemaire au problème de l'inscription, dans un carré de côté donné a, d'un autre carré de côté b, n'est autre chose que cela. En effet « il suffit, alors, de décrire du cen-

(30) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 47.
(31) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 126.
(32) **P. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 127.
(33) Voir plus haut, page 12.

tre O du carré ABCD (de côté a), une circonférence » (34), d'un certain rayon pour avoir immédiatement résolu la question.

On sait que « lorsqu'un point d'un plan satisfait à deux conditions, c'est qu'il doit se trouver à la fois sur deux lieux géométriques ; il est donc à leur intersection... Si les deux lieux en question sont des droites ou des cercles, il suffira de les construire pour avoir les points cherchés » (35). Mais, ajoute Carlo Bourlet, « il arrive souvent que la méthode précédente n'est pas applicable simplement parce que les lieux géométriques ne sont ni des droites ni des cercles » (36). Il entend nettement, par là, qu'il existe des cas, où la construction de ces lieux, visant à la construction de leur intersection cherchée, *n'est pas simple*.

Un procédé que signalent T. Chollet et P. Mineur, en plus du procédé général pour mener dans un plan, par un point de ce plan, une droite de pente donnée, a l'avantage d'éviter des complications de construction dans le cas où la pente donnée est exprimée par une fraction, comme cela arrive généralement (37). De même, le procédé signalé un peu plus loin, par les mêmes auteurs, pour mener par une droite donnée un plan de pente donnée, toujours dans le cas où la pente donnée P, du plan cherché, est une fraction, « évite des constructions trop complexes » (38).

Mais il est des « moyens simples » qui sont des moyens simples de *démontrer* quelque chose, autant, sinon davantage, par le raisonnement, que par les suggestions fournies à l'esprit par un tracé aisé à suivre. Il peut y entrer une construction, — et, en général, en géométrie ordinaire, il y en entre une ; — mais l'important est, ici, la démonstration en elle-même, bien plus que la construction, pour autant que l'on soit en droit de séparer ces deux choses intimément liées chez la plupart des géomètres, dans le sens ordinaire du mot. Tels sont, par exemple, semble-t-il, les différents « moyens sim-

(34) **G. Lemaire.** « Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de géométrie », p. 137.

(35) **Carlo Bourlet.** « Cours abrégé de géométrie », déjà cité, p. 182.

(36) **Carlo Bourlet.** Même ouvrage, p. 183.

(37) **T. Chollet et P. Mineur.** « Traité de géométrie descriptive » (à l'usage des élèves de 1re C et D), p. 39.

(38) **T. Chollet et P. Mineur.** Même ouvrage, p. 41.

ples » que signale R. Javelot « pour prouver que des points sont en ligne droite » (39). Notons l'un d'eux, au hasard, pour illustrer notre pensée : « Supposons que l'on veuille prouver que les trois points P, L, M, sont en ligne droite. Souvent la figure contiendra une droite xy passant par l'un des points, L, par exemple. Joignons ce point aux deux autres. Comme deux angles adjacents supplémentaires ont leurs côtés extérieurs en ligne droite », — et que la réciproque de ce théorème est vraie, — « il suffira de montrer que les angles $y\widehat{L}M$ et $y\widehat{L}P$ sont supplémentaires, ou, ce qui revient au même, que les angles $y\widehat{L}M$ et $x\widehat{L}P$ sont égaux » (40).

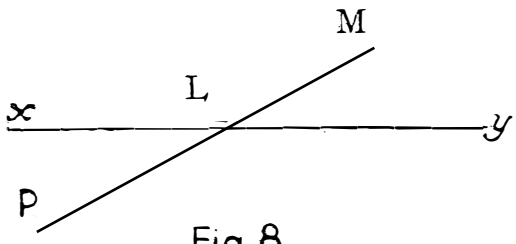


Fig. 8

La construction n'est, ici, certes, pas compliquée ; mais il semble que, aux yeux du mathématicien, le procédé décrit soit « simple », *du fait qu'il suffise, pour l'appliquer, de démontrer l'égalité ou le caractère supplémentaire l'un par rapport à l'autre, de deux angles.*

De même, parmi « les différentes manières de prouver que des points sont sur un même cercle, ou sur une même sphère » (41), le « procédé le plus naturel » — le plus simple, — lorsqu'on connaît le centre, est de démontrer que les distances de ce point aux points proposés sont égales ; ces points, s'ils ne sont pas tous dans le même plan, sont alors consphériques, au cas contraire, concycliques » (42). La construction que l'on trace sur le papier dans tel cas singulier pour mettre en évidence l'égalité de ces distances, peut être plus ou moins compliquée. Il semble que, d'après l'idée que nous avons pu jusqu'ici nous faire d'une construction « simple », à travers les quelques exemples cités, on ne puisse pas la qualifier vraiment de telle, dans le cas dit du Cercle d'Euler, ou des neuf points. — pour ne prendre qu'un cas. (Il s'agit,

(39) **R. Javelot.** « Comment résoudre les problèmes de géométrie élémentaire ? », p. 43.

(40) **R. Javelot.** Même ouvrage, p. 43.

(41) **R. Javelot.** « Comment résoudre les problèmes de géométrie élémentaire ? », p. 87.

(42) **R. Javelot.** Même ouvrage, p. 87.

comme on sait, de prouver que les milieux des côtés d'un triangle, les pieds des hauteurs, les milieux des distances des sommets à l'orthocentre, sont concycliques). Mais le *procédé de démonstration* n'en reste pas moins *simple*.

Il en est de même, apparemment, des « procédés simples » par lesquels « les points d'un lieu géométrique se déduisent souvent d'autres points variables » (43). Il peut,certes, s'agir de *construire simplement* le second lieu d'à partir du premier. Mais il peut s'agir également de *démontrer simplement*, quelle que soit la construction employée, — et dans la mesure, répétons-le, où il est possible de séparer construction de démonstration, — qu'on peut passer, rationnellement, du premier lieu à l'autre.

A côté de la «démonstration simple», il est fait, aussi, dans les traités de mathématiques, allusion au « calcul simple », et cela dans les traités quelque peu avancés, non moins que dans les plus élémentaires. C'est ainsi que cette expression est employée par G. Bouligaud dans son « Cours de géométrie analytique ». Cet auteur établit que « pour que deux courbes du second ordre soient homothétiques, il faut et il suffit qu'elles aient même directions asymptotiques. S'il s'agit de coniques à centre, on peut alors les regarder comme homothétiques de deux manières différentes. S'il s'agit de paraboles à axes parallèles, elles sont homothétiques d'une seule manière » (44). Remarquons ce qu'il dit dans le cas où chaque courbe est une parabole, pour montrer que la condition est suffisante — car elle est « évidemment nécessaire » (45) : « Les axes sont, par hypothèse, parallèles. Par translation, amenons les sommets, et, par suite, les axes à coïncider ; un calcul très simple, que l'élève fera, montre alors l'unicité d'une homothétie faisant correspondre la seconde parabole à la première » (46).

Souvent, en mathématique, des artifices plus ou moins ingénieux sont employés en vue de « simplifier les calculs ». Tel est, entre autres, le cas de ces « exposants fractionnaires » dont il est fait usage, parfois, en algèbre, et dont l'in-

(43) **R. Javelot.** Même ouvrage, p. 106.
(45) **G. Bouligand.** « Cours de géométrie analytique », p. 286.
(45) **G. Bouligand.** Même ouvrage, p. 286.
(46) **G. Bouligand.** Idem, p. 287.

troduction « permet de simplifier le calcul des racines » (47).

La « simplification » est, d'ailleurs, un procédé courant en mathématiques. En elle-même, elle se réduit, sans doute, à une simplification d'écriture. Elle consiste, en effet, à remplacer certaines formules, numériques ou littérales, par d'autres formules, mathématiquement équivalentes aux premières, mais ayant, soit un moins grand nombre de termes, soit des termes « plus simples » (dans le sens de numériquement plus petits. On se rappelle ce qui a été dit, au début de ces pages, du « rapport simple »). Tout le monde sait que, « simplifier une fraction », c'est la remplacer par une autre fraction, équivalente, dont les termes soient respectivement des diviseur des siens. Les « simplifications » que l'on rencontre, soit en algèbre, soit en géométrie analytique, semblent être, au fond, du même ordre. Les formules, par exemple, qui expriment les racines de l'équation du second degré « se simplifient si l'on suppose que b soit un nombre pair 2 b' ; elles donnent

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}. \text{ » (48)}$$

Il semble que le mathématicien aime les formules simples, et qu'il se complaise à les faire surgir, toutes les fois qu'il le peut, — fût-ce au prix d'un artifice tel qu'un changement de construction ou de notation, — de celles qui le sont moins. Nous trouvons dans un traité : « L'équation du cercle de centre C (x_0, y_0) et de rayon a, résulte immédiatement de la définition du cercle : c'est le lieu des points M, tels que $CM^2 = a^2$. Si on désigne par (x, y) les coordonnées de M, cette condition s'écrit :

$$(1)\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$$

Telle est donc l'équation du cercle. Si le centre est à l'origine ($x_0 = y_0 = 0$) elle est, plus simplement,

$$(2)\ x^2 + y^2 = a^2. \text{ » (49)}$$

Dans le même traité, il est, plus loin, question de l'équation d'une parabole : $y^2 - 2px = 0$. On a donné, auparavant, écrites avec les coordonnées courantes X, Y, les équa-

(47) **Grévy.** « Traité d'algèbre », p. 491.

(48) **Grévy.** « Traité d'algèbre », p. 215.

(49) **E. Vessiot et P. Montel.** « Cours de mathématiques générales », Ire partie, p. 325.

tions de la tangente et de la normale au point (x, y) qui sont respectivement perpendiculaire et parallèle à la direction de la normale $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, et qui passent l'une et l'autre par le point (x, y). Ces équations sont :

$$(3)\ \text{tangente} : (X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$(4)\ \text{normale} : \frac{(X-x)}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{(Y-y)}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad . \text{»}\ (50)$$

« Si on applique ces formules, ajoute l'auteur, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = -2p$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, d'où, pour la tangente

$$-p\,(X-x) + y\,(Y-y) = 0$$

ou

$$Yy - pX - y^2 + px = 0$$

En tenant compte de $y^2 = 2px$, cette équation se réduit à la forme simple,

$$Yy - p\,(X+x) = 0 \quad . \text{»}\ (51)$$

Une autre formule, signalée par G. Bouligaud comme « simple » est celle qui exprime, analytiquement, le produit scalaire de deux vecteurs, en coordonnées rectangulaires :

$$\mathbf{V}.\mathbf{V}' = aa' + bb' + cc'$$

Or « en coordonnées rectangulaires, projections et composantes des vecteurs, deviennent identiques (52). Dans le cas de l'introduction simultanée (en axes obliques), des composantes d'un vecteur et de ses projections orthogonales, le produit scalaire devient :

$$\mathbf{V}.\mathbf{V}' = \alpha a' + \beta b' + \gamma c'$$

α, β et γ représentant les valeurs algébriques des projections orthogonales de V sur les trois axes de coordonnées. C'est, là encore, une formule simple « qui rappelle la pre-

(50) **E. Vessiot et P. Montel.** « Cours de mathématiques générales », Ire partie, p. 350.

(51) **E. Vessiot et P. Montel.** « Cours de mathématiques générales », Ire partie, p. 350.

(52) **G. Bouligand.** « Cours de géométrie analytique », p. 21.

mière » (53). Et la « condition d'orthogonalité », tirée de là, « prendra la forme simple » (54) :

$$\alpha a' + \beta b' + c' = 0$$

Mais, s'il est vrai que les formules simples ont déjà, pour le mathématicien, un intérêt en elles-mêmes, il faut aussi constater que, souvent, la simplification — d'écriture, comme nous le disions, — est un moyen de mettre en évidence une vérité. Cette vérité, sans nul doute, peut être regardée comme déjà démontrée, par le fait que la formule que l'on « simplifie » est, mathémaiquement, équivalente à celle que l'on obtient après simplification. Mais c'est la formule finale, la « formule simple » qui l'exprime dans toute sa netteté. Reprenons, par exemple, la démonstration, d'après Carlo Bourlet, du théorème de géométrie élémentaire : « Dans un triangle quelconque, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, augmentée ou diminuée du double produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur lui, suivant que l'angle opposé au premier côté est aigu ou obtus. »

1° Soit ABC un triangle quelconque et AD la hauteur issue de A. Supposons d'abord l'angle C, opposé au côté AB, aigu. Le point D tombe alors entre B et C. Dans le triangle rectangle BAD on a

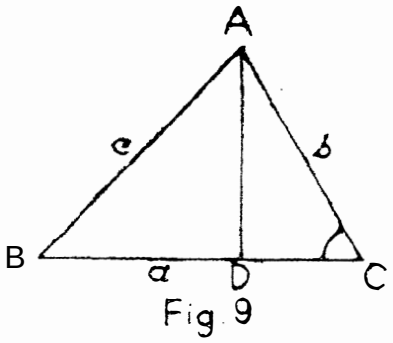


Fig. 9

$$(1) \quad \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$$

D'autre part, dans le triangle rectangle ACD, on a :

$$(2) \quad \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$$

et, le point D étant entre B et C, on a aussi :

$$BD = BC - CD.$$

D'où, en élevant au carré :

$$(3) \quad \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - (2BC \times CD)$$

En ajoutant, membre à membre, les égalités (2) et (3), on en conclut :

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - (2BC \times CD)$$

(53) **G. Bouligand.** Même ouvrage, p. 21.
(54) **G. Bouligand.** Idem, p. 21.

En *simplifiant*, et remplaçant AD^2+BD^2 par sa valeur AB^2, il vient :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + (2BC \times CD)$$

CD étant la projection du côté AC sur BC, cette égalité est bien conforme à l'énoncé » (55).

Dans le cas où l'angle C est obtus (fig. 10), nous verrions — il est, croyons-nous, inutile de reprendre toute la démonstration, qui est parallèle à la précédente, (56) — que c'est encore grâce à une simplification d'écriture, basée sur la connaissance de certaines égalités, que l'on arrive à établir la formule finale :

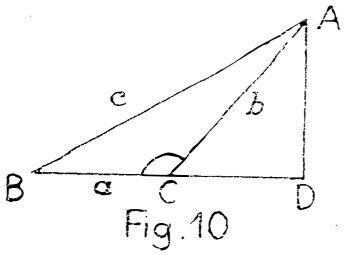


Fig. 10

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - (2BC \times CD)$$

Enfin, il est des simplifications qui consistent en autre chose qu'en des changements d'écriture en vue de formules moins chargées. Pour n'en donner qu'un aperçu, « certains systèmes particuliers, est-il dit dans un manuel d'algèbre, peuvent être résolus, au moyen d'artifices simples, plus rapidement qu'avec la méthode générale » (57). Ce n'est pas, ici, à une formule simple que l'on vise, mais il s'agit de passer *simplement* des données à cette formule finale, quelle qu'elle puisse être. Les « moyens simples » employés, sont des moyens faciles, des moyens qui consistent en l'application d'opérations « élémentaires » — l'un des premiers sens de la « simplicité que nous ayons rencontrés, en mathématiques. Les dites « simplifications » sont des simplifications de la solution, non du résultat. Il est bon de s'en rendre compte.

« Voici trois exemples de ces simplifications :

Exemple I. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = a & (1) \\ y + z = b & (2) \\ z + x = c & (3) \end{cases}$$

---

(55) **Carlo Bourlet.** « Cours abrégé de géométrie. I Géométrie plane », p. 287.

(56) **Carlo Bourlet.** Même ouvrage, p. 288.

(57) **Carlo Bourlet et J. Desbrosses.** « Algèbre, 1re, 2e et 3e année », p. 118.

En additionnant ces équations membre a membre, on a

$$2(x + y + z) = a + b + c$$

$$x + y + z \qquad \frac{a + b + c}{2}$$

d'où, en retranchant successivement chacune des équations proposées, on a :

$$x = \frac{a + b + c}{2} - b = \frac{a - b + c}{2}$$

$$y = \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + b - c}{2}$$

$$z = \frac{a + b + c}{2} - a = \frac{b + c - a}{2}$$

Exemple II. — Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ \frac{x}{7} = \frac{y}{3} & (2) \end{cases}$$

Dans toute proportion, la somme des numérateurs est à la somme des dénominateurs comme un numérateur quelconque est à son dénominateur, donc

$$\frac{x + y}{7 + 3} = \frac{x}{7} = \frac{y}{3}$$

Mais l'équation (1) donne $x + y = 20$, d'où :

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{20}{10} = 2$$

donc, $x = 14$ et $y = 6$.

Exemple III. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a & (1) \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = & (2) \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = c & (3) \end{cases}$$

Représentons respectivement par x', y' et z', les valeurs $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$, les équations données deviennent

$$x' + y' = a$$
$$y' + z' = b$$
$$z' + x' = c$$

Nous revenons au système de l'exemple I ; on a donc :

$$x' = \frac{a - b + c}{2} ; \quad y' = \frac{a + b - c}{2} ; \quad z' = \frac{b + c - a}{2}$$

Connaissant x', y' et z', il suffira de prendre les inverses de ces valeurs pour obtenir :

$$x = \frac{2}{a - b + c} ; \; y = \frac{2}{a + b - c} \text{ et } z = \frac{2}{b + c - a} \text{ » (58)}$$

Remarquons cependant qu'ici, dans le dernier cas, c'est une simplification d'écriture — le remplacement de $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ par les formules x' y' z' plus brèves et plus suggestives, — qui nous a conduit à l'analogie de la solution avec celle de l'exemple I, donc, qui nous a conduit à la « simplification » véritable de la solution par rapport à la méthode générale de résolution des équations du premier degré à plusieurs incommes.

C'est dans bien d'autres circonstances encore, que les mamathématiciens parlent de simplicité dans leurs traités.

Il existe, pour eux, des relations plus ou moins simples les unes que les autres. Celle, par exemple, qui montre « comment il est possible de trouver l'équation qui lie les coordonnées des points d'une courbe définie géométriquement comme cercle, est, selon Grévy, « moins simple que les précédents » (59), — c'est-à-dire, que celles qui ont servi à la représentation analytique d'une droite, ou à celle de la fonction dite homographique (60).

Il y a des opérations plus ou moins simples. La multiplication est une opération simple, pour Laisant (61). D'autre part, nous lisons que : « la mesure des longueurs conduit en

---

(58) **Carlo Bourlet et J. Desbrosses.** « Algèbre 1re, 2e et 3e année », p. 118-119.

(59) **Grévy.** « Traité d'algèbre », p. 169.

(60) **Grévy** « Traité d'algèbre », p. 166-168

(61) **Laisant.** « Initiation mathématique », p. 52.

arithmétique à la notion de nombre, et l'étude des combinaisons des longueurs entre elles, sert de base à la théorie des opérations simples qui correspondent à ces combinaisons » (62). Il semble, d'après ces mots, que les « opérations simples » par excellence, soient, en arithmétique, les « quatre opérations » fondamentales : addition, soustraction, multiplication et division. En géométrie « le plus simple des déplacements est la translation rectiligne » (63).

Il y a, aussi, des conditions plus ou moins simples auxquelles sont subordonnées les solutions des problèmes. Par exemple : « pour déterminer un cercle, il faut connaître trois conditions simples auxquelles il doit satisfaire. Une condition simple, c'est, par exemple, de passer par un point donné, d'être tangent à une droite donnée ou à une circonférence donnée, etc... » (64).

Enfin, il existe des notions plus ou moins simples.

Pour Laisant, la notion du signe et du sens des nombres est une notion simple (65). Parmi les notions, il en est de particulièrement importantes en mathématiques, ce sont celles des figures géométriques. Elles aussi sont susceptibles de simplicité, et peuvent, au moins dans une certains mesure, se comparer les unes aux autres, sous le rapport de la simplicité. « C'est, dit Laisant encore, en désignant la droite, la plus simple de toutes les figures de la géométrie » (66). Plus loin, il parle des « innombrables propriétés » de cette figure, pourtant « simple », le triangle (67). Pour Carlo Bourlet : « La plus simple de toutes les lignes est la ligne droite, dont un fil bien tendu nous donne une idée suffisamment exacte » (68). De même « la plus simple de toutes les surfaces est le plan, dont la surface d'une table, d'un mur bien dressé, d'une eau calme, nous donnent une idée suffisamment exacte » (69). Lemaire, commence une étude sur l'inversion géométrique

---

(62) **Grévy**. « Traité d'algèbre », p. 1.
(63) **Carlo Bourlet**. « Cours abrégé de géométrie », p. 65.
(64) **A. Béché**. « Géométrie (Des écoles primaires supérieures) », p. 145.
(65) **Laisant**. « Initiation mathématique », p. 45.
(66) **Laisant**, même ouvrage, p. 69.
(67) **Laisant**. Idem, p. 73.
(68) **Carlo Bourlet**. « Cours abrégé de géométrie. I. Géométrie plane », p. 1.
(69) **Carlo Bourlet**. Même ouvrage, p. 8.

par le rappel « de la figure inverse des figures simples considérées en géométrie élémentaire » (70), c'est-à-dire (nous le voyons dans les pages qui suivent), de la figure inverse de la droite (71) et de la circonférence (72).

De son côté, R. Javelot, que nous avons déjà maintes fois cité, parle de lieux géométriques plus simples que d'autres. Les points d'un lieu, que l'on cherche, « se déduisent souvent par un procédé simple d'autres points variables » (73). Il faut alors, dit-il, « étudier le lieu géométrique de ces derniers, qui est souvent plus simple que le premier » (74). On sait qu'un « lieu » géométrique, est une figure dont tous les points possèdent une certaine propriété, et dont fait nécessairement partie, réciproquement, tout point jouissant de cette dite propriété. Un « lieu » plus simple qu'un autre, c'est donc une certaine figure géométrique plus simple qu'une autre, à moins que ce ne soit un lieu dont on puisse mettre en évidence l'existence au moyen d'une démonstration plus simple. C'est peut-être les deux à la fois. Il ne s'agit pas là de discuter cette question. Il suffit, là encore, de constater l'existence, dans le domaine mathématique, du « simple ».

On pourrait encore la constater, cette fois en algèbre, en rappelant que « les plus simples des fonctions sont celles dans lesquelles y est un polynôme du premier degré en x » (75). Mais, si l'on voulait s'appliquer à chercher indéfiniment d'autres exemples où le mathématicien déclare, dans le courant de son travail, et sans qu'aucune réflexion après coup sur l'œuvre de sa pensée ne vienne donner à ses affirmations un caractère plus ou moins « philosophique », se trouver en face d'un fait mathématique, ou d'un « objet » mathématique qu'il qualifie de « simple », la liste s'en allongerait bientôt, semble-t-il, d'une manière fastidieuse.

Ce qui nous importait avant tout de montrer, c'est que l'idée de simplicité existe en mathématiques ; c'est que les mathématiciens eux-mêmes, dans leurs spéculations, y font

---

(70) **Lemaire.** « Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de géométrie, », p. 189.

(71) **Lemaire,** Même ouvrage, p. 189.

(72) **Lemaire.** Idem, p. 190.

(73) **R. Javelot.** « Comment résoudre les problèmes de géométrie élémentaire », p. 106.

(74) **R. Javelot.** Même ouvrage, p. 106.

(75) **Carlo Bourlet et J. Desbrosses.** « Algèbre », p. 161.

allusion comme à une idée qui leur est familière, et cela, aussi bien dans des manuels traitant les questions des programmes d'enseignement secondaire (voire même supérieur), que dans les plus élémentaires. Ce qui nous importait, c'était de montrer, surtout, que cette simplicité, ils en affirmaient l'existence dans tous les domaines de leur activité, en algèbre aussi bien qu'en arithmétique ou en géométrie ; et qu'elle se présentait à eux dans les circonstances les plus diverses, aussi bien dans les notions qu'ils emploient, dans les formules qu'ils écrivent que dans les démonstrations qu'ils créent ; aussi bien dans les solutions des problèmes que dans la matière de leurs énoncés.

CHAPITRE II

LA NOTION DE SIMPLICITE TROUVE EN MATHEMATIQUES UN EMPLOI

Ce n'est pas suffisant de dire qu'en mathématiques, la notion de simplicité existe. Plus nous prêtons attention à ce qu'écrivent les mathématiciens, et plus nous sommes amenés à constater qu'elle est, pour eux, d'un emploi courant.

Dans tout traité de mathématiques, les vérités sont présentées dans un certain ordre, les questions étudiées sont « classées ». L'idée de simplicité a sa part dans le choix de cet ordre, dans ce « classement ». «La méthode analytique, écrit, par exemple, G. Bouligaud, nous fournit le moyen d'établir une classification rationnelle des courbes et des surfaces. Par raison de simplicité, elle nous conduit à étudier d'abord les courbes et les surfaces algébriques » (1). Et il serait facile de trouver d'autres exemples tendant à montrer, en mathématiques, un usage analogue de la notion de simplicité.

Nous avons dit un mot de la satisfaction que semblent donner au mathématicien les formules simples. Un « résultat simple », semble, au premier abord, un résultat exprimé en une formule simple. De tels résultats sont notés, plus d'une fois, dans les traitées. Nous lisons, par exemple, après une démonstration montrant que la dérivée de $\log. (x + \sqrt{x^2+1})$ est égale à $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, que c'est là « un exemple de dérivée logarithmique important par la simplicité du résultot » (2).

(1) **G. Bouligand.** « Cours de géométrie analytique », p. 84.

(2) **E. Vessiot et P. Montel.** « Cours de mathématiques générales. I », p. 124.

Ici, donc, non seulement la simplicité est constatée, et notée par le mathématicien, mais il lui est attribué une certaine « valeur ». On a des raisons de regarder un résultat acquis, un point désormais connu, comme d'autant plus important qu'il est plus simple ; ou, tout au moins, sa simplicité ajoute aux raisons que l'on a d'en faire cas.

Les cas sont nombreux, en mathématiques, où la simplicité porte le mathématicien à « préférer » très nettement ce qu'il déclare être simple. Nous avons signalé le cas des lieux géométriques dont parle R. Javelot. On s'aperçoit que points d'un lieu, que l'on cherche, se déduisent de points variables qui, à leur tour, admettent un « lieu » plus simple que le premier. C'est cet autre lieu que le géomètre nous conseille (3) de chercher, pour en tirer le lieu dont il s'agissait, c'est-à-dire, pour répondre à une question posée, pour résoudre un problème. De même, dans les problèmes de géométrie, d'algèbre ou d'analyse, les figures ou les équations cherchées peuvent être soumises à des conditions plus ou moins simples. Quand ces conditions ne sont pas fixées, il est recommandé de prendre, si l'on peut, la question de telle façon, qu'elles soient le plus simples possibles. Si par exemple, les conditions géométriques qui déterminent une figure ne sont pas expressément énoncées, il est bon, nous est-il dit, de procéder aux constructions nécessaires, pour que la dite figure soit déterminée simplement. Soit un problème se rattachant à l'homothétie des figures, « où le centre d'homothétie coïncide avec le centre d'une circonférence à transformer ; la nouvelle figure est alors une circonférence concentrique, et une tangente à la première, devient dans l'autre une tangente parallèle. Il est quelquefois avantageux », — ajoute Lemaire, — « de faire cette transformation pour une partie de la figure lorsqu'on cherche le centre d'une circonférence, car ce centre ne change pas, et la nouvelle circonférence peut être assujettie à des conditions plus simples » (4).

Dans un cas comme dans l'autre il s'agit de la préférence accordée à une méthode simple de résolution d'une question mathématique, autant et plus encore qu'à une présentation

(3) **R. Javelot.** « Comment résoudre les problèmes de géométrie élémentaire », p. 106.

(4) **Lemaire.** « Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de géométrie », p. 171.

simple de cette question. On peut dire que partout, dans les mathématiques, les méthodes les plus simples conduisant à la solution d'un problème — les « solutions les plus simples, comme on dit encore, — sont préférées et recherchées. Carlo Bourlet, propose, par exemple, pour la recherche des lieux géométriques de points remplissant deux conditions (et « qui doivent, par conséquent se trouver, à la fois sur deux lieux géométriques, donc, à leur intersection » (5), une méthode, dite analytique, autre que la méthode d'« intersection des lieux », et qui « consiste à supposer la construction effectuée, et à examiner sur la figure, supposée construite, ses propriétés » (6). Cette méthode, il la propose parce qu'« il arrive souvent que la méthode précédente n'est pas applicable simplement, parce que les lieux géométriques ne sont ni des cercles ni des droites » (7). En d'autres termes, c'est pour son application plus simple que celle de la précédente, que cette méthode est intéressante ; c'est parce que son application constitue une solution plus simple du problème des lieux.

C'est également pour en donner « une solution et une discussion plus simple » (8), que Lemaire propose de résoudre le problème : « par deux points A et B d'une circonférence mener deux cordes parallèles, de même sens, dont le produit ait une valeur k^2 » (9) par application du théorème de Ptolémée, au lieu de le traiter comme il vient lui-même de l'indiquer (10).

En algèbre nous avons vu des exemples d'artifices employés pour résoudre certains systèmes particuliers d'équations, autrement que par la méthode générale (11). Le seul but de ces artifices, est de donner de ces systèmes une résolution plus simple que celle qui découlerait, pour eux, de l'application de cette méthode générale.

---

(5) **Carlo Bourlet.** « Cours abrégé de géométrie. I », p. 182.
(6) **Carlo Bourlet.** Même ouvrage, p. 183.
(7) **Carlo Bourlet.** Idem, p. 183.
(8) **Lemaire.** « Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de géométrie », p. 194.
(9) **Lemaire.** Même ouvrage, p. 193.
(10) **Lemaire.** Même ouvrage, p. 193.
(11) **Carlo Bourlet et J. Desbrosses.** « Algèbre 1re, 2e et 3e années », p. 118, déjà cité.

Mais la préférence accordée à la solution la plus simple, ne se montre pas seulement alors qu'il s'agit, pour le mathématicien, de décider, dans tel cas particulier, entre telle ou telle solution algébrique, ou entre telle ou telle solution géométrique. Elle intervient pour lui suggérer de traiter tel problème par l'algèbre plutôt que par l'arithmétique, par exemple, ou par la géométrie plutôt que par l'algèbre suivant les cas.

Nous trouvons, dans un manuel d'algèbre élémentaire, mises en parallèle, la solution arithmétique et la solution algébrique de ce problème extrêmement facile : trouver deux nombres dont la somme soit 40 et la différence 8. Le parallèle est destiné à montrer les « avantages de l'usage des lettres » (12).

1° *Solution arithmétique*

Le plus grand nombre est égal au plus petit augmenté de 8

La somme des deux nombres est égale au plus petit plus le plus grand, c'est-à-dire à deux fois le plus petit plus 8. Mais la somme est 40; par suite, deux fois le plus petit nombre, plus 8, est égal à 40.

Donc deux fois le plus petit nombre vaut 40 diminué de 8, c'est-à-dire, 32.

Le plus petit nombre est donc :

$$32 : 2 = 16$$

Le plus grand est :

$$16 + 8 = 24$$

Vérification.

Somme $= 24+16 = 40$

Différence $= 24-16 = 8$

2° *Solution algébrique*

Soit x le plus petit nombre, le plus grand sera

$$x + 8$$

La somme des deux nombres est, par suite :

$$x+x+8 \quad \text{ou} \quad 2x + 8$$

On a donc :

$$2x + 8 = 40$$

ou, en retranchant 8 de part et d'autre,

$$2x = 40 - 8$$

ou

$$2x = 32$$

d'où

$$x = \frac{32}{2} = 16$$

L'autre nombre est :

$$16 + 8 = 24$$

« La solution algébrique », nous dit-on, « montre bien la simplification introduite (13). C'est parce qu'elle est « plus simple » qu'elle est préférée. C'est la « simplicité » qu'il introduit dans les solutions — du moins dans certains cas, qui constitue l'un des avantages de l'algèbre du point de vue du mathématicien.

---

(12) Carlo Bourlet et J. Desbrosses. « Algèbre ». p. 12.

(13) Carlo Bourlet et J. Desbrosses. Idem, p. 13.

Mais il arrive souvent qu'une solution géométrique soit la plus simple. Elle est alors incontestablement préférée.

Soit par exemple le problème suivant : « 1° Démontrer que la longueur du segment de droite AB, qui a pour extrémités les points A et B, respectivement abcisse et coordonnée d'un point quelconque M, d'une circonférence, dont on prend le centre O comme origine des axes de coordonnées cartésiennes, reste constante ; 2° Déterminer sa longueur par rapport à celle d'un élément connu du cercle.

Essayons d'abord de raisonner sans figure.

Ce qu'on cherche à déterminer, c'est la constance de la longueur d'un segment de droite (AB), en d'autres termes, la constance de la distance AB. On sait que l'équation de la distance de deux points quelconques d'un plan A et B est :

$$AB = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

x_0 et y_0 étant respectivement l'abcisse et l'ordonnée de l'un des points par rapport aux deux axes, x et y, celles de l'autre point.

Mais ici, par hypothèse, A et B sont, respectivement l'abcisse et l'ordonnée d'un même point M, par rapport à deux axes d'origine O, soient OX et OY. Cela revient à dire que le point A (en tant qu'abcisse de M), est situé « sur » l'axe OX — « sur » est, ici, une manière de parler, car nous supposons que nous n'essayons de nous représenter aucun tracé, et que nous raisonnons seulement sur ce que nous savons en algèbre. — En d'autres termes, l'ordonnée du point A est nulle. Par contre, le point B, lui, en tant qu'ordonnée du point M (et situé « sur » l'axe OY), a toujours une abcisse nulle.

Si donc x est l'abcisse du point A, y l'ordonnée du point B, la distance AB sera exprimée par l'égalité :

$$AB = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

c'est-à-dire :

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Or x et y coordonnées du point M, sont des quantités corrélatives des déplacements possibles de ce point. Que fait M ? Il prend, dans le plan, toutes les positions par rapport aux axes de coordonnées, astreint seulement à ne pas quitter la circonférence qui a le point d'origine O, pour centre, c'est-à-dire à rester toujours à la même distance de O. Il existe

une certaine position pour laquelle M se trouvera sur l'un des axes de coordonnées — sur l'axe OX par exemple. Son abcisse, x, est alors égale à la distance OM, donnée, c'est-à-dire au rayon du cercle. Son ordonnée est alors nulle, cela s'entend. A mesure que le point M se déplace, dans quelque sens que ce soit, son abcisse décroit régulièrement, jusqu'à devenir nulle au moment où le point se trouvera sur l'axe OY, tandis que son ordonnée, au contraire, croît régulièrement, jusqu'à devenir égale à la grandeur fixe OM, quand M se trouvera sur l'axe OY.

Si on convient d'appeler D la trace du point M sur l'axe OX, et D' la trace du point M sur OY, au aura, évidemment :

$$OM = OD = OD'$$

Il serait facile de mettre en évidence, — disons-le pour abréger ce raisonnement déjà trop long — que les coordonnées du point M, astreint à se déplacer toujours à égale distance de O, en passant par les positions D et D' (par hypothèse à 90° l'une de l'autre par rapport à O), varient, l'une par rapport à l'autre comme le cosinus et le sinus de l'arc MD. Or, on connaît la relation fondamentale par laquelle le sinus et le cosinus du même arc sont liés :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

(α étant l'arc en question). L'unité est, par convention, la distance de l'origine à un point quelconque de l'arc. Si, ici, on remplace, dans cette relation, chaque terme par sa valeur, on aura

$$\sin^2 \overset{\frown}{MD} + \cos^2 \overset{\frown}{MD} = OM^2$$

C'est-à-dire, d'après tout ce qui précède

$$x^2 + y^2 = OM^2$$

C'est-à-dire :

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \sqrt{OM^2} = OM$$

Ce que nous traduirions en langage géométrique en disant que la distance AB cherchée est constante, en effet, puisqu'égale au rayon OM de la circonférence donnée.

On aurait pu arriver beaucoup plus simplement au même résultat, sans faire intervenir l'idée des variations régulières et simultanées du sinus et du cosinus d'un arc, qui change progressivement de valeur.

Pour cela, il fallait d'abord tracer la figure (fig. 11) : les axes de coordonnées OX et OY, le cercle de centre O, les perpendiculaires abaissées du point M (quelconque, pris sur le cercle), sur OX d'une part et sur OY de l'autre. Il fallait marquer A à l'intersection de OX et de la perpendiculaire abaissée de M, B à l'intersection de OY et de la perpendiculaire abaissée, également de M ; D, enfin, et D', aux intersections respectives des axes OX et OY avec la circonférence.

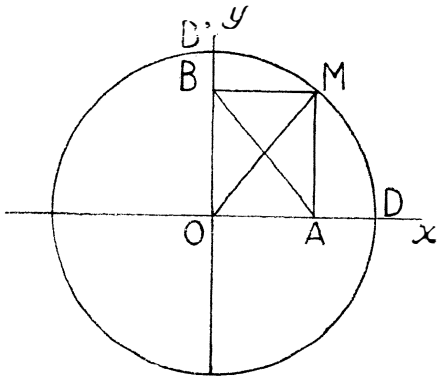


Fig. 11

Il fallait remarquer que le quadrilatère A M B O est, par construction un rectangle, dont le segment AB, dont il s'agit de déterminer la constance de la longeur, est une diagonale ; et il suffisait de songer que *l'autre diagonale,* OM (que l'on pouvait tracer), est, par construction, égale au rayon du cercle de centre O, pour en conclure que la longueur du segment AB est constante et égale au rayon de ce cercle. On sait, en effet : 1° que dans tout parallélogramme les deux diagonales sont égales ; 2° que, quelle que soit la position du point M, OM (toujours égale à AB) garde sa valeur en tant que rayon du cercle ; 3° qu'à la limite, le rectangle se confondant avec un segment de droite, OM et AB se trouvent confondus, et égaux à OD ou OD', qui sont des rayons du cercle.

Qu'est-ce qui fait que la deuxième solution est, de beaucoup, plus simple que la première ? C'est évidemment, l'emploi de la figure, qui, par l'éveil de l'intuition spatiale, nous a fait trouver, tout de suite, le rapport cherché entre l'élément donné et un élément invariable, ce qui a établi, du même coup, et la constance et la valeur de l'élément donné, en question.

Ce n'est pas que l'on puisse dire que, dans la première solution, on se soit passé complètement de tout recours à l'intuition spatiale. Nous avons plus ou moins imaginé le mouvement du point M et cela a dû difficilement se faire sans quelque représentation. Peut-être même est-ce cette représentation de mouvement cyclique qui nous a donné l'idée — dé-

veloppée après coup, — d'assimiler les variations de OA et de OB à celle du cosinus et sinus d'un arc. Il semble que la pensée du « cercle trigonométrique » nous ait, au moins, effleuré l'esprit. Et, admettrait-on qu'un raisonnement, une démonstration ne sont, au plein sens du mot, « mathématiques » qu'en tant qu'ils forment une suite d'opérations purement logiques ; que, toute intervention de l'intuition, toute démarche de l'imagination représentative lui enlève de son vrai caractère, on ne peut nier qu'en fait, le recours à l'imagination représentative et, particulièrement, à l'intuition spatiale, ne soit très fréquent en mathématiques. et que son rôle ne soit fort important ; que, sans elle, les démonstrations, plus strictement mathématiques peut-être, au sens où l'entend tout une école de savants et de théoriciens de la science, seraient souvent, assurément, beaucoup plus compliquées encore qu'elles ne le sont. On pourrait en fournir de nombreux exemples. Pour ne pas nous écarter de celui auquel nous nous référons ici, qu'on songe à toutes les considérations auxquelles il aurait fallu faire appel pour en arriver à comparer les variations simultanées des segments OA et OB à celles du cosinus et du sinus de l'arc MD, si on était astreint à bannir de son esprit toute représentation, même très floue. Ce qui ne veut pas dire qu'on ne trouverait pas des cas où la figure, et même la représentation floue de certaines des données, ne rend en rien le raisonnement plus simple ; qu'il n'y a pas des raisonnements que l'effort constant de représentation alourdit. Il y a des problèmes dont la résolution est plus simple alors qu'on les « traite par l'algèbre » qui si on les « traitait par la géométrie ».

Ce n'est pas le cas de celui que nous envisageons. Ici, il semble que l'on gagne en clarté et en rapidité à raisonner directement « sur » la figure. La première démonstration, — moins compliquée qu'elle ne le deviendrait si l'intuition spatiale en était totalement absente, — n'en est pas moins très inférieure à la seconde. Ce qui la rend longue et pénible, en comparaison, c'est que, cette part d'intuition qu'elle comporte n'est pas suffisante à suggérer les rapports les plus intéressants, et les plus féconds en vue de la solution, qui ressortent des données elles-mêmes interprétées géométriquement. L'absence de figure tracée, l'absence, si l'on veut de vision « nette » des données, sous forme de lignes, nous a privés de l'occasion d'inventer, tout de suite, l'élément inva-

riable (OM) auquel notre segment AB apparaît manifestement égal, pour des raisons que, sans la figure, nous ne soupçonnons pas ; de l'occasion de tracer (ou d'imaginer), la diagonale OM, du rectangle AMBO. Ce qui simplifie tant la solution, c'est que, cette diagonale une fois tracée, il apparaît évident, — nous dirions métaphoriquement : il saute aux yeux, — qu'elle est égale au rayon du cercle d'une part, et à AB d'autre part, où que soit le point M, sur le cercle.

Mais elle n'a été tracée qu'avec une sorte d'intuition qu'il pouvait, qu'il devait en sortir la mise en lumière de quelque chose d'intéressant pour la démonstration ; qu'on allait, par elle, ouvrir une piste, à la recherche ; et cette intuition est née de l'impression produite par la figure incomplète qui est l'illustration des seules données du problème et où la « diagonale » OM, rayon du cercle, était pour ainsi dire contenue en puissance ; de l'impression que la figure AMBO est un rectangle, et que le lieu des différentes positions possibles du point M est un cercle. On a cherché, naturellement, un élément invariable qui appartienne à la fois à ce rectangle (dont AB est, on le voit, une diagonale), et à ce cercle ; et on a complété la figure.

Dans la figure complète (fig. 11), il y a les données, la solution du problème, et les intermédiaires permettant de passer des données à la solution. La figure est comme une synthèse préalable de tout cela. La démonstration consiste en une utilisation analytique de cette synthèse. Elle consiste à en séparer et à en comparer les éléments, tour à tour considérés sous un autre jour ; et ce sont justement les changements dans la perception d'une même donnée figurée, qui apportent au raisonnement du « nouveau », qui font progresser la démonstration. (Dans le présent cas, on considère AB comme un segment, sans aucun rapport défini avec les autres éléments de la figure, puis, comme la diagonale d'un rectangle, puis comme la diagonale de ce rectangle qui a le point M pour l'un de ses sommets. Le segment OM, est d'abord regardé comme une autre diagonale de ce même rectangle, puis comme rayon du cercle, et comparé successivement à AB, en tant que diagonale, puis, en tant que rayon. Et de ces comparaisons, fécondes justement à cause du changement de perception de leurs termes, on déduit la solution.)

Mais si la figure n'existait pas, ou, du moins, si l'on n'était pas parti de la figure, on n'aurait pas eu l'idée de con-

sidérer les diverses données du problème, successivement, comme on les a considérées, on n'aurait surtout pas eu l'idée de la place et de la valeur de OM par rapport à AB, et la comparaison qui fait toute l'originalité de la seconde démonstration, si simple, ne se serait pas présentée à l'esprit.

La figure, est un « moyen » de provoquer immédiatement cette comparaison, par une perception suggestive de ses termes parmi toutes les autres données du problème qu'elle illustre. Et comme il ne semble pas qu'il y ait de moyen plus simple de résoudre la question posée, — (de mettre en évidence la constance de AB et d'en trouver la valeur) — que de procéder tel que nous l'avons fait dans la seconde démonstration, on peut bien dire qu'ici, c'est un souci de simplicité dans le raisonnement (dans la démonstration), qui nous fait préférer cette seconde solution, toute géométrique, à l'autre. Ce n'est pas le souci de la simplicité des termes eux-mêmes que nous avons employés comme intermédiaires, car on ne voit pas que, pris un à un, chacun de ces termes (chacune des notions évoquées, telles que celle du rectangle AMBO, de sa diagonale, etc.), soit plus simple, à priori, que ceux qui nous ont servi d'intermédiaires dans la première démonstration (notion de distance AB, d'arc MD, etc.).

D'ailleurs, pour pouvoir se comparer quant à leur plus ou moins grande simplicité, il faudrait, semble-t-il, que ces termes soient, de part et d'autres, de même nature — : tous des notions « géométriques », ou tous des notions « algébriques », — ce qui n'est pas. Deux « démonstrations », elles, deux raisonnements, se comparent toujours ; car ils ont de commun le fait qu'ils sont tous deux des enchaînements logiques de propositions, et c'est en tant que tels — dans leur forme, indépendamment de leur contenu, — qu'on les compare. Il est plus difficile de juger si une comparaison de termes est légitime. Mais, le serait-elle toutefois ici, qu'il ne semble pas que ce soit de leurs « termes » qu'il s'agisse, alors que, mettant en parallèle nos deux démonstrations, nous préférons la seconde « pour raison de simplicité ». Nous n'avons alors en vue que la suite, l'enchaînement logique des données au résultat trouvé (résultat qui évidemment est le même dans les deux cas).

Nous constatons que sa simplicité atteint, dans la solution géométrique, un degré que nous n'imaginons pas qu'elle puisse dépasser, et nous nous rendons compte qu'elle est dûe

à un choix très heureux des nœuds ou étapes du raisonnement, c'est-à-dire, aux suggestions de la figure de laquelle nous sommes partis, car chaque nœud, chaque étape féconde, ne nous est apparue que grâce à ce que nous n'avons pas cessé, tout au long, de nous appuyer sur la figure. Et, plus le problème nous avait d'abord paru compliqué, — faute d'avoir entrevu la possibilité d'envisager OM de deux façons que le dessin nous suggère être aussi légitimes l'une que l'autre, — plus aussi nous tirons de satisfaction de cette simplicité que l'examen de la figure introduit brusquement dans le raisonnement ; plus nous goûtons ce que nous appelons « l'élégance » de la solution « géométrique » de notre problème.

Nous trouverions, dans les traités de mathématiques des cas, moins évidents à toute première vue, où la solution géométrique est recherchée pour sa simplicité, de préférence au raisonnement analytique. C'est, par exemple, dans le cas que cite Bouligand.

G. Bouligand définit d'abord ce qu'on appelle en géométrie analytique des éléments imaginaires. « Etant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, nous avons vu que trois nombres réels a, b, c déterminent un point et un seul. Nous appellerons point, l'ensemble de trois nombres complexes $a_1 + ia_2$, $b_1 + ib_2$, $c_1 + ic_2$. Pour avoir encore plus de généralité et englober en même temps le cas des points à l'infini, nous utiliserons des coordonnées homogènes et nous appelerons point l'ensemble de quatre nombres complexes non tous nuls, soient

$$A_1 + iA_2, \qquad B_1 + iB_2, \qquad C_1 + iC_2, \qquad D_1 + iD_2$$

Nous appellerons « plan » l'ensemble des points (au sens précédent) qui vérifient une équation de la forme :

$$AX + BY + CZ + DT = 0$$

et « droite » l'ensemble des points qui vérifient deux équations de cette forme, distinctes l'une de l'autre.

L'idée qui préside à ces généralisations est bien apparente, et il nous est maintenant facile de l'étendre. Considérons, en géométrie réelle une ligne ou une surface d'un type déterminé et écrivons les équations de cette ligne ou l'équation de cette surface. Si, conservant la forme de ces équations, nous affranchissons les coefficients de la condition d'être réels, ou de satisfaire à certaines inégalités qui résulteraient de la définition géométrique de la ligne ou de la surface ; si, en même

temps, nous laissons aux coordonnées la latitude d'acquérir des valeurs complexes quelconques, nous continuerons à dire que notre ou nos équations représentent une surface ou une ligne fictive, à laquelle nous conserverons le nom qui la désignait en géométrie réelle. Ainsi, dans tous les cas, nous dirons maintenant, en prenant des coordonnées non homogènes, que l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

représente une sphère » (14).

« Pour généraliser, — continue l'auteur, — les notions de distances (distance de deux points, distance d'un point à un plan ou à une droite, plus courte distance de deux droites), celles de puissance d'un point par rapport à une droite où à une sphère, nous prendrons les expressions analytiques qui représentent ces divers éléments en géométrie réelle, et nous conviendrons de leur conserver leurs désignations respectives lorsque les points, les lignes ou surfaces considérés, deviennent imaginaires. Nous procéderons de même pour étendre la définition de tout élément métrique » (15). C'est grâce à la conservation de la forme que cela peut se faire. En effet : « Les éléments métriques de la géométrie réelle (distances, angles, puissances, etc.) ont, cela va sans dire, des valeurs indépendantes du système de coordonnées qu'on adopte pour leur calcul, et qui n'intervient que comme un simple auxiliaire. Il est facile de montrer que cette propriété indispensable s'applique aux éléments abstraits de même nom. En effet, un changement de coordonnées correspondra désormais, pour nous, à une substitution de la forme :

$$\begin{aligned} x &= A + ax_1 + a'y_1 + a''z_1, \\ y &= B + bx_1 + b'y_1 + b''z_1, \\ z &= C + cx_1 + c'y_1 + c''z_1, \end{aligned}$$

où les lettres A, B, C et a, b... c'' peuvent représenter maintenant des nombres complexes. En nous en tenant à ne considérer que les axes rectangulaires, les neuf quantités a, b... c'', satisfont toujours aux six relations connues (16).

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & ca + c'a' + c''a'' &= 0 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0. \text{ » (17)} \end{aligned}$$

---

(14) **G. Bouligand.** « Cours de géométrie analytique », p. 93-94.
(15) **G. Bouligand.** Même ouvrage, p. 94-95.
(16) **G. Bouligand.** « Cours de géométrie analytique », p. 95-96.
(17) **G. Bouligand.** Même ouvrage, p. 41

Et c'est encore grâce à cette « conservation de la forme » qu'il est possible, ajoute l'auteur, « d'appliquer aux notions abstraites que nous venons de définir des raisonnements en tout point analogues à ceux que l'on ferait s'il s'agissait d'une figure réelle, et, par suite, affectant la forme purement géométrique, précieuse à cause de sa simplicité » (18).

Et il prend l'« exemple simple » suivant pour expliciter sa pensée :

« A une circonférence (O), menons, par un point A extérieur, les tangentes AB et AC : la corde des contacts BC rencontre AO en D, et une sécante AEF, issue de A, en G (fig. 12). En vertu des égalités

$$AE.AF = \overline{AB}^2 = AO.AD,$$

le cercle circonscrit au triangle E D F passe par le point O ; ce dernier, sur le cercle, étant le milieu de l'arc EF, la droite DO est la bissectrice extérieure de l'angle EDF, qui admet par suite DB comme bissectrice intérieure, si bien que les points A et G sont conjugués harmoniques par rapport à E et F. En appelant I le milieu de AG, nous avons donc :

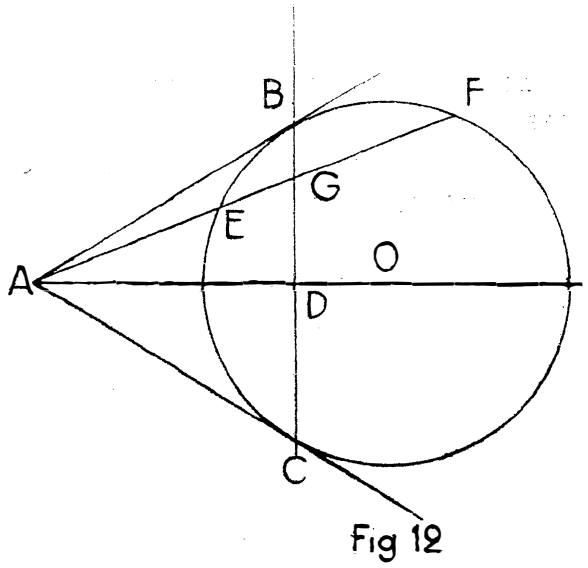


Fig 12

$$\overline{IA}^2 = IE.IF.$$

La tangente menée de I à la circonférence O a donc pour longueur IA ; par suite, cette circonférence est orthogonale au cercle de diamètre AG.

Nous allons nous proposer d'établir que cette propriété subsiste si le point G, au lieu d'être, comme dans le raisonnement précédent, entre B et C, est sur le prolongement de cette droite. La différence entre les deux cas apparaît immé-

(18) **G. Bouligand**. Idem, p. 96.

diatement : dans la nouvelle hypothèse, nous ne pouvons plus considérer sur la figure les points E et F. Au point du vue de la géométrie ordinaire, notre premier raisonnement est donc complètement en défaut. Grâce aux conventions de langage précédentes, nous pouvons cependant considérer que ce raisonnement établit encore la propriété énoncée. En effet, celle-ci est exacte lorsque G est entre B et C : dans ces conditions il est donc possible de la vérifier par le calcul. On peut même agencer cette vérification de manière que chaque équation, qui constitue un chaînon de ce calcul, exprime la propriété qui intervient, avec le même numéro d'ordre, dans l'enchaînement du raisonnement précédent. Mais ce jeu de calculs conservera sa valeur lorsque les points de rencontre de la droite AG et du cercle deviendront imaginaires. Le raisonnement géométrique, qui menait au même but que la vérification algébrique dans un cas particulier de figure, peut donc être regardé maintenant comme embrassant tous les cas.

Ainsi, la validité des raisonnements, de forme géométrique, que nous entreprendrons sur les éléments fictifs précédemment introduits, se trouvera garantie par une suite de calculs, dont ces raisonnements ne constituent, au fond, qu'une interprétation, valable au point de vue réel dans un cas particulier, mais pouvant embrasser tous les cas, grâce aux conventions qui précèdent » (19).

Et, ne l'oublions pas, l'avantage présenté, pour le mathématicien, par cette solution « géométrique », que les conventions signalées plus haut rendent possible dans sa généralité, c'est qu'elle est la plus simple que l'on puisse donner du problème ; en particulier, elle est beaucoup plus simple que ne le serait une solution algébrique, et cela, — de même que la solution géométrique du problème élémentaire que nous avons rapportée plus haut est la plus simple, — grâce aux suggestions heureuses de l'intuition spatiale que la figure facilite.

Ailleurs, G. Bouligand montre, sur un exemple, « la supériorité que donne au chercheur la connaissance des méthodes analytiques, même si on lui demande de développer une solution en s'en tenant aux propositions de la géométrie

(19) **G. Bouligand**. « Cours de géométrie analytique », p. 97-98.

pure » (20). Le problème est le suivant : « Mener, d'un point donné A, une droite coupant deux droites données x'x et y'y en des points P et Q tels que, B étant un point donné, l'angle PBQ ait une valeur donnée » (21).

Sans en reproduire de nouveau ici, la solution qu'en donne l'auteur, nous pouvons dire que c'est une solution « simple ». « Tous les problèmes, nous est-il dit, ne se traitent pas aussi simplement que le précédent » (22). Et la dite « supériorité » que donne au chercheur la connaissance des méthodes analytiques, semble justement consister, pour l'auteur, en ce qu'elle lui permet de trouver aux problèmes, voire même s'il les traite « par la géométrie », des solutions plus simples.

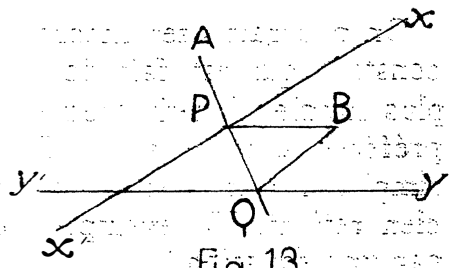


Fig. 13

On arriverait vraisemblablement, à montrer que la préférence accordée par le mathématicien, pour chaque problème singulier soit à une solution « par l'algèbre » ou par l'analyse, soit à une solution « par la géométrie », se justifie par la plus grande simplicité que la solution adoptée comporte, par rapport à l'autre — ainsi que, d'ailleurs, par rapport aux autres différentes solutions possibles de même espèce, s'il en est. Et des remarques analogues seraient à faire sur les nombreux cas où, « pour des raisons de simplicité » une solution algébrique est préférée à une solution arithmétique de la même question, ou vice-versa.

Il va sans dire que, parmi les préférences accordées à telle ou telle solution, il en est sans doute, qui ne sont pas hors de toute contestation. Il faut tenir compte, dans le fait de pencher pour telle solution, telle méthode, etc., dans chaque cas singulier, de la force des habitudes d'esprit de chacun, et aussi, de ce qu'on pourrait appeler le « tempérament mathématique » de chacun. La distinction bien connue qu'a signalée Henri Poincaré entre les mathématiciens-logiciens, et les mathématiciens-intuitifs, a sans doute sa place dans le dé-

(20) **G. Bouligand.** Même ouvrage, p. 395.
(21) **G. Bouligand.** Idem, p. 394-395.
(22) **G. Bouligand.** Idem, p. 395.

bat. Il n'en reste pas moins que, le seul fait qu'elle lui apparaisse plus simple, fait préférer à un mathématicien, quel qu'il soit, une certaine solution d'un problème ou de tout une catégorie de problèmes. Et c'est là, pour le moment, ce qui nous semble intéressant, car c'est là où l'on voit que la notion de simplicité, n'est pas, en mathématiques, une notion stérile, Au contraire.

On pourrait citer encore de nombreux exemples de l'usage constant qui est fait de cette notion. La démonstration la plus simple d'un théorème ou d'une formule importante, est préférée à toute autre. Les remarques qui permettent de simplifier une démonstration sont celles que le mathématicien retient. Un exemple : « Supposons une courbe, définie par une équation

$$(1)\quad f(x, y) = 0$$

Les équations paramétriques de l'une quelconque de ses branches vérifieraient identiquement cette équation. On peut donc supposer que (1) est l'identité en t obtenue en remplaçant x et y par les fonctions $\varphi(t)$ $\psi(t)$ en question et différencier les deux membres. Ce qui donne, par le calcul des différentielles totales,

$$(2)\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy = 0$$

On en tirerait des quantités proportionnelles à dx et dy, qu'on pourrait porter dans les équations de la tangente

$$(3)\quad \frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} \quad \text{ou} \quad (X-x)\,dy - (Y-y)\,dx = 0$$

et de la normale

$$(4)\quad (X-x)\,dx + (Y-y)\,dy = 0$$

Mais il est plus simple de remarquer que cette formule (2) exprime que le secteur $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est perpendiculaire au vecteur dx, dy ; et que, par conséquent, lorsqu'une courbe est définie par l'équation $f(x, y) = 0$, les coefficients de direction de la normale sont $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Par conséquent, les équations de la tangente et de la normale au point (x, y) qui sont respectivement perpendiculaire et parallèle à cette direction $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, et qui passent l'une

et l'autre par le point (x, y), s'écrivent, avec les coordonnées courantes X, Y :

$$\text{tangente :} \quad (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

et $$\text{normale :} \quad \frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad . \text{»} \quad (23)$$

De même, partout où le problème qui se pose est un problème de « construction », comme cela arrive souvent en géométrie ordinaire, proprement dite, et surtout en géométrie « descriptive », c'est la construction la plus simple que le mathématicien cherche à réaliser.

Il modifie, s'il le faut, la méthode qu'il doit employer, pour pouvoir y arriver.

Nous avons vu, dans le chapitre précédent (24), sans nous y attarder, qu'il y a une manière plus simple que l'autre de « mener dans un plan, par un point de ce plan, une droite de pente donnée » (25). Il y a une méthode générale de résolution de ce problème, méthode qui répond à la construction que voici. « Soit à mener dans le plan Q, défini par une échelle de pente, une droite de pente p passant par le point m (5) du plan. Supposons le problème résolu et soit mn la projection de la droite cherchée, sur laquelle nous prenons le point N dont la cote est (4), inférieure d'une unité à celle du point donné ; cette droite sera complètement déterminée si l'on connaît la projecion n du point N. Or, un premier lieu du point n est la projection horizontale gk de l'horizontale de cote 4 du plan donné, que l'échelle de pente du plan permet de tracer immédiatement ; de plus le segment mn est égal à l'intervale $i = \frac{1}{p}$ de la droite cherchée,

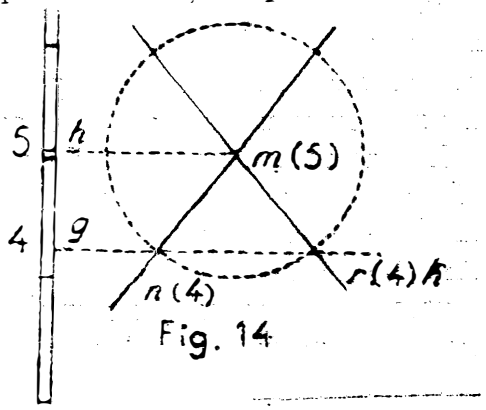


Fig. 14

(23) **E. Vessiot et P. Montel.** « Cours de mathématiques générales. I », pp. 349-350.

(24) Voir plus haut, p. 17.

(25) **T. Chollet et P. Mineur.** « Traité de géométrie descriptive (déjà cité), Ire partie, p. 38.

de sorte que la circonférence de centre m et de rayon $\frac{1}{p}$ est un deuxième lieu du point n. Cette circonférence rencontre généralement la droite gk en deux points n et r, et les droites m (5), n (4) et m (5) et r (4) répondent à la question » (26).

Mais, dans la pratique, ce n'est ordinairement pas ainsi que l'on procède. « Au lieu de chercher un des deux points de la droite dont la cote diffère d'une unité de celle du point donné, on cherche un point dont la cote en diffère de trois unités, en moins par exemple. Un premier lieu de la projection n de ce point est la projection gk de l'horizontale du plan de cote $5{,}5 - 3 = 2{,}5$ (le point m a la cote 5,5 par exemple). Un deuxième lieu est la circonférence de centre m et de rayon égal à trois fois l'intervalle de la droite cherchée, c'est-à-dire, $-$ (la pente de la droite étant, dans ce nouveau cas $\frac{3}{5}$) $-$; $3 \times \frac{5}{3} = 5$ unités de l'échelle du dessin. La solution s'achève ensuite comme plus haut » (27).

Pourquoi cette modification ? Parce que la pente, cette fois-ci, comme cela arrive ordinairement, « dans la pratique », est exprimée par une fraction, et qu'« il peut alors être compliqué de construire le rayon $\frac{1}{p}$ » (28).

La méthode générale pour mener «par une droite donnée un plan de pente donnée » (29) est, elle aussi, modifiée dans la pratique et pour la même raison. Il s'agit, pour le mathématicien d'« éviter des constructions trop complexes » (30), qui résulteraient de son application dans le cas où la pente donnée du plan est une fraction.

Les mêmes auteurs, à propos d'un autre problème, nous offrent une preuve de plus de la préférence constante du mathématicien pour les constructions simples. Il s'agit de l'intersection d'une droite et d'une sphère. « Une droite rencontre généralement une sphère en deux points. Pour construire ces points, on fait passer par la droite D un plan auxi-

(26) **T. Chollet et P. Mineur.** Même ouvrage, p. 38.
(27) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 39.
(28) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 39.
(29) **T. Chollet et P. Mineur**, Idem, p. 40.
(30) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 41.

liaire P ; ce plan coupe la sphère suivant un cercle C ; ce cercle C et la droite donnée D, étant dans le même plan P, se rencontrent en deux points au plus A et B, qui sont les points d'intersection de la droite D et de la sphère S. Tout revient à déterminer la section faite dans la sphère par le plan auxiliaire, et, il faut choisir ce plan pour que les constructions soient aussi simples que possible » (31).

Dans le cas particulier où la droite qui coupe la sphère est une horizontale ou une frontale donnée (32), la construction est simple. « Le plan projetant horizontalement la droite (soit une frontale (ab, a' b') est le plan de front ab ; ce plan coupe la sphère donnée suivant une parallèle de front projeté horizontalement suivant le segment cd et verticalement suivant le cercle de diamètre c' d'. Or, ce parallèle rencontre la droite (ab, a' b') aux deux points projetés, verticalement en m' et n' que l'on rappelle ensuite en m et n sur ab. Ces points (m, m'), (n, n') sont par conséquent ceux où la droite rencontre la sphère » (33).

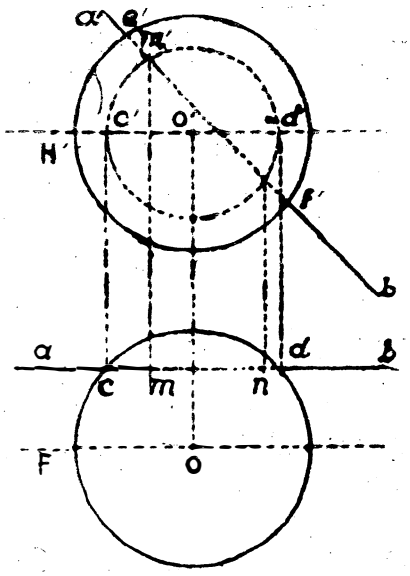


Fig.15

S'il s'agit de « déterminer les points d'intersection d'une droite quelconque avec une sphère définie par ses contours apparents », on peut « ramener ce problème au précédent en rendant la droite de front par un changement de plan vertical ; pour cela, il suffit de prendre comme nouveau plan vertical de projection un plan parallèle au plan vertical ab projetant horizontalement la droite » (34).

Et, « au lieu de faire un changement de plan vertical, on

(31) **T. Chollet et P. Mineur.** « Traité de géométrie descriptive (à l'usage des élèves de mathématiques et des candidats au ... calauréat et aux écoles). IIe partie », pp. 90-91.

(32) **T. Chollet et P. Mineur.** Même ouvrage, p. 92.

(33) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, pp. 92-93.

(34) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 92.

aurait pu employer un rabattement » (35). Une autre construction, que nous ne reproduirons pas, fait aussi intervenir un rabattement (36). Mais il est un troisième problème, consistant à chercher l'« intersection d'une sphère avec une droite dont l'une des projections passe par la projection de même nom du centre de la sphère ; dans ce cas particulier, une rotation est préférable à un changement de plan ou à un rabattement parce qu'elle n'exige que des constructions plus simples » (37).

C'est donc une préoccupation constante de simplicité qui porte le mathématicien à préférer une construction à une autre, c'est-à-dire, en somme, une méthode à une autre, dans la détermination, des éléments géométriques d'une figure sur une épure. Et quand plusieurs méthodes sont données, et que l'une est tout de même, notée, en tant qu'aboutissant à des constructions plus simples, il faut voir là, de la part du mathématicien, une recommandation en faveur de cette méthode, un conseil de l'appliquer de préférence. Nous avons vu, par exemple, plus haut (38), que T. Chollet et P. Mineur signalent, entre autres, une méthode pour la détermination des angles de deux plans, utilisant le théorème selon lequel ces angles « sont égaux aux angles des perpendiculaires ME et MF menées à ces plans par un point quelconque M, de l'espace » (39). Le fait, pour les auteurs, d'ajouter : « Les constructions auxquelles conduit cette nouvelle méthode sont généralement plus simples que les précédentes » (40), n'est pas seulement, de leur part, une banale constatation. Cela équivaut à la recommandation au lecteur : « Si vous avez, dans quelque problème, à déterminer les angles de deux plans, pensez, à cet effet, à utiliser de préférence la méthode que nous venons de vous décrire, la méthode basée sur le susdit théorème ».

Enfin, un autre exemple de l'usage que le mathématicien fait de la notion de simplicité, apparaît dans le choix des

---

(35) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 93.
(36) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 94.
(37) **T. Chollet et P. Mineur.** Idem, p. 95.
(38) Voir plus haut, p. 16.
(39) **T. Chollet et P. Mineur.** « Traité de géométrie descriptive » (déjà cité), Ire partie, p. 201.
(40) **T. Chollet et P. Mineur.** Même ouvrage, p. 201.

définitions qu'il donne des objets sur lesquels il spécule, des « êtres mathématiques ».

Les définitions mathématiques, à première vue, du moins, ne se ressemblent pas. Il en est beaucoup que l'on pourrait appeler des définitions par le genre prochain et la différence spécifique, suivant l'expression classique, — tout en reconnaissant le bien fondé des observations de Liard (41) sur la modification de sens que subissent des mots « genre » et « différence spécifique », quand on passe des sciences de la nature à la géométrie. Dans de telles définitions, on énumère des propriétés du défini, juste ce qu'il faut pour le caractériser, tout en permettant, par le raisonnement, de dégager peu à peu ses autres propriétés. On dira, par exemple qu'« un triangle est un polygone de trois côtés » (42) ; qu'un « losange est un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux » (43), qu'un « rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits » (44), pour ne parler que quelques-unes des plus élémentaires définitions géométriques. Et ceci voudra dire que le triangle possède toutes les propriétés qui sont communes à tous les polygones, plus certaines propriétés spéciales, qui découlent de ce qu'il a, lui, trois côtés ; que le losange possède toutes les propriétés qui sont communes à tous les quadrilatères, plus certaines propriétés spéciales, qui découlent du fait que ses quatre côtés sont égaux, etc... On dira, de même, qu'« on appelle nombre premier un nombre qui n'admet pas d'autre diviseur que lui-même ou l'unité » (45), c'est-à-dire qu'un nombre premier jouit de toutes les propriétés générales des nombres, et en plus, de certaines propriétés spéciales résultant, pour lui, de la particularité qu'il présente touchant sa divisibilité.

Dans d'autres définitions mathématiques, le « genre prochain » et la « différence spécifique », ne peuvent, semble-t-il, vraiement apparaître que grâce à une subtilité d'analyse. La définition est l'indication de la manière de construire le défini. Telle est, par exemple, celle-ci : « Une fraction est une

---

(41) **Liard.** « Définitions géométriques et définitions empiriques », p. 76.

(42) **Carlo Bourlet.** « Cours abrégé de géométrie, I », p. 14.

(43) **Carlo Bourlet.** Même ouvrage, p. 173.

(44) **Carlo Bourlet.** Idem, p. 174.

(45) **M. Royer.** « Arithmétique (des Ecoles primaires supérieures) », p. 157.

notation qui indique combien une grandeur à mesurer contient de parties aliquotes de l'unité principale » (46).

Telle encore, la définition de la dérivée d'une fonction : « Etant donnée une fonction f (x) définie dans un certain intervalle, si, x_0 et x étant deux nombres de cet intervalle, le quotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tend vers une limite m, quand x tend vers le nombre fixe x_0, on dit que la fonction f (x) admet une dérivée pour la valeur x_0 de la variable, et que cette dérivée est égale à m » (47).

Telles encore les définitions, données par le même auteur des lignes trigonométriques d'un arc : « Considérons un cercle orienté de centre O. Prenons comme unité de longueur le rayon du cercle. Soit M l'extrémité de l'arc d'origine A et de valeur algébrique a. Traçons le diamètre qui passe par l'origine de l'arc et prenons comme sens positif sur cette droite, celui de O vers A ; soit x'x l'axe ainsi obtenu. Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité M de l'arc sur x'x. On appelle cosinus de l'arc a la valeur algébrique du vecteur OP. On écrit :

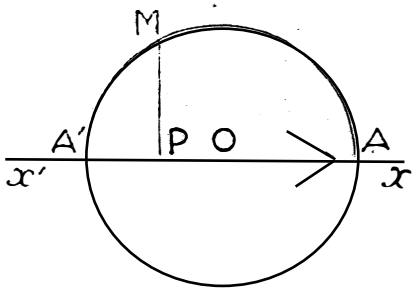


Fig.16

$$\cos a = \overline{OP} \text{ .» (48)}$$

Les définitions du sinus et de la tangente sont analogues à celle-ci (49). Les trois autres lignes trigonométriques sont définies chacune, comme l'inverse de chacune des précédentes (50).

Si l'on y regarde bien, il semble que toutes les définitions mathématiques y compris celles dont nous parlions tout à l'heure, peuvent être considérées comme exprimant la manière dont on construit le défini.

---

(46) **M. Royer.** Même ouvrage, p. 174.
(47) **H. Commissaire.** « Trigonométrie et compléments d'algèbre. (Première C et D) », p. 197.
(48) **H. Commissaire.** Idem, p. 13.
(49) **H. Commissaire.** Idem, pp. 13-14.
(50) **H. Commissaire.** Idem, p. 15.

Or, un « objet » mathématique, du moins la plupart du temps, peut être construit de plusieurs façons. Il faut en adopter une. Il est intéressant de noter que, parmi les considérations qui peuvent justifier le choix du mathématicien, celles qui émanent d'un souci de simplicité, d'une préférence accordée à ce qui est « simple », ne sont pas les moindres.

1° C'est, semble-t-il tout d'abord, la définition lui permettant de construire l'objet le plus simplement possible, qu'adopte le mathématicien.

Reprenons l'exemple du triangle. On définit, disons-nous, ordinairement cette figure, comme « un polygone de trois côtés ». On tire de là, progressivement, en s'appuyant sur les axiomes fondamentaux de la géométrie et sur les théorèmes déjà démontrés, une foule de propriétés caractéristiques du triangle. Toutes ces propriétés « se tiennent » entre elles ; se déduisent les unes des autres, se démontrent les unes par les autres. Pour s'en persuader, il suffirait d'ouvrir un traité relatif au triangle, où soient exposées les principales d'entre elles (51). Mais il serait erroné de croire qu'elles se tiennent unilinéairement, c'est-à-dire que tel ordre de succession qu'on a pu leur donner soit l'ordre unique ; que, de l'une quelconque d'elles, « on ne puisse passer logiquement qu'à deux autres propriétés, savoir : par une déduction progressive à celle qui en résulte, et par une déduction régressive (analyse), à celle dont elle résulte » (52). Leur ensemble forme, pour reprendre une image qui est encore de M. Goblot, plutôt un réseau qu'un peloton de fil ; « il y a beaucoup de manières de passer d'une maille à l'autre » (53), et il est possible, en partant d'une maille quelconque — pourvu qu'elle constitue une propriété caractéristique (54) — de passer à toutes les autres. Cela une fois admis, la propriété par laquelle on définit le triangle (celle, pour lui, d'avoir trois

---

(51) Par exemple les « Relations entre les éléments d'un triangle ». Recueil de 273 formules relatives au triangle, avec leurs démonstrations. Paris, Librairie Vuibert, 1925.

(52) **Edmond Goblot.** « Traité de Logique », p. 107, § 68

(53) **Edmond Goblot.** Même ouvrage, pp. 107-108.

(54) Il faut en effet qu'elle soit caractéristique. Il ne faudrait pas dire par exemple du triangle : polygone dont l'aire est égal au produit du demi périmètre par le rayon du cercle inscrit. Car ceci est vrai de tous les polygones dans lesquels s'inscrit un cercle.

côtés), n'est donc « initiale » que plus ou moins arbitrairement. Logiquement, on aurait pu, semble-t-il, décider, d'en adopter une autre comme « initiale ».

On aurait pu, en effet, définir le triangle comme : « un polygone dont la somme des angles est égal à deux droits », ou comme « un polygone dont le produit du rayon du cercle qui lui est circonscrit, par le rayon du cercle qui lui est inscrit, est égal au quotient du produit des longueurs de ses côtés par son double périmètre » ; ou encore, comme « un polygone dont la somme des sinus des angles est égale à quatre fois le produit des cosinus des angles moitié », etc... On aurait pu se servir de n'importe quelle autre formule applicable parmi les polygones, au triangle seulement. Une telle formule est, apparemment, toujours suffisante pour fournir, dans une définition qui, d'abord, pose qu'un triangle est un polygone, la « différence spécifique », indispensable pour le caractériser.

Mais, la plupart des définitions ainsi formées, seraient d'une complication extrême. Il suffit de jeter les yeux sur ce qui précède, pour s'en rendre compte. Aucune ne serait aussi simple que celle que les mathématiciens ont adoptée, la plus « naturelle » diraient-ils : un triangle est un polygone de trois côtés.

Il serait facile de montrer que toutes les fois qu'il existe d'un objet mathématique une définition particulièrement simple en elle-même, nettement beaucoup plus simple que toutes les autres définitions, logiquement possibles, du même « objet », c'est cette définition-là que les mathématiciens choisissent pour introduire dans l'exposé de la science, cet « objet ». Il s'agit avant tout, en mathématiques, comme dans les autres domaines de la science, de bien savoir de quoi l'on parle. Et on le saura d'autant mieux semble-t-il, que l'on pourra plus simplement le concevoir, à partir d'une définition simple.

Toutes les définitions, logiquement possibles, mais par trop compliquées, d'objets mathématiques, sont ainsi éliminées d'avance — « éliminées » sans que le mathématicien ait la peine d'en faire un triage : elles ne se présentent même pas à son esprit. Il est bien évident que personne ne songerait à définir le triangle comme « un polygone tel que le produit du rayon du cercle qui lui est circonscrit par le rayon du cercle qui lui est instruit, est égal au quotient du produit des

longueurs de ses côtés par son double périmètre », voire même, seulement, comme « un polygone dont la somme des angles est égal à deux droits », ce qui serait, comparativement, déjà beaucoup moins compliqué.

2° Mais si la définition mathématique sert, avant tout, à construire le défini, à concevoir clairement l'objet dont on parle, elle sert aussi à « démontrer » les diverses propriétés de cet objet, à en faire la « théorie ». Une bonne définition, a dit Henri Poincaré, — et c'est là, en lui, le mathématicien qui parle, — c'est celle qui sert dans les démonstrations.

Le mathématicien, avons-nous vu dans de nombreux exemples, recherche la simplicité dans les démonstrations, préfère les démonstrations « simples ». Il semble bien que le souci de mettre le plus simplement possible en évidence les propriétés du défini, ne soit pas étranger au choix qu'il fait d'une bonne définition.

Il est vrai que, quelle que soit la définition adoptée, et fut-elle l'une des plus compliquées, il se trouvera toujours quelque démonstration qui découle très simplement d'elle. Mais deux remarques s'imposent :

a) La propriété de l'objet mathématique qu'énonce une définition compliquée de cet objet, servirait tout aussi bien à la dite démonstration, si elle est énoncée sous forme de théorème. Les propriétés qui découlent « simplement » d'elle, découleraient toujours « simplement » d'elle.

b) Si la plupart des démonstrations relatives à un objet mathématique déterminé, supposent connue quelqu'une de ses propriétés fondamentales, il faudra, si on ne se sert pas de cette propriété pour le définir, l'utiliser comme théorème. Mais, pour qu'il y ait avantage à la prendre comme théorème, plutôt qu'à s'en servir pour définir l'objet, il faut, semble-t-il, que l'on puisse la démontrer, à partir de la définition adoptée, plus simplement qu'on ne pourrait démontrer la propriété énoncée dans cette définition, à partir de la première.

Or, il est net, dans le cas du triangle, que la démonstration classique de sa propriété d'avoir la somme de ses angles égale à deux droits, est plus simple que celle que l'on peut imaginer en vue d'établir, à partir de cette propriété prise comme le définissant, qu'il a trois côtés seulement.

Nous avons vu que souvent le mathématicien préfère, pour raison de simplicité une démonstration géométrique à tout autre, et que cette simplicité tient, au moins en partie, à la

présence d'une figure. La figure peut n'avoir, en soi, pas d'importance. Les « réalités » scientifiques sur lequel le mathématicien raisonne « existeraient », peut-on dire, sans qu'elles soient représentées par un tracé. Mais l'importance de la figure quant à la simplicité des démonstrations est incontestable. Son seul aspect suggère immédiatement à l'esprit certaines égalités, ou certaines combinaisons fécondes d'angles ou de lignes, qui jettent sur l'ensemble de la démonstration un jour inattendu. Dans la démonstration classique de l'égalité de la somme des angles d'un triangle, à 2 droits, on utilise, on sait, l'égalité des angles alternes-internes (ici BCA = CAE) et des angles correspondants (ici $\widehat{CBA} = \widehat{EAD}$) par rapport à deux parallèles (ici BC et AE, parallèles par construction) coupées par une sécante (ici CA). Le seul tracé de la figure suggère l'idée de cette égalité et le théorème s'en trouve démontré.

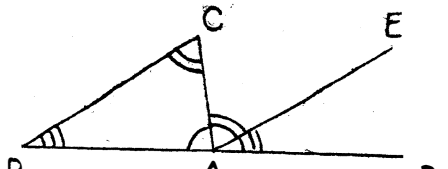


Fig. 17

Il est douteux que l'on arrive aussi simplement à démontrer, à partir de sa définition comme « polygone dont la somme des angles est égale à deux droits », que le triangle a trois côtés. Surtout qu'il faudra se garder, en tentant cette mise en évidence, de s'appuyer sur quelque propriété des polygones, démontrée, telle que nous la connaissons, par la généralisation de nos connaissances sur le triangle, et présupposant, par suite, que l'on sait déjà qu'un triangle est un polygone de trois côtés.

En un mot, il paraît certain que les mathématiciens, qui définissent les objets sur lesquels ils spéculent, le plus simplement possible, cherchent aussi à les définir de manière à rendre le plus simple possible, les démonstrations qui ont trait à ces objets.

Le cas de la définition semble ainsi réunir les observations que nous avons pu faire jusqu'ici sur l'usage que font les mathématiciens de la notion de simplicité, d'une part, dans les formules qu'ils emploient, et d'autre part, dans les constructions, les solutions de problèmes, les démonstrations auxquelles ils procèdent. Car, une définition, c'est, dans une certaine mesure, une formule. C'est, tout au moins, une expres-

sion verbale, une phrase. Et cette expression a pour but de faire concevoir un « objet » mathématique dans toute sa clarté, c'est-à-dire, d'abord, de le construire, puis, de le connaître. D'un côté comme de l'autre nous voyons, de la part du mathématicien, une inclination très nette pour tout ce qui revêt le caractère de simplicité. Un souci de simplicité lui fait choisir entre les formules qu'il sait également vraies, les constructions, les solutions, les démonstrations, les définitions qui, du point de vue d'une logique rigoureuse, lui apparaissent, ou pourraient lui apparaître, comme également possibles.

CHAPITRE III

LA NOTION DE SIMPLICITE SEMBLE GUIDER LE MATHEMATICIEN

La préférence accordée, par le mathématicien aux constructions, aux démonstrations, comme aux formules les plus simples, serait déjà suffisante pour susciter la curiosité à l'égard de ce que peut être, pour lui, la notion de simplicité. Mais il semble, à l'examen, que le rôle que cette notion joue, en mathématiques, ne se borne pas à ce que, jusqu'ici, nous avons pu dire.

Il semble que, non seulement la notion de simplicité incline le mathématicien, en présence de deux ou plusieurs méthodes, constructions, ou définitions possibles, à en préférer certaines, mais que, dans la recherche même des solutions, c'est-à-dire, dans son travail d'invention créatrice, elle lui serve, jusqu'à un certain point, de guide.

Nous en avons entrevu déjà un exemple dans ces artifices de calcul conduisant à une résolution plus simple de certains systèmes d'équations du premier degré à plusieurs inconnues (1). Là, une résolution différente (par la méthod· générale) reste possible. Mais tel paraît être, dans ses démarches, le rôle de l'idée de simplicité en tant que fil conducteur, que le mathématicien ne s'y arrête même pas. Dès que la forme du système lui en suggère l'intérêt, c'est-à-dire dès qu'il sent qu'une résolution plus simple que l'ordinaire est possible, il invente, l'artifice plus ou moins ingénieux, le « truc » nécessaire, d'où sortira la résolution préférée avant d'être comme. Si, par exemple, le système est de la forme

$$\begin{cases} x + y = a & (1) \\ y + z = b & (2) \\ z + x = c & (3) \end{cases}$$

(1) **Carlo Bourlet et J. Desbrosses.** « Algèbre 1re, 2e et 3e années », p. 118. Déjà cité.

il aura immédiatement l'idée qu'en additionnant ces équations membre à membre, il s'engage sur une voie qui lui permet de résoudre le système beaucoup plus simplement que par l'application de l'une des méthodes générales. On peut dire, dans ce cas, comme dans tous les cas analogues, que l'idée de simplicité le « guide ».

Le choix des définitions semble être, chez le mathématicien, encore plus inconscient. En effet, les définitions trop compliquées, ou conduisant à des démonstrations trop compliquées s'éliminent d'elles-mêmes. L'esprit ne s'y arrête pas. Et, parmi celles qui, à la rigueur, pourraient être employées, il est bien rare qu'il n'y en ait pas, en général, une, qui s'impose avec une force toute particulière, qui paraît, tout de suite, « la plus naturelle », à celui qui a le sens mathématique (2). On peut dire que, là encore, la notion de simplicité a un rôle directeur. C'est grâce à elle que le mathématicien trouve la « meilleure » définition. Mais, se bornât-elle à éliminer les mauvaises, que l'on aurait déjà le droit, de voir en elle un guide. Ecarter l'esprit des fausses voies ne conduisant qu'à l'obscurité à force de complication, c'est déjà, n'est-il pas vrai, le diriger.

On la retrouve, cette notion, avec ce rôle, dans la recherche de bien des problèmes, soit en géométrie soit en algèbre.

Nous avons parlé de la recherche du lieu géométrique de points qui se déduisent, par un procédé simple, d'autres points variables (3). On cherche le lieu de ces autres autres points, car il est généralement plus simple que le premier. C'est donc le souci de la simplicité dans la recherche, qui sert, là, de fil conducteur. De même, supposons que nous cherchions le lieu géométrique (L) d'un point variable M. « Si nous faisons une inversion de la figure proposée, dans laquelle le lieu (L') du point M', inverse de M, est évident ou facilement connaissable, il s'ensuivra que le lieu (L) nous sera connu en même temps que (L') (4).

C'est, évidemment, là encore, guidés par l'idée du maximum de simplicité que nous procédons à une inversion. C'est la simplicité du lieu L' du point variable M', inverse de M,

---

(2) Voir plus haut, p. 52.

(3) **R. Javelot.** « Comment résoudre les problèmes de géométrie élémentaire ? », p. 106. Déjà cité.

(4) **R. Javelot.** Même ouvrage, p. 133.

qui nous incite à cette démarche. Mais ce n'est pas tout : « On fera bien, généralement, de choisir le pôle d'inversion de manière que le plus grand nombre possible d'éléments se transforment en droites ou en plans, car alors le problème transformé sera beaucoup plus simple » (5).

Non seulement l'idée de la simplicité qui en résultera pour la solution du problème, nous pousse à faire une inversion de la figure proposée, mais elle nous est encore un guide en ce qui concerne la manière de faire cette inversion. Le choix du pôle d'inversion (élément essentiel), d'où dépendra toute la suite du raisonnement, est dirigé par elle.

Elle est, toujours à cause de ce même rôle qu'elle joue pour lui, précieuse au mathématicien dans les problèmes où il doit construire une figure. Il arrive souvent que cette figure soit facilement constructible à partir d'une autre plus simple. Dans ce cas « on essaiera de ramener la question à une autre plus simple, d'où le nom de méthode de substitution » (6). Soit, par exemple trois droites données, Ox, Oy, Oz issues d'un même point, et un point M pris sur l'une d'elles, Oy ; on demande de mener par ce point une sécante qui sort divisée par les trois droites en deux parties égales.

« La droite serait déterminée, si l'on connaissait le point B par exemple, et le point B lui-même serait connu si l'on savait sa distance au sommet O. Or M est le milieu de AB ; la parallèle à Ox. menée par M, coupe donc OB en son milieu P, d'où : $OB = 2\,OP$, c'est-à-dire : $PB = OP$. D'où la construction : mener par M le parallèle à Ox, qui coupe Oz en P ; prendre $PB - OP$; joindre BM qui coupe Ox en A. La droite PM étant parallèle à Ox et passant par le milieu de OB, passe alors par celui de AB ; donc $MA = MB$ » (7).

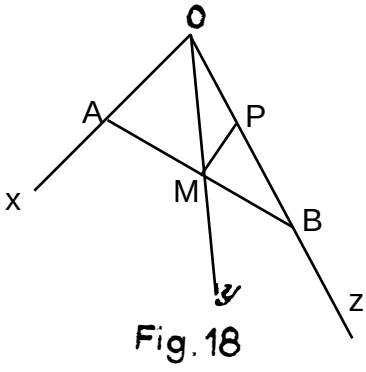


Fig. 18

On voit comment, dans ce problème, le chercheur est constamment renvoyé d'une question à l'autre, par le seul fait de la plus grande simplicité de cette dernière ; cette idée de plus

(5) **R. Javelot.** Idem, p. 134.
(6) **R. Javelot.** Idem, p. 145.
(7) **R. Javelot.** Idem, p. 145-146.

grande simplicité, l'amène, de proche en proche, à s'arrêter, parmi les questions suscitées les unes après les autres, à la dernière et à la traiter, — ici, à mener par un point extérieur à une droite donnée, une parallèle à cette droite. De là, il passe aux autres, une à une, toujours en commençant par la plus simple, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à la solution demandée. La notion de simplicité le guide d'un bout à l'autre de la construction, et du raisonnement qui fait corps avec elle.

Mais la méthode employée ici, la méthode dite de substitution « ne s'applique pas seulement aux questions de constructions ; c'est évidemment, un mode général de notre pensée ; la substitution n'est utile que si elle aboutit à une question plus simple, c'est-à-dire si elle est réductrice » (8).

Nous trouverions, de la vérité de cette remarque, de nombreux exemples en algèbre, dans la manière dont se résolvent les équations. Ces exemples illustrent tous le rôle directeur que paraît avoir, pour le mathématicien, l'idée de simplicité. Toutefois, dans la résolution des équations les plus élémentaires — de l'équation $ax + b = o$, par exemple, — son rôle n'apparaît pas. Il n'y a là, semble-t-il, de la part du chercheur, ni choix ni artifice quelconque, au sujet duquel il puisse être, en quelque manière, dirigé. Le passage de la formule de l'équation du premier degré à une inconnue, $(ax + b = o)$, à celle qui indique la valeur de x par rapport aux quantités connues a et b $(x = -\frac{b}{a})$, par l'intermédiaire de la formule équivalente $(ax = -b)$, atteint sans calculs, sans combinaisons spéciales et comme tout naturellement, son maximum de simplicité. Il n'y a pas moyen de tirer autrement la valeur de x de la formule initiale que par la transformation immédiate de celle-ci en $ax = -b$, transformation résultant de l'application des règles les plus élémentaires du calcul algébrique, et où il n'entre aucune formule auxiliaire.

Il en serait de même de la résolution des équations du premier degré plus compliquées, à deux, trois... n inconnues. Sauf qu'ici, le choix réapparait quand il s'agit de résoudre un

(8) **Ph. Chaslin.** « Essai sur le mécanisme psychologique des opérations de la mathématique pure », p. 144.

problème, surtout si les coefficients qui traduisent l'énoncé sont des nombres déterminés et non plus des lettres désignant un nombre « supposé connu ». Selon ce qu'est l'énoncé, selon ce que sont ces coefficients, l'une des méthodes de résolution que l'on sait (soit celle « par élimination » soit celle « par substitution ») amènera plus simplement la formule finale cherchée, l'expression des inconnues. C'est à cette méthode-là que l'on s'adressera, comme étant, dans ce cas, la plus simple. Mais, dans la résolution générale, dans la « théorie de l'équation » du premier degré, fût-elle à plusieurs inconnues, il n'y a pas, à proprement parler, de considérations de simplicité qui entrent en jeu, pas de rôle directeur de la part de la notion que nous examinons.

Cela change si nous en venons à l'étude de l'équation classique du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Là, « on ne peut pas se contenter de transformations immédiates comme pour le premier degré, mais il faut adjoindre à l'équation certaines fonctions des coefficients, habilement choisies » (9).

Soit en effet l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

On procède à une première transformation en faisant « disparaître » le terme a, c'est-à-dire en l'égalisant à 1. On obtient

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

C'est-à-dire $x^2 + px + q = 0$, si l'on convient que

$$p = \frac{b}{a} \text{ et } q = \frac{c}{a}.$$

C'est toujours la même équation, écrite sous une autre forme : forme plus simple, d'un côté (une opération de moins s'y trouve indiquée), moins simple si on considère le « sens » des lettres p et q. Mais il faut en algèbre, oublier le sens qu'on attache aux symboles et ne voir que leur enchaînement.

C'est désormais notre équation ainsi transformée qui va servir de point d'appui à la théorie de sa résolution. Mais on ne peut tirer, sans un artifice, la valeur de x de

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (2).$$

(9) **Ph. Chaslin**. « Essai sur le mécanisme psychologique des opérations de la mathématique pure », p. 144.

L'équation, sous cette forme n'est pas encore assez simple pour que la valeur de l'inconnu s'en déduise immédiatement.

L'artifice que nous employons consiste à faire intervenir la quantité $\frac{p}{2}$ et son carré $\frac{p^2}{4}$. On ne comprend pas à première vue pourquoi. C'est un « truc habile ». Posons que

$$x + \frac{p}{2} = y \qquad \text{et que} \qquad \frac{p^2}{4} - q = k$$

Ceci nous permet (grâce à une nouvelle complication dans le sens des symboles employés), d'écrire, sous une forme encore plus simple, l'équation (2), c'est-à-dire l'équation (1), puisqu'elle lui est équivalente

En effet, si $x + \frac{p}{2} = y$, on a :

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2$$

C'est-à-dire $\quad x^2 + 2\frac{xp}{2} + \frac{p^2}{4} = y^2$

et, puisque $\frac{p^2}{4} - q = k$,

$$y^2 - k = 0 \qquad (3)$$

(c'est-à-dire : $x^2 + xp + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0$, ce qui n'est autre que l'équation (2) elle-même équivalente à l'équation (1).

D'où l'on tirera : $y^2 = k$, et par suite $y = \sqrt{k}$.

Nous rappelant alors quel sens nous avons attaché à ces lettres par rapport au contenu des symboles de l'equation (1), nous dirons que x est égal à : $y - \frac{p}{2}$ (ou $y - \frac{b}{2a}$) ; ce qui nous donnera, suivant que $\sqrt{k}$ est positif ou négatif, les deux formules connues des deux racines

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ c'est-à-dire } x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ c'est-à-dire } x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

L'important, c'était d'amener l'équation (1) à la forme (3). Il a fallu « choisir habilement certaines fonctions des coefficients » — ici $\frac{p^2}{4}$ et $\frac{p}{2}$, y et k — et « les faire entrer dans les opérations indiquées par l'équation, mais de telle sorte — (ceci est important) — que cette équation soit *la même* sous une *autre forme* (10). On ne peut rien changer des relations entre les données et l'inconnue. L'addition, dans les deux membres, de $\frac{p^2}{4}$ n'altère pas ces relations mais seulement leur forme. Cette adjonction a pour but de ramener cette équation à une autre plus simple, et résoluble, uniquement par une extraction de racine.

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q,$$

équivaut à

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

et, *est résoluble immédiatement,* puisqu'elle est équivalente à

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad .»$$

On voit ici quel rôle tout à fait primordial joue dans la théorie de la résolution de l'équation du second degré, la notion de la simplicité ; 1° de l'équation à laquelle (sans la connaître encore) on tâche de ramener la « première », celle dont on fait la théorie.

2° Du passage de l'équation initiale à celle-là, et de celle-là à la formule finale d'où l'on tirera l'inconnue en fonction des coefficients (c'est-à-dire, du passage de la formule initiale à la finale, puisque la formule « simplifiée » n'est qu'une transformation de l'initiale qui lui est équivalente, et un intermédiaire d'où la finale sort automatiquement, pour ainsi dire).

Il ne s'agit pas, ici (ni ailleurs, à proprement parler) de choisir, entre plusieurs voies actuellement envisagées, menant toutes à la formule finale, la plus simple ; ni de choisir entre plusieurs équations « intermédiaires », toutes équiva-

(10) C'est nous qui soulignons.

lentes à la première, et dont on aurait actuellement l'idée, la plus simple. Il s'agit (comme ailleurs), d'un choix inconscient, comme instinctif, du mathématicien, d'une recherche plus ou moins tâtonnante tout au long de laquelle, l'esprit est hanté, d'abord par l'idée d'une formule simple, et par cela féconde, dont les éléments soient fonction des coefficients de l'équation à résoudre, puis par l'intuition (qui est une certitude), que, plus on arrivera directement à une telle formule, et plus on en pourra directement tirer l'inconnue, plus la théorie imaginée sera bonne. C'est, en vue de la plus grande simplicité de la formule cherchée (de l'équation « intermédiaire »), et en vue de la plus grande simplicité de la théorie elle-même, c'est-à-dire du passage de l'équation donnée à l'intermédiaire et de celle-ci à la formule finale), que l'on choisit les « certaines fonctions des coefficients » que l'on adjoint à l'équation donnée, par un artifice dont le sens, au premier abord, échappe à celui qui étudie « après coup » la théorie. Ce choix-là non plus n'est pas un choix conscient. Les fonctions différentes des coefficients, que l'on aurait pu adjoindre, ne sont pas là, toutes présentes à l'esprit, toutes connues. Et, c'est en partie, ce qui, à celui qui examine la théorie du dehors, communique cette impression d'arbitraire. Pourquoi faire intervenir $\frac{p}{2}$ et $\frac{p^2}{4}$ plutôt qu'autre chose ? Parce que l'intervention de $\frac{p}{2}$ et $\frac{p^2}{4}$ dans la théorie permet, « très simplement », de ramener l'équation $ax^2 + bx + c = o$ à la forme $y^2 - k = o$, forme « très simple », de laquelle, « très simplement » encore, sachant ce que c'est que y, on tirera les valeurs de x, qui sont, dans la pratique, ce qu'il y a de plus intéressant. — Mais comment a-t-on prévu cela ? — C'est là, semble-t-il, le propre du vrai mathématicien que de sentir, de « deviner », les artifices les plus directement féconds et de les employer à dessein. Tout le monde ne peut pas préjuger dans « quelle » voie il faut chercher le maximum de simplicité que l'esprit réclame, avec des chances de le rencontrer. Mais il suffit d'examiner les travaux des mathématiciens pour se rendre compte, à la réflexion, combien impérieusement l'esprit le réclame.

Il n'est pas dit d'ailleurs qu'invariablement il doive être satisfait, du premier coup. Une théorie, analogue à celle que nous venons d'examiner, est édifiée grâce à l'emploi d'un

« truc habile », pour reprendre l'expression de P. Chaslin. Il est à croire que, si quelque mathématicien imaginait un autre « truc », permettant d'approcher de plus près l'idéal de simplicité, qui est l'une des « causes finales » de la recherche, on abandonnerait la théorie existante pour la nouvelle, en déclarant le second artifice, encore plus « habile » que le premier. On a dû, sans doute, quelque peu tâtonner, avant d'aboutir à ce que nous venons d'exposer, avant de penser à adjoindre à la formule (2), équivalente à l'équation initiale, $\frac{p^2}{4}$.

Toutefois, du moins dans le cas de l'équation du second degré, il semble qu'il soit difficile d'atteindre, et une formule intermédiaire plus simple que $y^2 = k$, et un enchaînement de transformations plus simple que celui que permettent, d'une part l'adjonction de $\frac{p^2}{4}$ à l'équation (2), d'autre part la convention qui fixe le sens de y et de k. Il semble qu'il arrive un moment où « simplifier » davantage est impossible, et qu'à ce moment là, la théorie de « résolution » dont il s'agit quelle qu'elle soit, touche à sa perfection.

Il y a encore, en algèbre, une catégorie de cas particulièrement intéressants, et dans lesquels on voit très nettement l'idée de simplicité guider le mathématicien au cours de sa recherche. Ce sont les cas où, pour résoudre une équation, « on fait appel à une équation auxiliaire, dont les racines sont fonction de celles de la proposée, de telle sorte que cette équation auxiliaire puisse être résolue » (10). C'est là, pour Serret, une méthode très générale, à laquelle reviennent non seulement les méthodes connues de résolution algébrique des équations, mais encore « nécessairement, celles qu'on pourrait inventer » (12). C'est, au fond, une application à l'algèbre de la « méthode de substitution », « méthode générale de pensée » (13) dont nous avons vu, chez Javelot, l'usage en géométrie.

L'équation du second degré peut être résolue ainsi « en déterminant la fonction $x_1 - x_0$ de ses deux racines. Le

(11) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 144.
(12) **Serret.** « Cours d'Algèbre supérieur », tome II, p. 482.
(13) **R. Javelot.** Ouvrage cité, p. 145.

carré de cette fonction est une fonction symétrique, et, sa valeur étant connue, la résolution de l'équation en résulte par l'extraction d'une racine carrée » (13).

L'équation auxiliaire, dont les racines sont fonction de celles de la proposée, est appelée équation résolvante ; et la fonction (des racines de la proposée), qui doit servir, par le moyen de permutations de racines, à calculer les racines de l'équation auxiliaire, est dite fonction résolvante.

Dans le procédé de résolution que nous venons d'examiner, nous avons vu que l'équation en laquelle il s'agissait de transformer la proposée pour pouvoir la résoudre directement, était la plus simple possible, et que la transformation devait être, elle aussi, la plus simple possible. D'autre part, la simplicité de l'équation intermédiaire (qui là n'était pas une équation auxiliaire, mais une équation « équivalente » à la proposée), est nécessaire à la déduction directe de l'inconnue, donc à la simplicité de la théorie dans son ensemble.

Quant à la fonction des coefficients à adjoindre à l'équation proposée pour la transformer en une équation de forme plus simple, il importe peu qu'elle soit simple ou non.

Ici, pour que la fonction résolvante soit utilisable « elle doit d'abord être la plus simple possible » (14), et l'équation résolvante de même, d'ailleurs. Ceci est conforme à l'esprit de la méthode générale de substitution que nous venons de rappeler. Si, en effet, on était obligé, pour résoudre l'équation dite résolvante, de faire appel, par exemple, à une nouvelle équation auxiliaire, et à de nouveaux détours, on ne voit pas quel intérêt présenterait la méthode. Quitte à résoudre une équation auxiliaire aussi compliquée que la proposée, autant résoudre la proposée directement. Et si, pour la proposée, « il n'y a pas moyen », il n'y aura sans doute pas moyen non plus pour l'auxiliaire, si elle est du même type, ou d'un type plus compliqué encore. Il est donc nécessaire que l'équation résolvante soit la plus simple possible. Le mathématicien est dirigé dans la recherche de cette équation essentielle, par le fait qu'il sait cela.

Pour entrer dans un peu plus de détails, reprenons la résolution de l'équation du second degré.

---

(13) **Serret**. « Cours d'algèbre supérieur». Tome II.
(14) **Ph. Chaslin**. Ouvrage cité, p. 145.

Une équation de degré n aura, nous le savons, toujours n racines, réelles ou imaginaires. L'équation du deuxième degré, en aura deux. Soient x_0 et x_1.

Nous formons d'abord une fonction t de ces racines, qui nous donnera les racines de l'équation auxiliaire (résolvante), que nous calculerons elle-même à partir d'elles, équation de la résolution de laquelle dépend la résolution de la proposée. Nous la formons délibérément la plus simple possible, de manière que les racines de l'équation auxiliaire soient le plus directement calculées. Puis, nous choisissons ses coefficients, de telle sorte que, parmi les équations qui pourraient admettre pour racines celles qu'une fonction résolvante de ce type permet de calculer, l'équation résolvante cherchée soit la plus simple. Ce ne sont pas forcément les valeurs, apparemment les plus simples, de ces coefficients, qui donnent ce résultat. (Pas plus que, dans la résolution examinée plus haut, ce n'était les fonctions les plus simples des coefficients de l'équation proposée, qui, adjoints à celle-ci, servaient à lui donner la forme désirée, la forme la plus simple).

Mais la suite des opérations se voit de plus près sur l'exemple.

La fonction la plus simple des racines x_0 et x_1 de notre équation proposée, est une fonction linéaire. La « fonction résolvante » devra donc être de la forme :

$$t = x_0 + Ax_1$$

C'est un premier point.

Mais la détermination de la valeur du coefficient A est des plus importantes, car, selon la valeur de A, l'équation résolvante sera, à son tour, plus ou moins simple, c'est-à-dire que nous aurons plus ou moins d'intérêt à la former. On voit comme la notion de la simplicité de cette équation domine toute la recherche, et comme elle sert à diriger le mathématicien dans chacune des déterminations successives auxquelles il doit procéder. Certaines valeurs de A, qui rendraient la dite équation au moins aussi compliquée que la proposée, sont écartées d'avance.

Or, « si A est quelconque, on aura des valeurs distinctes pour t par les permutations de x_0 et de x_1, et l'on retombera dans une équation du second degré, de la même forme que

celle à résoudre, ce qui n'avancera en rien la solution » (15). La valeur « A quelconque » est donc écartée.

« Si on prend $A = 1$, on a la fonction symétrique $(x_0 + x_1)$, qui ne varie pas. En faisant $A = \alpha$, α désignant la racine négative de 1, Lagrange a formé la fonction résolvante la plus simple possible.

$$t = x_0 + \alpha x_1$$

Comme elle n'est pas symétrique, en permutant x_0 et x_1, on a une deuxième valeur :

$$t_0 = x_0 + \alpha x_1$$
$$t_1 = x_1 + \alpha x_0$$

et, comme on a, d'autre part,

$$x_0 + x_1 = -p,$$

on calcule facilement x_0 et x_1, en fonction de t_0 et t_1 :

$$x_0 = \frac{t_0 - p}{2}$$

et

$$x_1 = \frac{t_1 - p}{2}$$

Restent à calculer t_0 et t_1. Or on remarque que $t_0 = \alpha t_1$, car, si on multiplie l'expression de t_0 par α c'est comme si on permutait x_0 et x_1. Alors, l'équation résolvante est une équation binome. On sait, en effet, par la théorie des équations binomes, que, dans celles-ci, une racine quelconque est égale à une autre multipliée par une racine de l'unité. Cette équation binome est :

$$t^2 = (x_0 - x_1)^2,$$

ou

$$t^2 = x_0^2 - 2x_0x_1 + x^2$$

C'est une fonction symétrique des racines x_0 et x_1, qui est invariable par les permutations de celle-ci, tandis que, comme on l'a vu, les deux racines t_0 et t_1 sont variables par ces permutations.

Les relations, dites fondamentales, des racines x_0 et x_1 sont :

$$(x_0 + x_1) = -p$$
$$x_0x_1 = q$$

On calcule facilement, avec leur aide, les deux valeurs de t_0 et t_1 :

$$t_0 = +\sqrt{p^2 - 4q}$$
$$t_1 = \alpha t_0 = -\sqrt{p^2 - 4q}$$

---

(15) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 145.

d'où : $$x_0 = \frac{t_0 - p}{2} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_1 = \frac{t_1 - p}{2} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ce qui nous redonne les expressions que nous avions trouvées en ajoutant $\frac{p^2}{4}$ » (16).

Nous pourrions continuer et, toujours à la suite de Chaslin, dont l'exposé sur cette question paraît tout à fait clair, parler de la résolution, par la même méthode, de l'équation générale du troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

qui, comme telle, a trois racines, x_0, x_1, x_2.

On cherchera, de même que précédemment, une fonction des racines ;

$$t = x_0 + Ax_1 + Bx_2,$$

« qui puisse, par un choix judicieux de A et de B, ne pas être symétrique, et ne pas prendre, par les permutations des racines, autant de valeurs différentes que si A et B étaient quelconques. Car, s'ils étaient quelconques, le nombre de valeurs de t serait égal au nombre de toutes les permutations possibles de trois lettres ou indices, qui est 3 ! c'est-à-dire 6. L'équation en t, serait donc du sixième degré avec six racines distinctes, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, sans relations entre elles, et ce serait tomber de Charybde en Scylla ; elle serait indécomposable, irréductible. Alors, on a recours à un « truc » analogue à celui qu'on a employé pour la résolution de l'équation du second degré » (17).

On choisit, ici encore, A et B, non de sorte que leurs valeurs soient simples, mais de sorte qu'elles rendent l'équation résolvante la plus simple possible, — en tout cas plus simple que la proposée. Comme précédemment, et comme dans la première résolution de l'équation du 2e degré que nous avons vue, c'est guidé par l'idée de la simplicité de l'ensemble de la solution qu'il cherche, que le mathématicien

(16) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 146-147.
(17) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 148.

introduit ces valeurs, au premier abord, en apparence, aussi arbitraires et inutilement compliquées que la valeur $\frac{p^2}{4}$ ou la valeur α = racine négative de 1.

On forme, en effet, la fonction résolvante

$$t = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2,$$

dans laquelle α et α^2 (A et B), adaptés aux besoins de la cause, ont, respectivement pour valeur :

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \qquad \alpha^2 = \frac{-2 - \sqrt{-3}}{2}$$

Ce sont les deux racines cubiques, imaginaires, de l'équation $x^3 = 1$.

Cette fonction résolvante prend six valeurs correspondant aux permutations des racines x_0, x_1, x_2 Ce sont les six racines de l'équation résolvante que l'on peut (après des développements qui, ici répétés, ne feraient qu'alourdir cet exposé) (18), écrire sous la forme :

$$(t^3 - t_0^3)(t^3 - t_1^3) = 0$$

c'est-à-dire $\quad t^6 - (t_0^3 + t_1^3)\, t^3 + t_0^3 t_1^3 = 0$

équation du 6e degré, mais utilisable, cette fois, parce que,

---

(18) La fonction résolvante $t = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2$, n'est pas symétrique. Si on effectue la permutation circulaire x_0, x_1, x_2, elle varie, et l'on a d'abord trois valeurs distinctes. Or, en multipliant l'expression de t, par α, puis par α^2, on a trois valeurs que Ph. Chaslin appelle t_0, αt_0, $\alpha^2 t_0$, et qui sont les mêmes que celles obtenues en permutant les racines x_0, x_1, x_2. Si, maintenant, dans l'expression de t_0, on opère la transformation (x_1, x_2), on a :

$$t_1 = x_0 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_1$$

En y faisant la transposition circulaire (x_0, x_1, x_2) on a trois valeurs distinctes entre elles et des trois valeurs précédentes : de plus, elles sont les mêmes si on multiplie t_1 par α, puis par α^2. Il s'ensuit que les racines de l'équation du 6e degré, forment deux systèmes

$$t_0,\ \alpha t_0,\ \alpha^2 t_0$$

et $\quad t_1,\ \alpha t_1,\ \alpha^2 t_1$

Or on a, en élevant au cube chacune de ces expressions

$$t_0^3 = (\alpha t_0)^3 = (\alpha^2 t_0)^3, \quad \text{et} \quad t_1^3 = (\alpha t_1)^3 = (\alpha^2 t_1)^3$$

On remarquera que t_0^3 et t_1^3 sont symétriques en x_0, x_1, x_2 et invariables, par suite, par la substitution circulaire x_0, x_1, x_2, ou x_0, x_2, x_1, mais variables par la transposition x_1, x_2 par laquelle on passe d'un cube à l'autre.

(D'après Chaslin. Ouvrage cité, p. 149).

comme on le voit, si on prend t^3 pour inconnue, elle équivaut à une équation du second degré et peut s'écrire (en posant $t^3 = \theta$) :

$$\theta^2 - (t_0^3 + t_1^3)\,\theta + t_0^3 t_1^3 = 0$$

Or, « rien n'est plus facile que de calculer $t_0^3 + t_1^3$ et $t_0^3 t^3$, qui sont formés au moyen des fonctions symétriques des racines x_0, x_1, x_2, lesquelles fonctions symétriques sont directement formées avec les fondamentales, c'est-à-dire, avec les coefficients de l'équation proposée » (19).

D'à partir des valeurs de t et des relations qui lient x_0, x_1 et x_2, on déduit les valeurs des racines.

La résolution de l'équation du 4e degré :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

est plus compliquée, mais toujours basée sur la même méthode. C'est dire que la notion de simplicité joue, au même degré, un rôle directeur, dans la recherche qu'elle représente, de la part du mathématicien.

On écarte (comme dans les cas précédents) la fonction résolvante qui donnerait lieu à une équation résolvante plus compliquée que la proposée, en l'espèce, la fonction qui prendrait 4 !, c'est-à-dire 24 valeurs différentes, et sans relations entre elles, et telle que, par la permutation des racines x_0, x_1, x_2, x_3, l'équation résolvante serait du 24e degré. On forme la fonction résolvante avantageusement utilisable, par un procédé semblable à celui que nous avons rencontré dans les deux cas précédents. On fait appel, cette fois, aux racines de l'équation $x^4 = 1$, pour former la fonction

$$t = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3$$

« On arrive ainsi à former une équation résolvante du troisième degré, qu'on sait résoudre comme ci-dessus, au moyen d'un radical carré, plus un radical cubique. Mais on est obligé d'y ajouter deux autres équations du deuxième degré. Si bien que, pour établir la valeur de x, on doit, dans la suite des calculs, calculer d'abord les valeurs d'un premier radical carré, qui n'en peut prendre que deux, puis, celles d'un radical cubique, qui ne peut en prendre que trois ; en-

(19) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 150.

fin, on finit par deux autres radicaux carrés, c'est-à-dire, qui prennent deux valeurs chacun, et qui appartiennent à deux équations du deuxième degré » (20).

On a pu suivre, jusqu'ici les étapes de ce procédé de résolution des équations par la formation des fonctions résolvantes et des équations résolvantes, et voir le rôle que l'idée de simplicité y joue en tant que guide de la recherche mathématique. Comme nous le disions au début, on s'adresse toujours à la fonction résolvante la plus simple, en vue de former, par son intermédiaire, l'équation résolvante la plus simple. De la résolution de cette dernière, dépend celle de la proposée. Et sa simplicité dépend du choix des coefficients A, A et B, A, B et C, qui figurent dans les expressions $t = x_0 + Ax_1$, $t = x_0 + Ax_1 + Bx_2$, $t = x_0 + Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$, des fonctions résolvantes des équations du second, troisième, quatrième degré. Le mathématicien sait cela, et c'est ainsi qu'il est vrai que la notion de la simplicité de cette équation qu'il n'a pas formée encore, le dirige néanmoins dans son choix.

Mais vient un moment où le choix, quelqu'il puisse être, des coefficients, est inutile. On ne peut pas, par la sus-dite méthode résoudre des équations de degré quelconque. Théoriquement, rien ne nous empêcherait, il est vrai, pour le cinquième, le sixième, le septième degré..., de former des fonctions résolvantes dont les coefficients seraient les racines des équations $x^5 = 1$, ou $x^6 = 1$, ou $x^7 = 1$... etc. Mais en fait, quoi que nous fassions en ce sens, ces équations, de degré supérieur au 4e restent irrésolubles par le moyen indiqué, et cela, pour la raison que, quoi que nous fassions, l'équation résolvante que nous pourrons former restera plus compliquée, — extrêmement plus compliquée, même, — que la proposée. Et il n'y aura pas moyen de la ramener à plus de simplicité.

Resterait la question : « pourquoi » l'équation résolvante ne peut-elle pas, dans certains cas (les plus nombreux, en somme), être ramenée à une équation plus simple que la proposée ? Serons-nous conduits, de nouveau, à des considérations de simplicité, dans la réponse que nous ferons à cette question ?

---

(20) **Ph. Chaslin**, Ouvrage cité, p. 153.

Il convient ici de revenir sur un fait que nous avons signalé, sans nous y arrêter, au cours de l'exposé sur l'application de la méthode des radicaux à la résolution des équations jusqu'à celle du quatrième degré inclu : le fait que la valeur que peut prendre la fonction résolvante, et, par suite, la forme de l'équation résolvante, dépend du *groupe des permutations des racines de l'équation proposée.*

Dans la résolution de l'équation du second degré, on a obtenu la formule de la fonction résolvante « au moyen de permutations portant sur les racines x_0, x_1, de l'équation primitive, de telle sorte que cette fonction ait deux valeurs égales et de signe contraire. Or, les permutations de deux lettres sont au nombre de deux : (x_0, x_1) et (x_1, x_0). C'est un groupe au sens où on l'a défini (21) et ce groupe peut être considéré comme formé de deux sous-groupes (x_0, x_1) et (x_1, x_0), permutations qui laissent invariable la fonction $t^2 = (x_0 - x_1)^2$, On a calculé x_0 et x_1 au moyen des valeurs de t ; ce radical carré employé, ou adjoint dans les calculs, correspond au sous-groupe de la permutation identique (x, x) » (22). Le groupe des six permutations des racines de l'équation du 3e degré, permutations dont les six valeurs correspondantes de la fonction résolvante, sont celles des six racines de l'équation résolvante (du sixième degré), peut, lui aussi, comme l'a longuement expliqué Ph. Chaslin, se décomposer, d'abord en deux sous-groupes invariants (renfermant chacun les mêmes permutations), puis, de proche en proche, jusqu'au groupe unité, c'est-à-dire jusqu'à la permutation identique.

Enfin le groupe des vingt-quatre permutations des racines x_0, x_1, x_2, x_3 de l'équation du 4e degré, permet, par l'emploi de quatre radicaux successifs, de ramener l'équation résolvante (qui serait du 24e degré !), à une équation du troisième degré à laquelle on en adjoint deux du second degré, c'est-à-dire d'en rendre la résolution plus simple que celle

---

(21) « Lorsque des objets bien définis forment un ensemble ayant les propriétés suivantes : 1° De deux objets de l'ensemble, on peut déduire d'une manière déterminée un troisième objet du même ensemble ; 2° La composition des objets considérés est associative ; 3° Un même objet, associé à des objets différents, conduit, par cette composition, à des objets différents, alors on dit que ces objets forment un groupe ». **J. Tannery.** (Introduction à l'étude de la théorie des nombres, p. 133).

(22) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 147.

de la proposée, parce que ce groupe est, lui aussi, décomposable de proche en proche en sous-groupes invariants, jusqu'à celui de la permutation identique. Chaque décomposition nouvelle possible correspond à l'un des quatre radicaux (23).

L'équation résolvante (du 120e degré) dont les cent vingt permutations des racines de l'équation du cinquième degré forment les racines, ne peut pas, elle, se ramener, par l'emploi de radicaux appropriés, à une ou plusieurs équations de résolution plus simple que la proposée. Et il faut en chercher la cause, non dans un mauvais choix des valeurs de α, α^2, α^3, α^4, qui entreraient dans l'expression de la fonction résolvante

$$t = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^4 x_4,$$

mais dans la constitution du groupe des cent vingt permutations de x_0, x_1, x_2, x_3, x_4.

Ce groupe pourra bien se décomposer en deux sous-groupes de soixante éléments chacun, « mais ce sera tout. L'équation résolvante se décomposera en deux équations du 60e degré. Mais sa décomposition s'arrête là » (24). Il n'y aura pas moyen d'aller plus loin.

On pourrait faire des remarques en tout point analogues, à propos de la résolution des équations d'un degré supérieur : Si leurs racines sont toutes indépendantes, c'est-à-dire, s'il s'agit d'équations générales, elles sont insolubles par la méthode en question (dite des radicaux), du fait que le groupe de permutations obtenu pour chacune d'elles, sans

---

(23) Si on appelle, pour la commodité de l'écriture a, b, c, d, les racines x_0, x_1, x_2, x_3, on aura le groupe (G) de l'équation du troisième degré.

	a. b. c.	||	a. c. b.
(G)	b. c. a.	||	c. b. a.
	c. a. b.	||	b. a. c.

Le groupe (G') de l'équation du quatrième degré sera, lui, représenté de la façon suivante, si on veut mettre en relief sa possibilité de décomposition progressive en sous-groupes invariants :

a.b.c.d.	a.c.d.b.	a.d.b.c,	||	a.c.b.d.	a.b,d,c,	a.d.c.b.
b.a.d.c.	c.a.b.d.	d.a.c,b.	||	c.a.d.b.	b,a.c,d,	d.a.c.b.
c.d.a.b.	d.b.a.c.	b,c,a.d.	||	b.d.a.c.	d,c,a.b,	c.b.a.d. (G')
d.c.b.a.	b.d.c.a.	c,b,d.a.	||	d.b.c.a.	c,d,b,a.	b.c.d.a.

(Voir l'ouvrage cité de **Ph. Chaslin.** Voir aussi **E. Galois**).

(24) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 155.

adjonction de radicaux, n'est pas, à la manière des groupes des équations du second, troisième et quatrième degré, décomposable jusqu'au bout.

Il faut donc, certes, « bien choisir », les coefficients A, B, C des racines x_1, x_2, x_3, qui entrent dans l'expression de la fonction résolvante. Mais cela ne suffit pas pour que, à partir de la fonction résolvante, on puisse toujours former une équation résolvante avantageuse, c'est-à-dire, soit plus simple que la proposée, soit susceptible d'être ramenée à des équations plus simples. Dans le cas où le choix s'impose, c'est que l'« on constate, en plus de l'existence du groupe P, dit de l'équation, sa décomposition possible en une suite de groupes invariants P_1, P_2, P_3...1 ». C'est à cause de cette structure spéciale du groupe, permettant sa décomposition progressive, « que certaines fonctions employées peuvent jouir de certaines propriétés par rapport à lui. Ces propriétés nous rendent possible la résolution de l'équation, et les seules équations de degré quelconque qui sont résolubles, par la méthode des radicaux, sont celles qui possèdent un groupe ainsi décomposable » (25). Dans le cas où l'on a affaire à l'une de ces équations, l'idée de la simplicité nécessaire de l'équation résolvante, et, avant elle, de la fonction résolvante, guide le chercheur dans le meilleur choix à faire des coefficients A, B, C, etc. des racines. Dans le cas contraire, cas où la structure du groupe de l'équation « interdit d'avance tout espoir de la résoudre comme il vient d'être dit, c'est encore l'idée de la simplicité nécessaire de l'équation résolvante, — que l'on sait, cette fois, ne pas pouvoir être atteinte, — qui gu[illegible] le mathématicien, cette fois « négativement », si l'on peut dire. Elle l'empêche d'essayer de nouveaux tâtonnements, voués à l'échec ; elle l'avertit de ne pas pousser plus loin l'inutile recherche d'un artifice à appliquer dans le choix des dits coefficients.

Il existe, en algèbre, d'autre cas où l'emploi d'une équation résolvante est justifié, comme toujours, par la simplicité qu'elle représente, en regard de l'équation proposée. Dans tous ces cas, tout le processus de recherche qui aboutit à l'invention de cette équation résolvante, est guidé par la notion de sa nécessaire simplicité.

---

(25) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 154.

Ce sont, par exemple ceux, des équations, telles que l'équation bicarrée, telles, encore que certaines équations réciproques, dont la résolution se ramène à la résolution d'une équation du second degré.

On sait que l'on appelle équation bicarrée, une équation du quatrième degré dont le premier membre ne renferme pas de termes de degré impair. Elle est de la forme

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0$$

« Pour la résoudre nous calculerons d'abord les carrés des racines et nous en déduirons les racines ; soit x une racine et y son carré ; ce nombre y étant égal à x^2, y^2 est égal à x^4 et on doit avoir

$$(2) \qquad ay^2 + by + c = 0$$

équation du second degré que doivent vérifier les carrés des racines de l'équation (1) ; l'équation (2) est appelée la résolvante de l'équation (1) (26).

A toute racine de l'équation (1) correspond un nombre positif, qui est racine de l'équation (2). Réciproquement, à toute racine positive de l'équation (2) correspondent deux nombres opposés, qui en sont les racines carrées, et qui sont solutions de l'équation (1) » (26).

Il est inutile d'entrer dans plus de détails. On voit que, là encore, l'équation « résolvante » est résolvante justement parce qu'elle est plus simple que la proposée. On voit que, en la formant, le mathématicien a été guidé par le nécessité de substituer à la question qu'il avait à résoudre une question plus simple, selon la remarque de R. Javelot (27).

D'ailleurs « la méthode employée pour résoudre l'équation bicarrée s'étend aux équations plus générales

$$ax^{2p} + bx^p + c = 0$$

Si l'on prend pour inconnue auxiliaire

$$y = x^p,$$

on sera conduit à chercher les racines de la résolvante

$$ay^2 + by + c = 0$$

Si p est impair, à toute racine y' de la résolvante correspond, pour l'équation donnée une seule racine $x' = \sqrt[p]{y'}$;

---

(26) **Grévy.** « Traité d'algèbre », p. 241.

(27) **R. Javelot.** Ouvrage cité, p. 145 (déjà cité).

si p est pair, à une racine positive y' de la résolvante, correspondent deux racines opposées $+\sqrt[p]{y'}$ et $-\sqrt[p]{y'}$ et à une racine négative de la résolvante ne correspond aucune racine pour l'équation donnée » (28).

Un autre cas intéressant où s'applique cette méthode générale de substitution dans laquelle l'idée de simplicité joue un rôle directeur si important, est celui des équations réciproques. On se rappelle qu'une équation réciproque $f(x) = 0$ est une équation «dont le premier membre est un polynôme ordonné ayant pour coefficients des termes équidistants des extrêmes égaux, ou encore égaux ou opposés deux à deux, si le polynôme, n'a pas de terme du milieu.

Aussi les équations

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$
$$ax^4 + bx^3 + bx + a = 0$$
$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$$

sont réciproques » (29).

On établit que « si un nombre est racine d'une équation réciproque, l'inverse de ce nombre est aussi racine de l'équation. Il en résulte que, si une équation réciproque n'a pas les racines 1 ou — 1, ses racines peuvent être groupées deux à deux ; leur nombre est pair.

La forme particulière de l'équation réciproque permet de ramener sa résolution à la résolution d'équations de degré inférieur » (30).

Examinons d'abord une équation réciproque du 3e degré :

1° Soit l'équation

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

Si on y remplace x par $-\frac{1}{x}$, on a

$$-a + b - \frac{b}{x} + \frac{a}{x^3} = 0$$

— 1 est racine, et on peut mettre $x + 1$ en facteur dans le premier membre

$$(x + 1)\left[ax^2 + (b - a)x + a\right] = 0$$

Les racines de l'équation donnée sont les racines de l'équation du second degré

$$ax^2 + (b - a)x + a = 0,$$

qui est également réciproque.

---

(28) **Grévy.** « Traité d'algèbre », pp. 245-246.
(29) **Grévy.** Même ouvrage, pp. 256-257.
(30) **Grévy.** « Traité d'algèbre », p. 157.

2° Soit l'équation :

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

Elle admet la racine 1, et on peut la mettre sous la forme

$$(x - 1)\,[ax^2 + (a + b)\,x + a] = 0$$

Les autres racines sont données par l'équation du second degré réciproque

$$ax^2 + (a + b)x + a = 0. \quad » \quad (31)$$

On trouverait, à la base de la résolution de l'équation réciproque du quatrième et du cinquième degré, le même rôle directeur de l'idée de simplicité de la résolvante. La simplicité de l'équation résolvante garantit la simplicité, en fin de compte, de la résolution.

1° « Soit l'équation

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$$

Cette équation a les racines 1 et — 1, et on peut l'écrire, en groupant les termes équidistants des extrêmes :

$$a(x^4 - 1) + bx(x^2 - 1) = (x^2 - 1)\,[ax^2 + bx + a] = 0\ ;$$

on est ainsi ramené à résoudre l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + a = 0$$

2° Soit l'équation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Cette équation n'a pas, en général, les racines 1 ou — 1 ; pour la résoudre, divisons par x^2, et réunissons les termes équidistants des extrêmes :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Nous prendrons comme inconnue auxiliaire :

$$y = x + \frac{1}{x}\ ;$$

on en déduit

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \qquad \text{ou} \qquad y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

---

(31) **Grévy.** Même ouvrage, pp. 157-158.

Au lieu de résoudre l'équation, on pourra résoudre le système

$$\begin{cases} a(y^2-2)+by+c=0 \\ x+\dfrac{1}{x}=y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} ay^2+by+c-2a=0 \\ x^2-xy+1=0 \end{cases}$$

La première équation renferme la seule inconnue y, et est du second degré ; on sait la résoudre ; si y_1 est une racine de cette équation, les valeurs de x correspondantes seront données par l'équation

$$x^2-xy_1+1=0$$

On a donc, à l'aide de deux équations du second degré, résolu l'équation réciproque du quatrième degré. L'équation en y est appelée la résolvante » (32). Si l'équation réciproque est du cinquième degré, elle est de la forme

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a \quad 0$$

ou bien,

$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a \quad 0$$

Dans le premier cas, elle a la racine — 1, et peut s'écrire :

$$(x+1)\ [ax^4+(b-a)x^3+(a-b+c)x^2+(b-a)x+a]=0$$

Dans le second cas, elle a la racine 1 et peut s'écrire :

$$(x-1)\ [ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(a+b)x+a]=0$$

D'une part comme de l'autre, on a à résoudre une équation réciproque du 4e degré, une équation plus simple que la proposée.

On peut aussi avoir affaire à ce qu'on appelle une équation réciproque de seconde espèce, de la forme

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$$

« Soit x' une racine de cette équation ; l'égalité

$$ax'^4+bx'^3+cx'^2-bx'+a=0$$

peut s'écrire

$$a+b\frac{1}{x'}+c\frac{1}{x'^2}-b\frac{1}{x'^3}+a\frac{1}{x'^4}=0$$

ou

$$a\left(-\frac{1}{x'}\right)^4+b\left(-\frac{1}{x'}\right)^3+c\left(-\frac{1}{x'}\right)^2-b\left(-\frac{1}{x'}\right)+a=0$$

---

(32) **Grévy.** « Traité d'algèbre », pp. 257-258.

ce qui montre que $-\frac{1}{x}$ est encore racine.

Pour résoudre l'équation, divisons par x^2, réunissons les termes équidistants des extrêmes :

$$a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b\,(x - \frac{1}{x}) + c = 0$$

et prenons l'inconnue auxiliaire

$$y = x - \frac{1}{x} ;$$

On en déduit :

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \qquad \text{ou} \qquad y^2 + 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

L'équation réciproque de seconde espèce conduit à l'équation résolvante :

$$ay^2 + by + c + 2a = 0$$

On voit encore ici que, si l'équation donnée a des racines, la résolvante a des racines ; nous allons voir que, réciproquement, à toute racine de la résolvante, correspondent deux racines de l'équation donnée. Soit y' une racine de la résolvante ; les valeurs de x seront racines de l'équation

$$x^2 - xy - 1 = 0$$

équation qui a toujours deux racines de signes contraires » (33).

Un autre exemple, enfin, dans lequel on voit l'idée de simplicité servir à guider le mathématicien dans l'invention d'une solution, est celui de ces équations irrationnelles que l'on peut, par un changement de variable, résoudre au moyen d'équations rationnelles plus simples.

Soit, par exemple, l'équation :

$$x^2 - 3x - 5\sqrt{x^2 - 3x} - 6 = 0$$

« Posons $y = \sqrt{x^2 - 3x}$

L'équation résolvante en y est

$$y^2 - 5y - 6 = 0$$

Elle a pour racines 6 et — 1 ; la seconde ne convient pas, puisque y est essentiellement positif : à la valeur 6, correspondent, pour x, les racines de l'équation :

$$6 = \sqrt{x^2 - 3x}$$

---

(33) **Grévy.** Même ouvrage, pp. 261-262.

ou, en élevant au carré les deux membres qui sont positifs,

$$x^2 - 3x - 36 = 0$$

On a donc les deux racines :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{153}}{2} \text{ .» (34)}$$

« Soit encore l'équation :

$$x^2 - 2x + 2(\gamma - 1)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \lambda^2 \quad 0$$

Posons :

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

On en déduit :

$$y^2 - 5 = x^2 - 2x,$$

et l'équation donnée fournit l'équation résolvante

$$y^2 + 2(\lambda - 1)y + \lambda^2 - 5 = 0. \text{» (35)}$$

Dans tous ces cas, il semble évident que l'idée de la simplicité de la solution, c'est-à-dire plus immédiatement, l'id de la simplicité de l'équation résolvante, indique la marche à suivre, suggère les transformations formelles à faire, les propropriétés de l'équation qu'il convient d'utiliser (36). C'est, en un mot, elle qui dirige l'invention mathématique.

Ce rôle directeur de la simplicité apparaît encore tout particulièrement dans l'invention de certaines méthodes d'application des mathématiques, dans l'invention par exemple, de la « géométrie descriptive » au sens où on entend ce mot dans l'enseignement secondaire. Dans l'éloge qu'il a fait de Monge, Arago n'a pas omis de le rappeler. Après avoir parlé des problèmes que soulève la pratique de l'art de la construction des édifices, il ajoute : « Ces beaux, ces magnifiques problèmes n'auraient pas été solubles, si on n'avait eu pour guide que les représentations pittoresques des objets ; mais, en substituant à ces images, des dessins assujettis à certaines règles, toutes les relations de grandeur et de forme entre les différentes parties d'une construction quelconque s'obtiennent à l'aide d'opérations très simples » (37). Ce qui a donc été le ressort de l'invention de la « descriptive », c'est l'idée d'une repré-

---

(34) **Grévy.** « Traité d'algèbre », pp. 262-263.
(35) **Grévy.** Même ouvrage, p. 263.
(36) **Grévy.** Idem, p. 257. (Voir plus haut).
(37) **Arago.** Eloge de Monge. (Lu à l'Académie des sciences le 11 mai 1846).

sentation, simple en même temps que complète, des figures ; c'est l'idée de la simplicité des constructions sur le papier.

L'invention d'un grand nombre, d'ailleurs, de méthodes « nouvelles », semblent, en mathématiques pures, avoir été dirigées par le sentiment qu'avaient les mathématiciens, de la simplification qu'elles apporteraient par rapport aux méthodes déjà connues. C'est ainsi que Chasles considère le passage de l'ancienne « méthode d'exhaustion », aux méthodes infinitésimales des Modernes, comme un moyen de simplification des démonstrations (38).

Enfin, — cela a aussi son importance, — l'idée de simplicité paraît jouer un rôle de guide, quant à l'ordre dans lequel doivent s'aborder les questions. Il y a, dans tous les domaines des mathématiques, « des questions que l'on doit connaître pour ne pas être arrêté dans la recherche de problèmes plus compliqués » (39). Et c'est encore Chasles qui écrit que « la géométrie est soumise, comme toutes nos autres connaissances positives, à cette condition qui gêne l'esprit humain, de ne marcher d'un pas sûr que progressivement et toujours du simple au composé ; et, de même que les sections coniques ont été, dans la géométrie plane les courbes les plus simples, qu'il nous a fallu étudier et approfondir avant de nous élever à de plus hautes conceptions, les surfaces du second degré, sont parallèlement, dans la géométrie à trois dimensions, les objets les plus simples, qui doivent nous servir d'éléments indispensables pour pénétrer plus avant dans la connaissance des propriétés de l'étendue » (40).

On songe aux « Règles » de Descartes. « Toute la méthode, dit la cinquième du fameux traité, consiste en l'ordre et la disposition des objets sur lesquels l'esprit doit tourner ses efforts pour arriver à quelque vérité. Pour le suivre, il faut ramener graduellement les propositions embarrassées et obscures à de plus simples » — (tous les exemples que nous avons rappelés, d'applications, tant algébriques que géométriques, de la méthode générale de substitution, ne consistent pas en autre chose), — « et ensuite, partir de l'intuition de ces dernières pour arriver, par les mêmes degrés, à la connaissance des autres ». Et, la règle suivante, ne dit-elle pas que « pour distin-

(38) **M. Chasles.** (Aperçu historique, p. 16).
(39) **R. Javelot.** Ouvrage cité, p. 1.
(40) **M. Chasles.** Aperçu historique, p.

guer les choses les plus simples de celles qui sont enveloppées, et suivre cette recherche avec ordre, il faut, dans chaque série d'objets où de quelques vérités nous avons déduit d'autres vérités, reconnaître quelle est la chose la plus simple, et comment les autres s'en éloignent plus ou moins, ou également » (41). Il est clair que le mot « chose » a, ici, un sens très général, en rapport avec la portée universelle de la méthode elle-même, et que les « objets » de la science qui les dépasse toutes « en facilité et en importance », sont compris eux aussi, sous ce mot. Descartes, il est vrai, parle là en philosophe. Mais comment ne pas admettre que le mathématicien qu'il était n'ait pas sa part dans l'élaboration de ces règles, d'autant plus qu'elles concordent parfaitement avec ce que semble penser le mathématicien qui réfléchit sur l'histoire de sa science, et avec ce qui semble ressortir de l'examen direct des travaux des mathématiciens ?

D'après tout ceci, il semble donc bien hors de conteste que la notion de simplicité a, en mathématiques, une importance très grande. Importance psychologique, puisque c'est elle qui détermine les préférences du mathématicien pour une méthode, ou une solution, alors que d'autres méthodes, d'autres solutions, seraient logiquement, tout aussi correctes. Importance pédagogique, cela va sans dire. A défaut de celles de Chasles et de Descartes, l'observation que nous venons de citer, de Javelot, suffirait à le prouver, s'il était nécessaire de le mettre en évidence. Importance scientifique, enfin, de tout premier ordre, puisque c'est elle qui, dans l'invention des solutions, comme des méthodes, c'est-à-dire dans l'élaboration progressive de la science elle-même, sert, au mathématicien, de guide.

Reste à savoir si cela est suffisant pour en faire l'objet d'une étude spéciale.

---

(41) **Descartes.** « Règles pour bien conduire son esprit » (Edit. Cousin, tome II, p. 226).

CHAPITRE IV

LA NOTION DE SIMPLICITE N'EST PAS UNE NOTION SIMPLE

Rien ne paraît clair, au premier abord, comme la notion de simplicité. Quant on qualifie une chose de simple, on sait, semble-t-il, très bien, ce que l'on veut dire et tout le monde est d'accord là-dessus.

Dès lors, pourquoi disserter sur cette idée de simplicité ? Pourquoi, en particulier, chercher à l'expliquer, telle qu'elle se présente en mathématiques ? Une idée aussi transparente a-t-elle donc besoin d'une « explication » ? Il y a là, — toujours au premier abord, — comme un paradoxe.

Cependant, si on y regarde de plus près, on ne tarde pas à s'apercevoir que, en parlant de « simplicité » dans les divers cas où les mathématiques font visiblement usage de cette notion, on désigne des choses bien différentes.

Nous avons vu les mathématiciens rechercher, de préférence, les formules simples, les définitions simples, les raisonnements, les solutions, les démonstrations simples. Il suffit de rappeler quelques-uns des exemples cités dans les chapitres précédents, pour se rendre compte comment, d'un cas à l'autre, l'acception du mot « simple » peut varier.

Reprenons, entre autres, le cas de la résolution de l'équation du second degré à 1 inconnue. Elle est l'effet d'une « simplification » progressive de la formule même de cette équation.

Nous avons les trois formules équivalentes qu'on sait :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$
$$x^2 + px + q = 0 \qquad (2)$$
$$y^2 - k = 0 \qquad (3)$$

Des trois, c'est, évidemment, la troisième qui est la plus simple. On pourrait leur en ajouter une quatrième, (équivalente) et plus simple encore.

$$y = \sqrt{k},$$

formule de laquelle se déduisent immédiatement les valeurs de x (c'est-à-dire les racines de l'équation), x étant égal à $-\frac{p}{2}$.

Mais il est facile de voir que la simplicité de chacune de ces équations est obtenue par la complication progressive du sens des symboles qui y entrent. Dans l'équation (1), b et c sont, ainsi que a, des quantités anonymes quelconques, supposées connues, et considérées comme primitives du fait qu'elles sont représentées par une seule lettre et qu'aucune opération n'est indiquée en elles. Une fois posée l'équation (2), puis, l'équation (3), p, q, y, k, sont, eux aussi, considérées, du point de vue de chacune de ces équations, respectivement, comme des quantités anonymes. Mais, pour poser ces équations, de manière à ce qu'elles soient équivalentes à l'équation proposée (1) et plus simples, il a bien fallu donner à ces lettres une signification précise, poser que :

$$p = \frac{b}{a} ; q = \frac{c}{a} \quad \text{et, d'autre part,} \quad y = x + \frac{p}{2} ; k = \frac{p^2}{4} - q.$$

C'est grâce à cette complication de la signicfiation des symboles que l'on peut aboutir à la formule finale, simple : $y \quad \sqrt{k}$, d'où l'on tirera tout de suite les deux valeurs des racines.

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{k} \qquad x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{k}.$$

La formule simplifiée ($y = \sqrt{k}$), à laquelle on aboutit, signifie (d'après ce que nous savons de y et k par nous déterminés) :

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

c'est-à-dire : $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, ce qui n'est autre que l'équation (2), ou son équivalent l'équation (1), beaucoup plus compliquée, quant à la forme, que $y^2 = k$.

Le sens de chacun des nouveaux symboles forgés, les rapports qu'il exprime entre quantités déjà connues, les opéra-

tions qu'il suppose sur elles, ici, importent peu au mathématicien. Ils peuvent être très compliqués. Ce qu'il faut seulement, c'est que le sens de ces symboles par rapport aux coefficients de l'équation initiale soit tel, que leurs relations réciproques, soient beaucoup plus simples que celles indiquées dans la première équation ; soient le plus simple possible. Ce qu'il faut, c'est que les opérations à effectuer sur eux, soient moins nombreuses et plus simples que celle indiquées dans cette même équation. D'ailleurs le seul fait d'adjoindre à l'équation une certaine fonction de ses coefficients, suppose une complication dans le « sens » qu'ont les lettres. Cette complication de sens est, ici, donc, absolument nécessaire en vue de la simplification dans l'écriture. On peut dire que, non seulement la simplification des formules successives de l'équation proposée, mais la simplification de la résolution de celle-ci, dépend, ici, d'une simplification d'écriture, qui recouvre, en réalité, une complication du sens des symboles. Mais le sens des symboles compte assez peu. La simplicité dans l'écriture a, en algèbre, — et déjà en arithmétique une importance primordiale. Il convient de le constater.

Rappelons-nous, de même, la résolution de l'équation bicarrée

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

et, en général, des équations de degré supérieur, quelconque, de la forme :

$$ax^{2p} + bx^p + c = 0$$

au moyen de la résolvante du second degré.

$$ay^2 + by + c = 0$$

Cette résolvante ne peut être formée que grâce à une convention qui fixe que $y = x^p$. Sa simplicité n'est donc pas due à autre chose qu'à la complication de sens qu'a pris le symbole y, par rapport au sens de x. C'est, elle aussi, une simplicité d'écriture, de « forme », corrélative d'une complication de sens.

De même, nous avons vu, dans l'examen de la résolution des équations par la méthode dite « des radicaux », que la simplicité de la fonction résolvante, puis de l'équation résolvante, que l'on forme en vue de la possibilité même de la résolution, est due à un certain choix des coefficients qui figurent dans la fonction résolvante. Mais ces coefficients sont

loin d'être choisis eux-mêmes les plus simples possibles. Sans doute, ils pourraient être plus compliqués, mais ils pourraient, en général, être certainement plus simples.

Leur choix est, tel qu'il est, dicté uniquement par le souci de la simplicité de la fonction résolvante, et, par suite, de l'équation résolvante. On peut dire que, ici encore, la complication des éléments d'une formule algébrique importe peu au mathématicien, si elle entraîne la simplicité d'une formule importante à laquelle il s'agit d'aboutir, c'est-à-dire, une simplicité d'écriture féconde.

Il est vrai que la simplicité d'une formule importante, entraîne celle de la suite de transformations qu'on devra faire à partir de cette formule. La simplicité de cette formule (celle, ici par exemple, de la fonction résolvante), recherchée pour elle-même, est quand même subordonnée à l'exigence de la simplicité d'un ensemble plus vaste, simplicité de la suite de formules enchaînées les unes aux autres, qui forme la résolution de l'équation. Elle n'en est pas moins, elle, semble-t-il, une simplicité d'écriture.

A propos de cette idée de simplicité d'« écriture », — qui est une simplicité de « forme », — se fait jour tout naturellement une distinction qui semble fondamentale. C'est celle, sur laquelle a insisté J. Nicod, entre la simplicité « extrinsèque » et la simplicité « intrinsèque ». Parlant des groupes possibles d'axiomes de la géométrie, cet auteur dit, entre autres, que « certains sont les plus simples en eux-mêmes, et ont. de ce fait, sur les autres, un avantage immuable parce qu'il tient à un caractère intrinsèque » (1) des groupes. Ce caractère, cette simplicité intrinsèque, c'est la simplicité « des lois établissant les relations entre les entités que le système considère comme primitives » (2), c'est-à-dire, qui, dans le groupe en question, sont regardées comme indéfinissables. A côté de cette simplicité-là, « qui n'a rien à faire avec le sens » (3) dont les expressions primitives du système sont susceptibles ; qui s'attache uniquement à la forme du sys-

(1) **Jean Nicod.** « La Géométrie dans le monde sensible », pp. 28 et 29.

(2) **B. Russell.** Préface de l'ouvrage susdit de J. Nicod. (XII).

(3) C'est nous qui soulignons ce mot.

tème » (4); il y a à considérer la simplicité dont ces expressions sont susceptibles, au contraire, pour ce qui est de leur sens.

Cette distinction, Nicod l'a faite en ayant en vue les interprétations possibles des notions géométriques à l'aide des données du monde sensible, comme l'indique d'ailleurs le titre de son livre. Mais cela n'enlève rien de l'intérêt que ses remarques présentent, d'une manière tout à fait générale. Sa distinction, en effet, entre la simplicité « intrinsèque » (des lois, des systèmes, d'une façon générale, des « enchaînements »), et la simplicité «extrinsèque » (simplicité des entités, termes, notions, idées, qui s'enchaînent), qui dépend, elle, du sens que l'on donne à ces entités, nous paraît primordiale. Elle peut s'imposer d'une manière plus brutale « dans un domaine logique ou mathématique appliqué au monde empirique » (5) parce qu'elle est une conséquence de l'hétérogénéité, dès l'abord nettement sentie, entre l'esprit qui ordonne, et qui, en ordonnant, connaît, et le donné ordonné et connu. Mais cela n'empêche pas que, dans le domaine mathématique ou logique pur, déjà, elle n'ait sa place, et son importance incontestable.

Dans les exemples, cités plus haut, où la simplicité des formules des équations est recherchée aux dépens de celle des éléments qui entrent dans ces formules, il s'agit, avons-nous dit, de simplicité d'écriture. La distinction de Nicod a là sa place, cependant. Dans une formule algébrique, chaque lettre est, en principe, une quantité anonyme ; du moins, au moment où l'on considère la formule, on oublie ce qu'elle peut représenter, explicitement. On la regarde, à ce moment-là, comme une entité primitive. On peut dire que la personnalité de la formule, du point de vue mathématique, réside donc dans son écriture. Ecrite différemment, c'est une autre formule. La simplicité de la formule écrite, est donc une simplicité intrinsèque, au sens où Nicod l'entend. La plus ou moins grande simplicité, non plus de chaque formule, mais de chaque terme, pris séparément, en dehors de toute formule, simplicité qui dépend de ce que, par convention, ce terme symbolise, est ce que Nicod appellerait une simplicité « extrinsèque ».

---

(4) **J. Nicod.** Ouvrage cité, p. 29.

(5) **B. Russell.** Préface de l'ouvrage de J. Nicod. (La géométrie dans le monde sensible). XII.

Mais il s'agit aussi, dans ces mêmes exemples, de simplicité dans la forme, dans l'enchaînement des éléments. Simplifier une équation, c'est la remplacer par une autre équation, équivalente, dont la relation entre les termes soit plus simple, que la relation entre les termes de la précédente. Peu importe si ces termes eux-mêmes sont plus simples. Au contraire, nous avons vu que, pour que la relation le soit, il faut que les termes ne le soient pas. Dans la formule $y^2 = k$ la relation entre y et k est plus simple que ne l'est celle de x aux quantités connues a, b et c, dans l'équation (pourtant équivalente), $ax^2 + bx + c = o$, et c'est pour cela que le mathématicien a fait les conventions nécessaires pour rendre $ax^2 + bx + c = o$ équivalent à $y^2 = k$. Et, si cette simplicité est obtenue au moyen de la « complication des termes », c'est que ces termes, pris séparément, « interprétés », ne sont plus de purs « termes », mais équivalent à des formules exprimant des relations entre d'autres termes.

Ecriture et forme, sont absolument inséparables en algèbre, et la simplicité de la « forme » est toujours, ce que Nicod appelle une simplicité intrinsèque. Mais, ici, en algèbre, les termes ne peuvent être « interprétés » que si on leur donne une « forme », que si on dit à quel ensemble de relations entre termes simples, ils sont équivalents. Ce qui revient à dire que leur simplicité elle-même, est une « simplicité intrinsèque », une simplicité de forme. Considéré dans une formule, tout terme est simple. On ne s'aperçoit de sa complication (à laquelle peut être due la simplicité de cette formule), que lorsqu'on essaye de voir à quelle autre formule il est équivalent, c'est-à-dire, quel enchaînement, quel ensemble de relations, il représente dans les calculs. L'opposition entre simplicité intrinsèque et simplicité extrinsèque, ici, en algèbre, n'est pas une opposition de nature, semble-t-il, mais bien plutôt une opposition de points de vue. Dans un cas comme dans l'autre il s'agit de la simplicité d'une formule — simplicité d'écriture, corrélative de la simplicité des relations qui enchaînent les unes aux autres, les termes de cette formule.

Mais la simplicité de la forme, peut, en mathématiques, se présenter sous d'autres aspects.

Nous avons vu, par expemple, dans la résolution des équations par la méthode des radicaux, que le choix judicieux des coefficients A, B, C, des racines x_1, x_2, x_3... qui entrent dans

l'expression de la fonction résolvante, ne suffit pas pour que, l'on puisse, à partir de celle-ci, former une équation résolvante plus simple que la proposée. Ce résultat dépend aussi, avons-nous dit, de la structured'un certain groupe P de permutations, caractéristique de l'équation à laquelle on a affaire ; de la possibilité de décomposer ce groupe en une suite de groupes invariants P_1, P_2, P_3... jusqu'à la permutation identique.

Or qu'est-ce, pour un groupe, que cette propriété d'être progressivement décomposable en sous-groupes jusqu'à la permutation identique ? C'est être tel que tous ses sous-groupes sont plus ou moins « composés » jusqu'au dernier, et plus il y aura de sous-groupes, et plus le groupe lui-même sera composé. « Un groupe simple, est, en effet, un groupe qui n'admet d'autre sous-groupe invariant que lui-même et l'unité » (6). Dirons-nous une fois de plus, à ce propos, que la simplicité recherchée par le mathématicien (ici celle de l'équation résolvante, donc une simplicité formelle, « intrinsèque », comme nous disions tout à l'heure), est obtenue au moyen de la complication, non plus ici des éléments immédiats de la « formule » simple, mais, du moins, de l'un des facteurs qui entrent en jeu pour amener l'esprit à poser cette formule ? Le facteur mentionné serait, ici, le groupe de permutations des racines de l'équation proposée, groupe qui, lui, ne dépend plus (comme tout à l'heure les coefficients), d'un choix de l'esprit.

Il y aurait peut-être à distinguer « composé » de « compliqué », du moins dans une certaine mesure. Le groupe dit le moins « composé » est-il forcément le moins compliqué? Et en quoi réside la simplicité d'un groupe ?

Dans les quelques résolutions d'équations par la méthode des radicaux, que nous avons examinées, il paraît hors de doute qu'il y ait une gradation, non seulement dans la difficulté, mais encore dans la simplicité, du point de vue mathématique. L'équation résolvante cherchée, et trouvée, est toujours la plus simple possible. Or celle qui correspond à l'équation générale du second degré, est, en tant que « formule », plus simple que celle qui correspond à l'équation du troisième, et celle-ci, à son tour, est plus simple que celle qui correspond à l'équation du quatrième. Et ce qui fait, jus-

(6) **Ph. Chaslin**, Ouvrage cité, p. 119.

tement, qu'au delà, on dit que l'équation proposée n'est pas résolvable, c'est que l'équation résolvante correspondante est plus compliquée qu'elle.

Examinons les « groupes » de permutations, correspondant à ces diverses équations : celui du second degré (x_0, x_1), (x_1, x_0), est décomposable une seule fois en deux sous-groupes, allant jusqu'au sous-groupe de la permutation identique. L'emploi d'un seul radical, à la fois premier et dernier, permet, à cause de cela même, la résolution de l'équation. Celui du troisième degré est déjà plus composé, et celui du quatrième encore davantage, puisqu'on peut le décomposer d'abord en deux sous-groupes, chacun d'eux étant, à son tour, décomposable en trois autres, et chacun de ceux-ci en deux, et enfin, chacun de ces deux derniers en deux autres. Au delà, la décomposition, au lieu de se pousser jusqu'à la permutation identique s'arrête en chemin, et, en cela, le groupe de permutations des racines, correspondant à l'équation du cinquième degré est moins composé, peut-on dire, d'un certain point de vue, que celui qui correspond à celle du quatrième ou du troisième.

On ne saurait donc dire que, plus le groupe de l'équation proposée est composé, et plus la résolution de cette équation est simple, — en particulier, plus l'équation résolvante, dont elle dépend, est simple. Mais on ne saurait, non plus, dire le contraire. Le groupe de l'équation du cinquième degré n'est, en effet, pas plus « composé » que celui du second, et cependant, alors que l'équation du second degré se résout très simplement par la dite méthode des radicaux, celle du cinquième reste irrésoluble, en raison de la complication de l'équation résolvante qu'on obtient. On peut un instant se demander si la simplicité du groupe des permutations intervient ou non dans la résolution, par la méthode des radicaux, de l'équation dont les racines ont fourni ces permutations.

Si on y regarde de plus près, on s'aperçoit du vrai sens de cette capacité qu'a ou que n'a pas un groupe, d'être décomposable, progressivement, jusqu'à la permutation identique. Être susceptible de décomposition progressive, jusqu'à la permutation identique, cela signifie, pour un groupe : être parfaitement, complètement « ordonné ». Le groupe « du second degré », décomposable une seule fois, est entièrement ordonné après cette seule décomposition. Celui de l'équation du troisième degré, au bout de ses décompositions, se trouve,

lui aussi, entièrement ordonné. Mais il est plus longtemps décomposable. Celui qui correspond à l'équation du cinquième degré à beau n'être susceptible que d'une seule décomposition, cette seule décomposition le laisse très incomplètement « ordonné ». Le fait, pour le « groupe » d'une équation proposée, d'être complètement « ordonné », voilà donc quelle est la condition nécessaire, indispensable, de la formation d'une équation résolvante, avantageuse en raison de sa simplicité en regard de la proposée. Mais, une fois cette condition remplie, on peut assurer que, moins le dit groupe sera composé, et plus l'équation résolvante, correspondante à celle dont les permutations des racines ont servi à former ce groupe, sera simple. L'équation résolvante correspondant à l'équation du second degré, est, nous l'avons vu, « plus simple », que celle qui correspond à l'équation du troisième, et celle-ci, plus simple, à son tour, que celle qui correspond à l'équation du quatrième. Et la simplicité des « groupes » de permutations correspondants, est, elle aussi, parallèlement, de moins en moins grande, du groupe de permutations de l'équation du second degré, au groupe de l'équation du quatrième.

Ce que recherche donc ici, avant tout, le mathématicien, ce n'est pas la simplicité du groupe au sens où on la définit ; c'est son « ordination », propriété caractéristique que le groupe a ou n'a pas. Mais l'idéal, c'est que cet ordre, selon lequel le groupe est entièrement décomposable en sous-groupes successifs, soit aussi simple que possible. Ce n'est pas la composition du groupe, c'est la complication croissante de l'ordre qui règne à l'intérieur du groupe, du second au quatrième degré, qui amène la complication progressive, corrélative, des équations résolvantes correspondantes.

Il ne s'agit plus, ici, de complication de termes ou d'éléments enchaînés, conditionnant la simplicité de leur enchaînement. Il s'agit de la simplicité d'une suite d'opérations (les décompositions possibles successives du groupe), conditionnant celle d'une autre suite d'opérations (celles qui constituent la résolution de l'équation résolvante formée).

Il s'agit de la simplicité d'un ordre. C'est encore une simplicité formelle certes, — les éléments ordonnés ne comptent, ici, que comme éléments. Mais elle paraît assez différente de celle que nous avons trouvée dans les formules elles-mêmes, de cette simplicité qui semble se confondre avec la simplicité d'écriture. Elle est, non plus le caractère des opérations que

l'on se propose de faire, ou que l'on considère comme faites, sur certaines quantités anonymes, mais le caractère objectif d'un tout d'une structure donnée, formé de tels et tels groupes d'éléments. Là, la simplicité d'écriture recouvre une simplicité d'opérations sur les quantités écrites. Ici, la simplicité de l'ordre, d'un groupe parfaitement ordonné, est la marque de la simplicité de toutes les opérations possibles, non pas sur les éléments du groupe, mais sur les groupes de ces éléments, — groupes donnés dès que le groupe qui les renferme l'est ; opérations données, dès que ce même groupe est conçu. Elle est comme une propriété physique du groupe, pour ainsi dire ; car le groupe n'est pas quelque chose qui se transforme, comme une formule. Une convention ne peut en modifier la structure, arranger ses éléments dans un autre ordre. Et, si l'ordre en est absent, aucun arrangement habile ne peut y suppléer. (On le voit, par exemple, dans l'impossibilité de la résolution de l'équation du cinquième degré par la méthode des radicaux, pour la seule raison que le groupe de cette équation « est » — par structure — incomplètement ordonné).

L'ordre peut être plus on moins simple. Mais on peut se demander si ordre et simplicité n'ont pas tout de même toujours, du moins ici, en mathématique, quelque chose de commun ; si par exemple, le groupe duquel la décomposition progressive s'arrête en chemin (avant la permutation identique), le groupe incomplètement ordonné, n'est pas, par cela seul, moins simple qu'un groupe ordonné, quel que soit le nombre des décompositions possibles de celui-ci. Souvent composé s'oppose à simple, et paraît synonyme de compliqué. Ce que nous avons vu de la simplicité d'écriture dans les formules algébriques, paraissait le confirmer. L'étude du groupe ordonné, mettrait-elle en défaut cette affirmation ?

Nous avons vu partout le mathématicien rechercher le simple, et souvent, se laisser guider par l'idée du simple. Ici, dans la recherche de la fonction résolvante, qui doit servir de point de départ à sa solution, nous voyons que, ce qui s'impose à lui, d'abord et avant tout, c'est l'ordre, puis l'ordre le plus simple. Est-ce que, dans la notion même d'ordre (quel que soit cet ordre), il n'y a pas déjà la marque de la notion de simplicité ? Est-ce que ce ne serait pas déjà, par une certaine simplicité par lui introduite dans ce qui est ordonné, que l'ordre s'opposerait avant tout au désordre ? Et

cette attention apportée à l'ordre, puis à l'ordre le plus simple, comme condition de la simplicité d'une formule à établir et d'une solution à en tirer, n'est-ce pas, alors, une recherche progressive de la simplicité ?

Tout tend à le faire croire, et, en particulier, cette gradation dans la simplicité que nous avons signalée dans les équations résolvantes correspondant, respectivement, aux équations du deuxième, du troisième et du quatrième degré, et dans les groupes ordonnés de permutations de racines, qui leurs sont corrélatifs. Le premier groupe où l'ordre complet fait défaut, celui qui correspond à l'équation du cinquième degré, n'est-il pas, bien que fort peu « composé », moins simple que les précédents ? et son manque d'ordre n'en est-il pas justement la preuve ?

Dès lors il y aurait sûrement, au moins une forme de simplicité mathématique de même nature que l'ordre lui-même. L'étudier, ce serait aborder le problème de la nature de l'ordre. L'ordre est-il, en mathématique, une propriété intrinsèque, objective, de certains ensembles d'éléments, comme il nous a d'abord semblé ? Ou est-il la désignation d'un certain caractère esthétique, que prennent, à nos yeux, ces ensembles d'éléments ordonnés, caractère qui pourrait être la conséquence de leur structure, mais qui se distinguerait, malgré tout, d'elle ? Ce n'est pas ici que nous pouvons entrer dans cette question. Qu'il nous suffise de signaler que : dans une « formule » simple, il s'agit, en mathématiques, d'une simplicité formelle, d'une simplicité « intrinsèque » selon l'expression de J. Nicod. Dans un groupe simple, il s'agit aussi d'une simplicité formelle. La signification de chaque élément du groupe n'intervient pas. Et cependant, il s'agit, ici et là, de quelque chose de différent. Dans le premier cas, c'est une simplicité de relations, c'est-à-dire d'opérations, liée, au point de se confondre avec elle, à la simplicité de l'écriture des symboles. Dans le deuxième cas, il s'agit d'une simplicité d'opérations commandées par l'ordre naturel, structurel, d'un tout organique.

Mais, en dehors de cette simplicité formelle d'écriture dont nous venons de parler, et qui peut correspondre à une complication de la signification des symboles, il y a, semble-t-il, une simplicité formelle de la pensée elle-même. On la trouve déjà dans les « formules simples », du fait que, en considérant une formule (en la pensant), on est appelé à

oublier momentanément le sens des symboles qui y entrent, pour les considérer comme des quantités anonymes. On ne pense que leur enchaînement. Mais penser celà, c'est alors, penser à un ensemble statique de relations. Il existe aussi la simplicité formelle de la pensée mathématique qui se développe, la simplicité d'une démonstration, de la solution d'un problème, et, en général, de tout raisonnement.

Là encore les notions sur lesquelles on raisonne ont peu d'importance. Seul en a le lien entre les étapes du raisonnement. Lui seul rend le raisonnement simple ou compliqué. Mais cette simplicité-là semble, à l'inverse de celle d'un ensemble ordonné d'éléments, d'un « groupe » au sens mathématique du mot, à l'inverse même de celle d'une expression algébrique posée, une fois pour toutes, et pourvue, pour ainsi dire, de la stabilité d'un « objet », réside plutôt dans l'esprit que dans les choses. La distinction peut paraître subtile. Un raisonnement achevé peut, semble-t-il, être, comme une formule écrite, considéré comme un tout objectif. Sa simplicité peut, jusqu'à un certain point, être conçue comme celle de l'ordre dans un groupe. Il y a, quand même, quelque chose en elle, de différent. Il y a, dans le raisonnement lui-même, quelque chose de différent, du fait, d'une part qu'il tend vers une conclusion, et, de l'autre, qu'il est fait de vérités enchaînées, d'affirmations déduites d'autres affirmations, et non d'éléments anonymes. La simplicité d'un raisonnement, ou d'une solution, est la simplicité d'une « voie ».

Si, essayant de préciser, nous nous reportons aux exemples des chapitres précédents, où nous avons vu le mathématicien préférer les solutions « simples » aux autres, nous voyons que la solution préférée est celle qui est la plus directe, celle qui mène le plus droit au but. Dans le problème, par exemple, où il est demandé d'inscrire un carré de côté donné b, dans un carré de côté donné a, la solution qui consiste à tracer, du centre du carré de côté a, une circonférence de rayon $\frac{b\sqrt{2}}{2}$, est la plus simple parce que c'est la solution la plus directe (7), celle qui donne « immédiatement » le point S duquel dépend toute la construction. (Le raisonnement, dans ce genre de problèmes, suit la construc-

(7) **Lemaire.** Ouvrage cité, p. 137.

tion pas à pas). D'où vient cette rectitude ? Du petit nombre d'étapes qui séparent de la conclusion, celui qui s'engage sur la voie directe ? Sans doute. Mais il semble difficile, ici, de faire abstraction de la nature de ces étapes. Leur lien en dépend plus ou moins. Cette rectitude, marque d'un raisonnement « simple », elle était dans l'esprit du mathématicien qui en a conçu plus ou moins confusément la ligne générale avant d'en inventer, l'une après l'autre, chacune des articulations. Le caractère de la simplicité mathématique, relevé dans les cas précédents, d'être purement formelle, ne semble plus, ici, aussi rigoureux, quoiqu'on doive, semble-t-il, le maintenir. Il semble beaucoup plus difficile à préciser. Il paraît y avoir, dans la simplicité d'un raisonnement ou d'une solution, quelque chose qui tienne beaucoup plus au sujet, que dans celle d'un groupe, ou d'une formule algébrique. Pas plus, pourtant, que nous n'avons analysé l'idée d'ordre, plus haut, nous nous attarderons, ici, à éclaircir celle de rectitude, et à nous demander jusqu'à quel point ces deux idées se ressemblent, et si l'une peut, en fin de compte, se réduire, dans une certaine mesure, à l'autre. Nous n'avons voulu que faire sentir que la notion de simplicité semble avoir, en mathématique, un sens quelque peu différent — un sens plus subjectif, apparemment, plus psychologique, — alors qu'elle s'applique à une démonstration, à une solution, à un raisonnement, en un mot à toute suite d'opérations enchaînées tendant vers un « but », plutôt qu'à un tout organique donné tel qu'un groupe de permutations, ou à un ensemble de relations posées une fois pour toute, tel qu'une formule.

La solution simple que nous venons de rappeler est une construction simple. Nous avons, dans les chapitres précédents, vu l'importance que le mathématicien attache aux constructions simples, en géométrie, et tout particulièrement en géométrie « descriptive ». L'exemple qui vient d'être cité suffirait à montrer que, la plupart du temps, « constructions simples » et « raisonnements simples » vont de pair. Cela est particulièrement vrai dans des cas, où, comme dans l'exemple cité par Bouligaud (8), ou encore, comme dans celui sur lequel nous avons insisté plus haut (9), la solution « géométrique », — c'est-à-dire, accompagnée de figure, — d'une

(8) **G. Bouligand.** « Cours de Géométrie analytique », pp. 96-97.
(9) Voir plus haut, p. 35.

question, est préférée à une autre (solution algébrique, entre autres), à cause de sa simplicité.

Sans nul doute la « construction simple » est d'abord simple, formellement, en tant que raisonnement. Car toute construction mathématique suppose un raisonnement auquel elle sert de support. Mais si dans un raisonnement mathématique, quel qu'il soit, on ne saurait parler de simplicité, semble-t-il, tout à fait indépendamment des propositions liées les unes aux autres, qui en forment la trame, à plus forte raison en est-il de même dans une « construction » — c'est-à-dire dans un ensemble de constructions servant, comme nous le disions, de « support » à un raisonnement.

La simplicité susceptible de se trouver dans tout enchaînement mathématique dirigé vers un but, dans tout enchaînement mathématique en tant que « voie », se retrouve, assurément, dans la construction simple. Nous avons touché du doigt son caractère « psychologique ». Mais, en plus, on peut se demander si la simplicité, matérielle cette fois, des constructions proprement dites, ne s'y surajoute pas ; si le mathématicien ne l'a pas, elle aussi, en vue, quand il parle d'une « construction simple ». Ce serait quelque chose de très différent de toutes les acceptions de la simplicité que nous avons jusqu'ici entrevues, en mathématiques.

La construction simple qui consiste, comme dans le cas précédent (10), à tracer un cercle d'un certain rayon, avec un certain point comme centre, est « simple », certes parce qu'elle permet de donner immédiatement, « directement », une réponse au problème posé. Elle résume pour ainsi dire, tout le raisonnement qu'il a fallu faire pour arriver à établir la valeur du rayon du cercle en fonction de la longueur du côté du carré à inscrire. Mais il semble qu'elle soit « simple », également, parce que le mathématcien considère comme telle l'action de tracer un cercle avec un compas. La solution du problème aurait-elle pu être obtenue directement, par un certain dessin, quelqu'il soit, de ceux que tout le monde appellerait compliqués, que le mathématicien n'aurait pas, alors, semble-t-il, déclaré la construction qu'il propose « simple ». De même, encore, le moyen « très simple » de mettre en évidence, par une construction, le théorème de Pythagore

(10) **Lemaire.** « Méthode de résolutions et de discussion des problèmes de Géométrie », p. 97.

(11) est (et cela semble encore plus probant), très simple en raison seulement de la simplicité des gestes qui consistent à mesurer une certaine longueur, puis une autre ; à tirer un trait ; à répéter quatre fois cette même série d'opérations, puis à disposer les triangles rectangles, ainsi obtenus, d'une certaine façon (12).

Les acceptions de la simplicité que nous pouvons découvrir, en mathématiques, dans d'autres cas que ceux, soit d'une formule simple, soit d'un groupe, soit d'un raisonnement, soit d'une construction, au sens matériellement « opératoire » du mot, semblent toutes se rapprocher plus ou moins de celles que nous venons de voir. Quelquefois elles englobent plus d'une de ces acceptions.

Nous avons vu le mathématicien attacher la plus grande importance à la simplicité de la fonction des racines d'une équation, — fonction résolvante, — formée en vue de la résolution de cette équation par la méthode des radicaux. Mais qu'est-ce qu'une fonction simple ? En disant, par exemple, que les plus simples des fonctions sont les fonctions linéaires, celles « où y est un polynôme du premier degré en x » (13), que veut-on dire ?

On peut, semble-t-il, avoir en vue la formule qui donne les valeurs de y :

$$y = ax + b$$

On peut avoir en vue, l'étude des variations de cette fonction. On peut, enfin, avoir en vue la représentation graphique de ces variations.

Dans le premier cas, en appelant la fonction « simple », on parle d'une simplicité d'écriture. Dans le second, on envisage la simplicité d'un raisonnement, et dans une certaine mesure, également, d'un ordre. (Il y a en effet différents cas d'inégalités à considérer, et leurs conséquences respectives à classer). Dans le troisième, enfin, on parle de la simplicité d'une construction sur le papier. Mais, comme la plupart du temps, la fonction la plus simple (en tant que formule), sera aussi la plus simple à étudier et à représenter graphiquement, il y a des chances pour que l'on ait généralement en vue les

(11) **Laisant.** « Initiation mathématique », p. 83.
(12) Voir plus haut, p. 12.
(13) **Carlo Bourlet et J. Desbrosses.** « Algèbre, 1re, 2e et 3e années », p. 161.

trois cas de simplicité, en parlant d'une formule simple. Il en sera de même, en parlant d'une équation simple.

Il en sera de même, plus ou moins, chaque fois qu'en mathématiques, on citera un « cas simple ».

Le « cas simple » d'application de la méthode d'élimination par substitution, que constitue le système

$$\begin{cases} x - y = b \\ x + y = a \end{cases} \qquad (14)$$

est « simple », à la fois par ce système lui-même et par la solution qui en est donnée : addition membre à membre, des deux équations (ce qui donne comme résultat : $2x = a + b$), puis, valeur de x tirée de là, immédiatement, par une banale division par deux.

C'est, à la fois une simplicité d'écriture, une simplicité de raisonnement, et une simplicité d'opérations. Une opération simple, c'est une opération élémentaire, ce qui peut vouloir dire, soit une opération fondamentale (que l'on doit nécessairement savoir faire avant d'en aborder d'autres), soit une opération symbolisant un acte manuel simple (tel que de couper, par exemple, un objet en deux). Rien ne nous indique ici, quel sens il nous faut donner à l'« opération simple », ou s'il ne faut pas lui donner ces deux sens à la fois.

Rien n'indique, non plus, si en considérant le cas du système en question comme un cas particulièrement simple, on considère la simplicité d'écriture du système, ou, plus spécialement, la simplicité du raisonnementi qui mène à sa résolution, ou celle des opérations que la résolution comporte. Sans doute a-t-on eu vue les trois à la fois.

Quoi qu'il en soit, et que l'on ait en vue une certaine simplicité plutôt qu'une autre, ou que l'on songe confusément à toutes les fois, il n'en reste pas moins que toutes existent, et peuvent prétendre à une place, en mathématiques, à propos de chaque « cas simple ».

Ailleurs, nous lisons que « résoudre un triangle rectangle, c'est calculer les cinq éléments du triangle, connaissant les données qui le déterminent. Les cas les plus simples sont ceux où le triangle est défini par certains de ses éléments. Des considérations géométriques très faciles, montrent qu'un triangle rectangle est déterminé quand on donne deux de ses

---

(14) **Carlo Bourlet et J. Desbrosses.** « Algèbre, 1re, 2e et 3e années », p. 109.

éléments, dont l'un, au moins est un côté » (15). Ici, ces « cas les plus simples », sont-ils dits tels à cause de la simplicité du raisonnement qui permet d'établir les éléments, inconnus, du triangle ? Le sont-ils à cause de la simplicité de la construction du triangle, à partir des éléments donnés ? Ou à cause de l'une comme de l'autre ? Le mot « facile » qu'emploie l'auteur semble rappeler le caractère psychologique que nous avons trouvé à une certaine simplicité. C'est la simplicité du raisonnement qui nous avait paru jouir de ce caractère. Mais il faut remarquer que la simplicité d'un ensemble d'opérations manuelles n'en est pas non plus privée. Elle paraît inséparable d'un certain sentiment de beauté. « Ce qui est réellement beau paraît simple, dit Arago, et semble avoir coûté peu d'effort » (16). Or une construction peut fort bien, en tant que telle, être belle, et donner cette impression d'aisance, de « facilité », qui la rend « simple », ou qui accompagne sa simplicité.

Dans tous les « cas simples » purement géométriques, il est très difficile de déterminer la part de la simplicité du raisonnement en tant qu'enchaînement logique dirigé vers un but, (en tant que « voie »), et celle de la construction sur le papier qui lui est sous-tendue.

En géométrie dite « descriptive », il semble que les « cas simples » soient surtout les cas qui donnent lieu à des construction simples, c'est-à-dire à des suites d'opérations manuelles peu nombreuses, et simples. Mais, là encore, cette simplicité, plus subjective nous a-t-il semblé que les autres, qui se confond avec le sentiment de la « voie directe », n'est jamais perdue de vue. A côté de la simplicité isolée, de la simplicité matérielle, pourrait-on dire, de chaque opération de construction, en tant que geste, il y a la simplicité de l'enchaînement de toutes ces opérations, en tant que solution du problème posé. Et cette simplicité-là semble bien être de la nature de celle du raisonnement simple : comme elle, elle est liée au sentiment de la rectitude, et de l'aisance dans cette rectitude. Il suffirait, pour le prouver, de rappeler quelques uns des « cas simples » que nous avons mentionnés dans les deux premiers chapitres de cette étude, par exemple, le cas

(15) **H. Commissaire.** « Trigonométrie et compléments d'Algèbre (1re C et D), p. 117.

(16) **Arago.** Eloge de Monge, lu à l'Académie des Sciences, le 11 mai 1846.

particulièrement simple, de la détermination de la section d'un polyèdre par un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection. Cette détermination, « est particulièrement simple, car on a immédiatement, sans construction aucune, l'une des projections de cette section » (17), l'autre s'en déduisant ensuite, par des lignes de rappel.

On parle souvent, encore, en mathématiques, de « conditions simples » auxquelles doivent satisfaire un nombre à trouver, une figure à déterminer, etc. Nous savons que, pour une figure, une condition simple « c'est, par exemple, de passer par un point donné, d'être tangente à une droite ou à une circonférence donnée, etc. » (18). On est en droit de se poser à nouveau la même question : de quelle sorte de simplicité s'agit-il là ? S'agit-il d'une condition qui s'exprime brièvement (et dont la simplicité est comparable à la simplicité d'écriture d'une formule) ? S'agit-il, pour l'esprit, de la concevoir avec aisance ? Ce qui nous ramènerait à une simplicité, semble-t-il, plus subjective, plus psychologique, voisine de celle qui satisfait le mathématicien dans un raisonnement aussi direct que possible. S'agit-il, enfin, de la simplicité du geste qui réalise la condition sur un dessin (qui consiste, par exemple, à tirer un trait passant par un point, à l'aide d'une règle) ? Pas plus que nous n'avons pu, en parlant de la formule simple, de l'équation simple, du cas mathématique simple, en général, déterminer que leur simplicité est d'une espèce unique et bien définie, nous ne pouvons le faire ici. Très certainement, on verrait, au contraire, dans de multiples exemples, qu'il s'agit, à la fois, et d'une condition s'exprimant simplement, en quelques mots, et d'une condition aisée à concevoir, et, — si l'on parle de géométrie, — d'une condition pouvant se matérialiser par une opération simple de dessin. Et si, parfois, il est, en parlant de conditions mathématiques simples, question d'une condition simple à un seul point de vue, on ne saurait fixer ce point de vue une fois pour toutes. Il dépend des cas.

Ce qui est ici intéressant, c'est que plusieurs points de vue coexistent, là encore, au sujet de la simplicité. C'est que le mot « simple » peut avoir, comme plus haut, plusieurs sens.

---

(17) **T. Chollet et P. Mineur.** « Traité de Géométrie descriptive, I » (déjà cité), p. 253.

(18) **Béché.** « Géométrie (des Ecoles Primaires Supérieures) », p. 145 (déjà cité).

Mêmes remarques à faire pour ce qui est des « opérations simples ». La simplicité d'écriture des formules algébriques, avons-nous dit, plus haut, est intimément liée à la simplicité des opérations indiquées sur les quantités anonymes qui y figurent. Mais qu'est-ce qu'une opération mathématique simple ? Quand Grévy écrit que « l'étude des combinaisons des longueurs entre elles sert de base à la théorie des opérations simples qui correspondent à ces combinaisons » (19), qu'entend-il par : opérations simples ? Visiblement, ici, les opérations élémentaires, fondamentales, de l'arithmétique. Mais il faudrait savoir si elles sont simples en tant qu'opérations mentales, purement, ou bien, si elles le sont en tant qu'elles symbolisent directement des actes manuels très simples (tels que ceux que tous les traités élémentaires d'arithmétique rappellent pour leur servir d'illustration suggestive). Et, dans le premier cas, sont-elle simples en tant qu'opérations mentales aisées, ou seulement en tant qu'opérations fondamentales ? — « simple » ayant, dans cette nouvelle acception, le sens de « primitif », d'« antérieur à » ce qui est plus compliqué (et les opérations en question étant regardées comme logiquement antérieures à celles que l'on aborde par la suite). Autant de questions qu'il ne s'agit pas, ici, de solutionner, mais qui se posent, et qui font ressortir la difficulté qu'il y a à être précis en parlant, en mathématiques, de simplicité.

Nous avons encore insisté, précédemment, sur la grande importance que les mathématiciens attachent à la simplicité de leurs définitions.

Là, également, toutes les ambiguïtés que nous venons de rencontrer en ce qui concerne la simplicité des conditions mathématiques, des opérations mathématiques, etc., réapparaissent.

D'abord il y a à distinguer, — et nous l'avons fait, — la simplicité de la définition elle-même, de celle des démonstrations des propriétés de l'objet défini. La simplicité de ces démonstrations (dans lesquelles la définition joue un rôle), n'est autre, par nature, que la simplicité des raisonnements. Elle se confond avec ce caractère de rectitude dont nous avons déjà parlé. Mais en quoi consiste la simplicité de la

(19) **Grévy**. « Traité d'Algèbre » (déjà cité), p. 1.

définition elle-même ? En quoi, pour prendre un exemple, la définition d'un triangle comme « polygone de trois côtés », est-elle plus simple que la définition de la même notion comme « polygone dont la somme des angles est égale à deux angles droits ? »

On peut répondre qu'elle est plus simple parce qu'elle est exprimée plus brièvement, et la simplicité de la définition serait ainsi ramenée à une simplicité d'écriture. Mais on peut aussi penser qu'elle est plus simple parce qu'elle permet de construire le triangle, — l'objet défini, — plus simplement.

Et là, une nouvelle distinction se fait jour. Il s'agit, en effet, en vue de la simplicité de toutes les démonstrations qui le concernent, de se représenter clairement ce que c'est que ce polygone appelé triangle. Or, en le définissant : « polygone de trois côtés », on se le représente tout de suite, on le « voit » ; tandis qu'en le définissant : « polygone dont la somme des angles est égale à deux angles droits », on n'arrive à se le représenter qu'au bout d'une série de calculs, ou d'une série de constructions raisonnées, sur le papier. S'agit-il, dans une définition « simple », de la simplicité de la construction directe que celle-ci permet, en tant seulement, qu'elle est directe ? simplicité qui serait, alors, de même nature que celle des démonstrations et raisonnements simples ? Ou s'agit-il de la simplicité des opérations manuelles qui doivent aboutir à tracer sur le papier le défini (dans le cas où celui-ci est un objet géométrique, bien entendu) ?

Mais on peut soutenir que, malgré les avantages pratiques indéniables de l'usage des figures dans les démonstrations, il n'est nullement nécessaire, mathématiquement de se « représenter » un objet qu'on définit, même s'il s'agit d'un objet géométrique, en l'espèse, ici, du polygone en question. Il n'en sera pas moins, « plus simple » de le définir comme « polygone de trois côtés » que comme « polygone dont la somme des angles est égale à deux droits », et cela, en dehors de l'avantage que cela crée du point de vue des démonstrations. Pourquoi ? Il semble que, si l'on se refuse a faire de la simplicité de la définition une pure simplicité d'écriture, de mots, il n'y ait alors qu'une réponse qui s'impose. La définition du triangle comme polygone à trois côtés est la plus simple parce que, indépendamment de toute représentation figurée, le triangle, ainsi défini, est plus simple à concevoir. On n'a, ainsi, en dehors de la notion gé-

nérale de polygone, qu'une seule chose à penser : le nombre de côtés. Alors que, si on adoptait la seconde définition, on aurait, pour préciser cette notion trop générale de polygone, à faire appel à la notion d'une somme d'angles. — (la somme de ses angles), — puis à celle de la somme de deux angles droits, et à celle d'un rapport d'égalité entre ces deux sommes. C'est moins direct, comme processus de pensée.

Mais si on admet que c'est en cela que la définition ordinaire du triangle est, en soi, la plus simple, on retombe, semble-t-il, dans le cas de la simplicité subjective, synonyme, apparemment, d'aisance pour l'esprit, dont nous avons parlé à propos des « voies directes » que constituent démonstrations, raisonnements, solutions simples. Cette simplicité se retrouverait ailleurs que dans les enchaînements. Elle réapparaîtrait dans la conception même des « êtres » ou « objets » mathématiques, de ces notions, de ces termes, que nous avons, à la suite de J. Nicod, opposés, en principe, aux « enchaînements » dans lesquels ils peuvent entrer à titre de matériaux.

Enfin, que dire des figures que les mathématiciens déclarent être « simples » ? Nous avons vu la droite être considérée, dans les traités, comme « la plus simple des lignes » (20), le plan comme la plus simple des surfaces (21), le triangle (22), et la circonférence (23) comme des figures « simples ». Ces figures sont-elles « simples » de la simplicité de la meilleure définition qu'on en puisse donner ? Ce qui nous ramènerait, quant à la notion de cette simplicité, aux distinctions qui viennent d'être faites.

Mais on remarquera qu'il y en a, — et parmi les plus simples, telles que la droite, — de fort difficiles à définir sans pétition de principes. Sont-elles simples, celles-là, du fait de la simplicité de l'opération manuelle qui en produit, sur le papier, une image ? Ou de la simplicité de cette image elle-même (toute idée intuitive de figure étant, semble-t-il, inséparable d'une image) ? Ou sont-elles simples par cela seul qu'elles sont intuitives, et, comme telles, conçues directement

---

(20) **Carlo Bourlet**, Ouvrage cité, p. 1. — **Laisant.** Ouvrage cité, p. 69.

(21) **Carlo Bourlet.** Loc. cité, p. 8.

(22) **Laisant.** Ouvrage cité, p. 73.

(23) **Lemaire.** Ouvrage cité, p. 189-190.

par l'esprit ? Autant de questions auxquelles il est bien malaisé, sinon impossible, de répondre, sans que la réponse ne suppose tout une conception philosophique des mathématiques. Chacune, d'ailleurs, des réponses que nous avons données comme des affirmations possibles au sujet de la nature de la simplicité, tant d'une définition, d'une « opération » simple, d'une condition mathématique simple, ou d'un « cas » mathématique simple, en général, présuppose que l'on a déjà pris position en ce qui concerne le problème de la pensée mathématique elle-même.

Nous demanderons donc aux philosophes, et aux mathématiciens théoriciens de leur science, d'éclairer pour nous le problème de la simplicité, en nous obligeant, chacun à sa suite, de le considérer sous un angle différent.

Mais, dès maintenant, il est impossible de ne pas nous rendre compte, que, contrairement à ce qui en semblait d'abord, cette notion de la simplicité. telle qu'on la trouve et telle qu'on en fait usage, en mathématique, pose un problème.

Du fait que les mathématiciens ne précisent pas, dans leurs traités, ce qu'ils entendent par simple, et en quoi, les notions ou les solutions qu'ils indiquent comme simples sont, par eux, regardées comme telles, nous n'avons pu, dans cette esquisse. nous appuyer sur rien de solide. De là viennent, justement, les difficultés qui surgissent à propos de la notion de simplicité, difficultés que les mathématiciens n'ont pas essayé de résoudre, car elles intéressent l'étude philosophique de la pensée mathématique, et non l'étude proprement mathématique des différents problèmes rencontrés dans les traités.

Sans doute, il est possible d'envisager la simplicité d'une formule algébrique autrement que comme une simplicité d'écriture, et celle d'un raisonnement autrement que comme le caractère de rectitude qui y donne, à l'esprit, l'impression de la plus grande aisance possible. Sans doute aussi, peut-on placer la simplicité d'un groupe bien ordonné (liée à la structure de ce groupe). dans l'esprit du mathtmaticien qui juge ce groupe simple, autant dans le groupe lui-même. dont elle semble. au premier abord, être un caractère objectif. Sans doute, est-il encore possible de nier toute valeur mathématique à la simplicité des constructions en tant qu'opérations manuelles.

Il y a, tout de même, certaines distinctions qui demeurent,

et qui mettent en évidence, par leur seule existence, l'ambiguïté de l'idée de simplicité en mathématiques.

C'est d'abord ce fait signalé par J. Nicod, qu'on ne doit pas confondre la simplicité d'un enchaînement mathématique quelconque, que ce soit une formule ou un raisonnement, avec celle des éléments qui y prennent place. D'où, à considérer d'une part, la simplicité dans les enchaînements, et de l'autre, la simplicité dans les notions, dans les « objets » mathématiques, voire même dans certains enchaînements considérés comme « objets ».

Puis, la simplicité, comme le montrent quelques-uns des exemples rappelés précédemment, peut être envisagée soit doit dans les choses simples elles-mêmes, soit dans l'esprit du mathématicien qui les juge telles.

Dans le premier cas nous pouvons avoir affaire à une simplicité d'écriture (l'écriture se confondant pour le mathématicien, alors, avec la « chose »), ou à la simplicité d'un ordre considéré comme objectif, ou à une simplicité logique équivalent à l'antériorité en soi d'une notion par rapport à une autre. Nous aurions encore à tenir compte d'une simplicité matérielle des objets géométriques, si nous devions envisager les objets géométriques comme des objets matériels. Mais il n'y a pas lieu, semble-t-il, de la mentionner, car aucun mathématicien ne les conçoit ainsi.

Dans l'autre cas, nous aurons affaire, soit à la simplicité esthétique d'un raisonnement ou d'une construction « directe », ou d'une définition claire immédiatement suggestive de son objet ; soit encore, à la simplicité des opérations constructives considérées comme opérations manuelles, ou comme symboles d'opérations manuelles.

Nous avons vu la notion de simplicité servir de guide au mathématicien. Dans laquelle de ses acceptions joue-t-elle ce rôle ? Le joue-t-elle, seulement, toujours dans la même acception ? Peut-on, de tous les sens que peut avoir la simplicité en mathématique, en dégager un, qui soit sinon l'unique, du moins le principal ? Celui dans lequel la notion de simplicité est vraiment féconde ?

Les divers théoriciens des mathématiques, sans vouloir essayer expressément de répondre à ces questions, ont tendu à le faire. Chacun, en considérant la nature de la pensée mathématique d'un point de vue spécial, a fourni les moyens

de répondre, de ce point de vue, aux questions qui se posent, concernant la simplicité mathématique.

L'examen de leurs théories, et des conséquences qu'on en peut tirer, peut seul nous être utile à éclaircir quelque peu une notion dont l'importance, en mathématiques, paraît indéniable, et qui, si apparemment banale au premier abord, (au point qu'on pouvait se demander si l'étude en valait la peine), semble, dès qu'on tente de la creuser, d'un ambiguïté, pour ne pas dire d'une complexité, déconcertante.

DEUXIÈME PARTIE

Théories objectivistes de la simplicité en mathématiques

CHAPITRE V

DE LA NECESSITE DE SE REFERER AUX THEORICIENS DES MATHEMATIQUES

Nous avons, quelques pages plus haut, vu que les mathématiciens s'accordent tous à admettre qu'il « existe » une simplicité mathématique, et que celle-ci joue un rôle, en tant qu'élément de l'idéal scientifique, aussi bien dans la recherche que dans l'exposition des vérités. Nous venons de nous rendre compte, par quelques exemples assez peu nombreux, mais probants, semble-t-il, de l'importance de ce rôle, ce qui confirme directement, du point de vue de la science elle-même, et la légitimité et l'intérêt du problème qui nous occupe : « *Qu'est-ce que la simplicité mathématique ?* »

L'idée du simple nous est apparue, en somme comme celle qui guide le choix du mathématicien appelé à adopter une définition, une démonstration, à préférer un raisonnement, une théorie, parmi tant d'autres définitions, démonstrations, raisonnements, théories possibles, également rigoureux. Bien plus : elle nous est apparue comme ce qui, au cours de la recherche, s'impose à son inconscient ; comme ce qui l'attire dans la voie rationnelle sans qu'il s'en doute, sans qu'il ait même conçu la possibilité d'autres voies. Le maximum de simplicité nous a semblé être ce qui, obscurément pressenti, est le plus impérieusement poursuivi par lui, après la rigueur, si bien que tant qu'il ne l'a pas atteint dans *toute* la mesure où il est donné de l'atteindre, il reste, malgré la justesse des solutions, malgré la stricte impeccabilité logique des enchaînements de vérités, insatisfait — comme en proie à un

malaise. En deux mots : la définition mathématique la plus adéquate, la démonstration, le raisonnement le plus rigoureux, ne sont parfaits, *que s'ils sont, de plus, le plus simples possible.*

Que disent, eux, les théoriciens des mathématiques ? Telle est la question que, maintenant, nous devons nous poser — car c'est chez eux, tout les premiers, semble-t-il, qu'il convient de chercher la réponse aux problèmes philosophiques, que les mathématiciens peuvent bien soulever, mais qu'ils ne se préoccupent pas de discuter. D'autre part, si les divergences de vues des différents théoriciens en ce qui concerne leur conception de la science, ne les empêchent pas de convenir, tous, de la légitimité et de l'intérêt de la question de la *nature* de la simplicité mathématique, il n'est pas prouvé qu'elles n'influent pas sur leurs réponses à cette question. Comparer leurs réponses ne pourra être qu'instructif.

A vrai dire, aucun théoricien des mathématiques ne s'est spécialement occupé du problème. Chacun parle de simplicité, mais sans essayer de préciser ce qu'il entend par là, comme s'il supposait une notion aussi banale, très claire pour tout le monde. Mais il se pourrait bien que ce que l'un entend par « simple » ne corresponde pas à l'idée que l'autre se fait du sens de ce mot. C'est probable. C'est même certain. Lorsque Couturat affirme que « du point de vue logique », — (et aussi, sans doute, du point de vue mathématique, car, pour lui, comme nous le verrons, la mathématique n'est autre que « le prolongement de la logique » (1), l'espace projectif, d'un nombre infini de dimensions, ou espace projectif absolu, est « plus simple » que l'espace projectif à trois dimensions (2), il n'entend pas par « simple » la même chose que Henri Poincaré. Et il n'est pas suffisant de rappeler qu'ailleurs, envisageant les choses sous un autre angle, il donne, sur la question des dimensions de l'espace entièrement raison à H. Poincaré, pour affirmer qu'il ait, même dans ce passage, la même conception que lui de la simplicité en mathématique, par le seul fait qu'il déclare comme lui « plus simple en soi » l'espace euclidien, parmi tous les espaces.

(1) **L. Couturat.** « Les principes des mathématiques », p. 207.
(2) **L. Couturat.** Même ouvrage, p. 157.

Ce n'est, semble-t-il, qu'à la lumière de la « philosophie mathématique » de chaque école de théoriciens, qu'on peut espérer se rendre compte le plus exactement possible de ce que chacun entend par simplicité mathématique. Toutes les idées d'un même système sont solidaires. A des conceptions différentes de la mathématique il est normal, il est naturel, que correspondent des conceptions différentes de la simplicité. On ne pourra, dira-t-on que conjecturer ces dernières. Soit. Mais ces conjectures seront d'autant plus plausibles, confineront d'autant plus, à des probabilités d'autant plus grandes, qu'elles seront plus solidement fondées sur l'examen de la conception des mathématiques de chaque école, ou de chaque auteur.

Il convient donc : 1° d'examiner ces différentes conceptions ; 2° de préciser et de justifier, en nous basant sur elles, la signification attribuée à la simplicité mathématique par chaque école ou auteur ; ce sera là la tâche des trois parties suivantes ; 3° de voir si, malgré les divergences que nous aurons pu constater, il n'existe pas une idée de la simplicité mathématique, indépendante de toute question de doctrine, idée que présupposerait chacune des interprétations que nous en aurons données d'après les théoriciens. Si elle existe il y aura lieu, naturellement, de la tirer au clair autant qu'il se peut. Ce sera là notre tâche ultérieure.

Chaque théoricien doit avoir, nous le disions, une conception de la simplicité qui corresponde à l'ensemble de ses idées sur la nature des sciences mathématiques ; et il faudrait, pour être absolument juste, examiner, une à une, les théories de chacun. Outre que ce serait très long, cela présenterait l'inconvénient de séparer des doctrines qui s'inspirent, au fond, de principes communs, qui répondent à des tendances scientifiques et philosophiques communes. La vision d'ensemble des différentes solutions apportées à notre problème y perdrait en netteté. Nous ne nous occuperons ici que des grandes conceptions épistémologiques qui divisent aussi bien les mathématiciens-philosophes, que les philosophes des mathématiques, depuis les travaux si importants du siècle dernier (sur les géométries non euclidiennes, sur le transfini, sur la théorie des ensembles, etc.) (3), qui ont re-

(3) Dûs, en particulier à **Beltrami, Cayley, Klein, Pasch, Hilbert, Véronèse, et., à Grassmann, à Georg Cantor.**

nouvelé les données du problème de la nature des sciences mathématiques. Il y en a deux surtout, importantes par les noms des mathématiciens et philosophes qui s'y rattachent de part et d'autre, et d'autant plus intéressantes que nettement opposées, constituant comme l'expression des deux positions extrêmes que l'on peut prendre en face du sus-dit problème. Ce sont : 1° Celles des Logisticiens ; 2° Celle de Henri Poincaré, leur plus illustre adversaire, et de ceux qui se rattache à lui. Il y en a une troisième, dont l'intérêt ne saurait se séparer de celui de tout une philosophie du jugement, de tout une conception de l'intelligence, extrêmement souple et riche : c'est celle de M. Brunschvicg.

Occupons-nous d'abord de la première.

CHAPITRE VI

COMMENT LES LOGISTICIENS CONÇOIVENT-ILS LES MATHEMATIQUES ?

Ce qui, peut-on dire, constitue l'essentiel de la conception logistique des mathématiques, c'est cette idée que les mathématiques sont « le prolongement de la logique » (1), sont, comme elle « purement formelles » (2), et peuvent être entièrement construites à l'aide de ses seuls principes, sans appel aucun à l'intuition. Tout l'effort des philosophes-mathématiciens de cette école, tend à asseoir, à « démontrer » le plus rigoureusement possible cette affirmation. Tous les jugements qu'ils peuvent, par la suite, porter sur la place, et le sens, en mathématiques, de différentes notions — et, pour ce qui nous intéresse ici, de celle de simplicité, — et du rôle qu'elles y jouent, dérivent de là.

Dès le début des ouvrages qui l'exposent, la doctrine logistique apparaît comme le résultat d'une réaction à la fois contre la conception mathématique des idéalistes, et contre celles des empiristes. « Les idéalistes ont tendu de plus en plus à regarder toutes les mathématiques comme ayant affaire à une apparence seulement, écrit Russel, tandis que les empiristes ont tenu tout ce qui est mathématique pour une approximation de quelque vérité exacte sur laquelle ils n'avaient rien à nous dire. Cet état de choses, il faut l'avouer, était tout à fait insatisfaisant » (3). C'est à un tel état, que

(1) **L. Couturat.** « Les principes des mathématiques », p. 207.
(2) **L. Couturat.** Idem.
(3) **B. Russell.** « The principles of mathematics », p. 3.

le livre de B. Russell, aboutissant de ses efforts personnels, mais aussi de tous ceux des Logisticiens qui ont travaillé avant lui ou avec lui, prétend remédier.

L'école logistique réagit aussi contre cette idée, très ancienne, fortement enracinée, — (encore plus chez les philosophes que chez les mathématiciens, dira Russell), — mais qu'elle a, elle, reconnue erronée, à savoir que « les sciences du nombre et de la grandeur seraient primordiales » (4), qu'elles reposeraient sur des axiomes propres que l'intuition, sans doute, fournirait. « Les différentes théories mathématiques ne reposent pas sur des principes (5), ou axiomes propres, écrit L. Couturat, mais uniquement sur des définitions. »

La position de combat, qui est la leur, explique pourquoi les logisticiens insistent tant sur ce que leur doctrine a de nouveau, et, parfois, de paradoxal.

Le point de départ de cette doctrine, avons-nous dit, est cette idée que les vérités mathématiques, jusqu'alors regardées comme primitives, « reposent sur des doctrines plutôt logiques que mathématiques, sur des notions qui n'ont rien de quantitatif » (6). C'est l'affirmation qui revient sous diverses formes, tout au long des ouvrages des logisticiens. L. Couturat, par exemple, écrit que « quant à ces définitions qui déterminent l'objet de chaque théorie mathématique, elles sont purement logiques, c'est-à-dire ne contiennent pas d'autres constantes que des constantes logiques. Ce qui distingue les objets mathématiques des objets plus ou moins empiriques des autres sciences déductives, c'est qu'ils sont définis en fonction des seules constantes logiques » (7). « Ainsi, ajoute-t-il plus loin, la mathématique pure se trouve-t-elle définie à la fois par sa forme et par sa matière ; par sa forme qui est un ensemble d'implications conformes aux principes de la logique ; par sa matière qui est un ensemble de définitions ne contenant que des termes de la logique » (8). Ailleurs, il dit que la mathématique consiste en « l'application des principes de la logique à des relations spéciales » (9). Le calcul des classes, théorie purement logique, lui apparaît

(4) **L. Couturat.** « Les principes des mathématiques », p. 2.
(5) **L. Couturat.** Même ouvrage, p. 217.
(6) **L. Couturat.** Même ouvrage, p. 2.
(7) **L. Couturat.** Ouvrage déjà cité, p. 217.
(8) **L. Couturat.** Idem, p. 217.
(9) L. Couturat. Idem, p. 3.

comme « la partie le plus élémentaire de la théorie des ensembles » (10), si importante en mathématiques, en particulier dans les ouvrages des grands mathématiciens du siècle dernier, — qu'on peut, d'ailleurs, regarder comme les initiateurs du mouvement logistique, tant leur influence sur les philosophes de ce mouvement a été grande. D'autre part, la logique des relations (autre théorie purement logique), est déclarée, par lui, être « le fondement indispensable de la théorie des groupes et de la théorie des fonctions » (11). Et c'est au caractère purement logique de leurs définitions que les mathématiques devraient la valeur « universelle et nécessaire, donc à priori » (12) des vérités qu'elles énoncent.

C'est assez montrer l'insistance avec laquelle L. Couturat revient sur l'idée fondamentale de son école. On n'en trouverait pas moins chez Péano, ou chez Russell.

Péano, ne prétend exprimer, à l'aide de son symbolisme, « toutes les propositions de la mathématique » (13), que parce que toutes les vérités de la mathématique peuvent se réduire à l'affirmation de relations logiques, et qu'« on peut représenter toutes les relations de la logique avec peu de signes, ayant une signification précise et assujettis à des règles bien déterminées » (14). Son « calcul géométrique », « science plus puissante que la géométrie analytique, qui n'en est qu'un cas particulier », science « qui exécute les opérations tout de suite sur les êtres géométriques sans passer par les nombres qui les déterminent » (15), n'est possible que parce que, justement, les nombres ne sont pas, comme tant l'avaient cru, l'élément mathématique primitif, et que parce que les relations géométriques, — tant qu'il s'agit bien entendu de géométrie pure, — se réduisent, comme les autres relations mathématiquee, à des relations logiques d'une certaine espèce. « Les calculs algébrique, géométrique, logique, ont des opérations analogues », poursuit Péano dans son Introduction à son formulaire de mathématique, — ils font en somme partie d'une même science logique générale. C'est là la thèse impor-

---

(10) **L. Couturat.** Idem, p. 3.
(11) **L. Couturat.** Idem, p. 3.
(12) **L. Couturat.** Idem, p. 218.
(13) **Péano.** « Formulaire de mathématiques. (Introduction), p. 4.
(14) **Péano.** Même ouvrage, p. 3.
(15) **Péano.** Même ouvrage, p. 3.

tante, mais ces opérations sont « assujetties à des règles particulières à chaque espèce de calcul » (16).

Chez Russell nous trouvons peut-être plus souvent encore répétée l'affirmation des mêmes principes, ou plutôt, de la même vérité fondamentale autour de laquelle gravitent toutes les spéculations de l'école philosophico-mathématique que nous examinons. L'un des buts de son grand ouvrage « The Principles of Mathematics » est, déclare-t-il, déjà tout à fait au début de sa préface, « de prouver que toutes les mathématiques pures n'ont affaire qu'avec des concepts définissables au moyen d'un très petit nombre de concepts logiques fondamentaux, et que toutes leurs propositions sont déduisibles d'un très petit nombre de principes logiques » (17). Et, cette thèse, il lui semble apparemment l'avoir solidement établie, puisque, dit-il, « sa démonstration a toute la certitude et toute la précision dont une démonstration mathématique soit susceptible » (18).

La définition que l'auteur donne des mathématiques pures (les seules dont il s'agit ici), dès le premier chapitre, s'inspire de cette idée fondamentale des Logisticiens, ou plus justement, en semble inséparable, — sans que l'on puisse dire si l'étude seule des mathématiques a amené Russell et les philosophe de son école à adopter cette définition (ou des définitions analogues), et, par suite, à soutenir « la thèse des Logisticiens », ou si, cette thèse, très rapidement plus qu'à moitié « pressentie » juste, a dominé, dès lors l'esprit de ces philosophes dans le cours de toutes leurs spéculations, si elle a contribué, plus ou moins, à les amener à voir d'avance, dans les mathématiques, ce qu'ils y ont vu, et, en particulier à en donner cette définition. Pour B. Russell, « les mathématiques pures sont la classe de toutes les propositions de la forme « p implique q », où p et q sont des propositions contenant une ou plusieurs variables, les mêmes dans les deux propositions, et où, ni p ni q ne contient d'autres constantes que des constantes logiques » (19). Suit ce que Russell entend par « constantes logiques » : « ce sont toutes les no-

(16) **Péano.** « Formulaire de mathématique » (Introduction), p. 6.

(17) **B. Russell.** « The Principles of Mathematics ». Préface, p. V.

(18) **B. Russell.** Même ouvrage. **Préface** p. V.

(19) **B. Russell.** Idem, p. 3.

tions qui peuvent être définies au moyen de : l'implication, la relation d'un terme à la classe de laquelle il est membre, la notion du « tel que » (such that), la notion de relation, et des notions plus éloignées, quelles qu'elles soient, qui puissent être comprises dans la notion générale de propositions de la forme précitée » (20).

Ce qui, jusqu'alors, faisait paraître les mathématiques des sciences indépendantes, c'était, semble-t-il, surtout, la nature des notions reconnues indéfinissables, primitives, dont elles se servent comme de matériaux, notions telles que celles de nombre, d'espace géométrique, etc.... de continuité, d'infini, qui ont, pendant longtemps, excité sans profit l'esprit d'analyse des philosophes. Tant que l'on tient ces notions pour des données d'une intuition de quelque sorte que ce soit on ne peut échapper, remarque Russell, à l'idéalisme ou à l'empirisme qui, tous deux, faussent l'interprétation philosophique des mathématiques, font voir en elles, autre chose qu'elles ne sont. Aussi, prend-il soin, lui, d'indiquer la nouveauté de sa position vis-à-vis de ces notions, position sur laquelle il insiste parce qu'elle constitue l'argument fondamental, la base, en quelque sorte, de la thèse logistique. « La nature du nombre, écrit-il, de l'infini, de l'espace, du temps et du mouvement, et de l'inférence mathématique elle-même, ce sont là des questions auxquelles une réponse sera donnée, qui se tient pour démontrable avec la certitude mathématique, une réponse qui, de toute façon, consiste à réduire les problèmes ci-dessus à des problèmes de logique pure » (21). Et cette réduction à la logique, lui paraît la seule manière d'éviter les difficultés auxquelles se heurtent fatalement les philosophies qui ne l'acceptent point, qui n'y tendent point. Nous avons vu comment Russell considère comme « tout à fait insatisfaisant » l'état de la philosophie mathématique qui refuse à en arriver là. « La Philosophie demande aux Mathématiques qu'est-ce qu'elles signifient. Les Mathématiques, par le passé, étaient incapables de fournir une réponse, et la Philosophie la fournissait en introduisant la notion, totalement étrangère (à elles) d'esprit. Mais à présent, les Mathématiques sont en mesure de répondre, dans la mesure toutefois où elles réduisent la totalité de leurs propositions à certaines notions

(20) **B. Russell.** Idem, p. 3.
(21) **B. Russell.** « The principles of Mathématics », p. 4.

logiques fondamentales » (22). Et ces notions, ce sont « les seules, auxquelles les mathématiques aient affaire » (23) est-il répété.

On voit assez que la thèse de B. Russell est, au fond, la même que celle de Péano et de L. Couturat. Couturat dit que les mathématiques sont « le prolongement de la logique » (24), Russell, lui, dit que « les mathématiques et la logique sont liées d'une manière extrêmement étroite » (25), et même que « la distinction entre mathématique et logique est très arbitraire » (26). Il consent cependant à en indiquer une : la logique comprendrait « toutes les propositions primitives, — les « prémisses » des mathématiques, et, de plus, toutes les autres propositions où il n'est question que de constantes logiques et de variables, mais qui ne répondent pas à la définition donnée plus haut des mathématiques » (27). C'est dire, en somme, que la mathématique est un « cas particulier » de la logique générale, celle que Péano a exprimée en formules et codifiée sous le nom de Logique Symbolique. C'est là, en effet, l'idée de Russell. Montrer que « toutes les mathématiques sont déduisibles de la Logique Symbolique » (28) ; et il entend par « Mathématiques », « non seulement l'Arithmétique et l'Analyse, mais encore la Géométrie euclidienne et non-euclidienne, la Mécanique rationnelle, et un nombre infini d'autres études encore à naître, ou dans leur enfance » (29). On peut, dit-il encore, « à l'aide de dix principes de déduction et de dix autres prémisses d'une portée logique générale, déduire entièrement et exactement toutes les mathématiques, et toutes les entités qui ont affaire en mathématiques peuvent être définies par le moyen de celles qui entrent dans les vingt prémisses ci-dessus » (30). Enfin, — et cela montre quel prix Russell attache à la thèse logistique qu'il défend — « le fait que toute la mathématique

(22) **B. Russell.** Même ouvrage, p. 4.
(23) **B. Russell.** Idem, p. 4
(24) **L. Couturat.** « Les principes des Mathématiques », p. 207 (déjà cité).
(25) **B. Russell.** Ouvrage cité, p 8
(26) **B. Russell,** Idem, p 9.
(27) **B. Russell.** Idem, p. 9.
(28) **B. Russell.** Idem, p 9.
(29) **B. Russell.** « The principles of Mathématics », p. 5.
(30) **B. Russell.** « The principles of Mathématics », p. 4.

est Logique Symbolique, est, dit-il encore, l'une des plus grandes découvertes de notre temps. » (31).

Nous croyons avoir suffisamment montré que, si les Logisticiens peuvent différer quelque peu, dans le détail, sur d'autres points, ils sont d'accord quant à l'idée fondamentale, et à la tendance générale de leur école. Mettre en évidence que tout l'édifice mathématique est un édifice de pures constructions logiques, dans l'explication duquel tout appel à l'intuition, non seulement est inutile, mais introduit un malentendu regrettable, constitue un point de vue faux ; tel semble être leur but. Et pour le réaliser ils s'appuient sur la réduction des Mathématiques à la Logique Symbolique.

Mais si cette Logique Symbolique est d'une telle importance dans leur philosophie scientifique, il nous faut, semble-t-il, avant tout, examiner brièvement en quoi elle consiste. Nous essayerons ensuite, au moyen de quelques exemples, de donner une idée de la façon dont les Logisticiens tirent de ses seuls principes, tous ceux qui régissent le raisonnement mathématique, et de ses seules notions, toutes les notions, qui en forment les éléments.

La Logique Symbolique, nous dit Russell, ou logique formelle car le fait d'être « symbolique » n'est pas, reconnaît-il, un de ses caractères essentiels, — « est l'étude des divers types généraux de déduction » (32). La théorie de toutes les formes de syllogisme classique, en fait partie, mais c'est de la reconnaissance de l'existence et de l'importance des « inférences non-syllogistiques, que la Logique Symbolique moderne a tiré la raison de son progrès (33). En somme, la logique symbolique, est la logique générale, comprenant, outre l'étude des cas classiques de relations de sujet à attribut relevant de ce que J. Lachelier appelle la « Logique d'inhérence », celle des relations telles que l'égalité, le plus grand, le plus petit, etc., et, en général, de toutes celles que l'on rencontre le plus souvent dans le raisonnement mathématique, (entre autres), qui ne lient pas, à proprement parler un « sujet » à un « attribut », et qui se rattachent, selon l'auteur que nous venons de nommer, à la « logique de relation » (34).

---

(31) **B. Russell.** « The Principles of Mathematics », p. 5.
(32) **B. Russell.** Même ouvrage, p. 10.
(33) **B. Russell.** Même ouvrage, p. 10.
(34) **J. Lachelier.** « De la nature du syllogisme ».

Couturat a insisté sur la différence de ces deux logiques : l'aristotélicienne, incapable de rendre compte du raisonnement mathématique, et celle qui régit ce raisonnement, ainsi que les opérations légitimes et rigoureuses de l'algèbre ; la logique des jugements où la copule est autre que l'« est » le plus souvent seul considéré comme copule. Il a même montré (35) — et ce fait serait important, — que, même en mettant la logique aristotélicienne sous une apparence algébrique, en lui donnant une expression telle qu'au premier abord on puisse s'y laisser prendre, elle n'en reste pas moins différente de l'autre, de celle, c'est-à-dire, à laquelle les mathématiciens font constamment appel. Mais il ne paraît pas avoir plus que Russell, exclu les principes de la syllogistique, de la Logique Symbolique, à laquelle il reconnaît le caractère de la plus large généralité, sans peut-être, toutefois, y insister autant que Russell.

Ce qui fait cette généralité, c'est, semble-t-il, que la Logique symbolique n'étudie pas séparément chaque relation spéciale, mais groupe ensemble les relations qui ont les mêmes propriétés formelles, et étudie ces propriétés, sans tenir compte de ce qui, par ailleurs, différencie les relations qui en jouissent. L'étude d'une certaine espèce de relations, indépendamment de tout « contenu », de tout ce qui peut, en fait être « relié » par elles, résulte d'une abstraction. Ce serait d'une seconde abstraction, du même genre, que résulterait la possibilité de constituer la Logique Symbolique. On comprend, que, dans ces conditions la forme sous laquelle se présentent ses principes peut parfois « paraître artificielle et paradoxale, et ne pas toujours offrir l'évidence que semblerait exiger le sens commun » comme le remarque Couturat lui-même (36). L'effort d'abstraction, à ce degré, peut être long et difficile à refaire, et son résultat, exposé d'emblée, ne pas apparaître comme une « vérité évidente ». Mais, — remarque importante dont il faut se souvenir quant on étudie l'œuvre des Logisticiens, — « il faut sans doute renoncer à cette évidence qui non seulement n'est pas une condition de rigueur logique, mais qui l'exclut plutôt » (37).

---

(35) **L. Couturat.** « L'Algèbre de la Logique ».
(36) **L. Couturat.** « Les principes des mathématiques », p. 7.
(37) **L. Couturat.** Même ouvrage, p. 7.

qui est « toute subjective, donc variable, et psychologique, donc étrangère à la logique » (38).

Et il n'y a pas de doute, surtout, que la Logique Symbolique ne soit bien le résultat de la double abstraction dont nous parlions, que ses principes paraissent, ou non, évidents. « Elle a surtout affaire, écrit Russell, avec l'inférence en général et se distingue des diverses branches spéciales des mathématiques, principalement par sa généralité. Ni les mathématiciens, ni la Logique Symbolique, n'étudient de relations spéciales telles que celle d'antériorité temporelle, par exemple ; mais les mathématiques auront explicitement affaire avec la catégorie de relations qui possède les propriétés formelles de celle d'antériorité temporelle, — propriétés qui sont résumées dans la notion de continuité. Et on peut définir les propriétés formelles d'une relation : celles qui peuvent s'exprimer au moyen de constantes logiques ; ou encore, celles qui, tandis qu'elles sont conservées, permettent le changement de la relation en question sans que soit compromise aucune inférence dans laquelle elle (la relation dite), est considérée à la lumière d'une variable » (39). Soit, c'est-à-dire, pour nous expliquer, une relation, celle d'égalité par exemple. Parmi ses propriétés, elle en a de telles que, tant qu'une relation quelconque les possèdera, les inférences, légitimes pour la relation d'égalité, resteront légitimes en ce qui la concerne. On sait que, si A = B, on a aussi B = A. On sait encore que si on a A = B et B = C on a aussi A = C. On traduit ces faits logiques en disant que la relation d'égalité est symétrique et transitive. Remplaçons le signe d'égalité par R (relation). Tant qu'une relation R sera telle que, si on a ARB, on a forcément aussi BRA, et que, ARB et BRC affirmés simultanément, entraînent ARC ; telle que, c'est-à-dire, les inférences légitimes pour la relation d'égalité, continueront à l'être pour elle, on dira que cette relation a les mêmes propriétés formelles que la relation d'égalité, qu'elle est, comme elle, symétrique et transitive. Telles sont les relations de « fraternité (si on ne distingue pas celle de « frère » et de « sœur »), de collègue à collègue, de concitoyen à concitoyen, etc., comme on peut s'en rendre compte. Dans toutes les inférences concernant ces relations, la « rela-

(38) **L. Couturat.** Idem, p. 7.
(39) **B. Russell.** « The Principles of Mathematics », p. 11.

tion symétrique et transitive », est bien considérée « à la lumière d'une variable » qui peut prendre différentes « valeurs ». frère ou sœur. collègue, concitoyen, etc. Et c'est bien grâce à la permanence des propriétés formelles de la relation unique qui. au fond, se trouve sous toutes les précitées, que l'on peut les remplacer l'une par l'autre, faire prendre à la variable l'une quelconque de ses valeurs, sans que les inférences en question soient compromises. C'est que ces inférences ne concernent pas telle relation (d'égalité, de fraternité, de collègue, etc.), mais bien « la » relation symétrique et transitive, « en général ».

L'étude de ces relations « générales », caractérisées uniquement par la réunion d'un certain nombre de propriétés formelles déterminées, comme celles dont nous venons de parler, — propriétés qu'il n'est moyen de définir (et que les Logisticiens, en fait,, ne définissent), que par les inférences que leur permanence permet ; — tel est donc l'objet de cette Logique Symbolique, si importante dans l'école dont nous nous occupons, de cette logique aux vérités de laquelle toutes les vérités mathématiques nous sont dites se ramener de proche en proche. C'est là, en résumé, ce que nous venons de dire. « La Logique Symbolique examine les règles générales qui permettent de faire des inférences... Les notions particulières qui apparaissent dans ses propositions, et toutes celles qui sont définissable au moyen d'elles, sont les « constantes logiques ». Le nombre des constantes logiques indéfinissables n'est pas grand : il paraît être, en fait, huit ou neuf. Ces notions seules forment l'objet des Mathématiques en leur entier. Aucune autre, à part celles qui sont définissables au moyen des huit ou neuf originales n'intervient nulle part soit en Arithmétique, soit en Géométrie ou en Mécanique rationnelle » (40).

En fait, les quelques notions que Russel énumère comme étant des constantes logiques, « par le moyen desquelles toutes les propositions de la Logique Symbolique peuvent être établies » (41), ne sont même pas aussi nombreuses qu'il vient de le dire. Il y fait entrer ce qu'il appelle l' « implication formelle ». qu'on rencontre dans les propositions dont le type général est « φ (x) implique ψ (x) pour toutes les valeurs de x ». où φ (x) et ψ (x) sont des propositions

(40) **Russell.** Ouvrage cité, p. 11.

c'est-à-dire susceptibles de vérité ou de fausseté, pour toute valeur attribuée à x) (42), l'implication « entre propositions ne contenant pas de variables » (43), ou implication matérielle, « la relation d'un terme à la classe à laquelle il appartient, la notion du « tel que » (44), la notion de relation, et celle de vérité » (45).

Aussi bien Russell que Péano et Couturat, et, avec eux les Logisticiens en général, s'accordent à ranger les questions dont s'occupe la Logique Symbolique en trois catégories distinctes quoiqu'étroitement connexes : le calcul des propositions, le calcul des classes et le calcul des relations. Il nous faut donc, pour prendre un aperçu de ce qu'est la Logique Symbolique, examiner successivement, — brièvement, — l'essentiel de chacun de ces trois calculs.

1° *Le calcul des Propositions.* — C'est, dit Couturat (46) la base de la logique ; et la relation sur laquelle il s'édifie lui-même tout entier est celle d'implication entre deux propositions, ou implication matérielle. « Le Calcul des propositions est caractérisé par le fait que toutes ses propositions ont pour « hypothèse » et pour « conséquent » l'assertion d'une implication matérielle » (47). Russell, à la suite de Mac Coll, est d'avis que « l'implication et les propositions sont plus fondamentales que l'inclusion et les classes » (48), donc, que, de ces deux parties de la Logique Symbolique, Calcul des propositions et Calcul des classes, dont on a souvent fait ressortir le parallélisme, (et quelquefois, pensent les uns, en l'exagérant) (49), c'est bien le Calcul des propositions qui est logiquement antérieur.

Mais avant d'aller plus loin on doit se demander : qu'est-ce que les Logisticiens entendent par « proposition » ? La question a son importance, car, de la réponse qui y sera faite

---

(41) **Russell.** Idem, p. 11.

(42) Voir sur la différence entre implication formelle et implication matérielle. **Russell.** Idem, p. 14.

(43). **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 11.

(44) **B. Russell.** Idem : « The notion of « such that ».

(45) **B. Russell.** Idem, p. 11.

(46) **L. Couturat.** Ouvrage déjà cité, p. 8.

(47) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 13.

(48) **B. Russell.** Idem, p. 12. « A great deal has been made of this duality, and in the lates editions of the Formulaire, Péano appears to have sacrificed logical precision to it's preservation. »

(49) **B. Russell.** Idem, p. 12.

dépend évidemment la signification de la partie de la Logique Symbolique dont il s'agit ici. Russell s'explique à ce sujet avant de parler du Calcul des propositions ; et c'est légitime. « Une proposition est, pouvons-nous dire,— écrit-il, — tout ce qui est vrai ou qui est faux » (50). C'est en somme, une assertion au sujet de tout ce que l'on voudra, ce que M. Goblot, lui, appelle « un jugement », — quand il distingue le jugement de la proposition, pour ne réserver le nom de « proposition » qu'à l'expression grammaticale que revêt une assertion déterminée. Mais pour qu'une expression soit susceptible de vérité ou de fausseté, il ne faut pas qu'elle contienne de terme indéterminé, de « variable » capable de prendre différentes valeurs, sinon elle n'est ni vraie ni fausse ; sa vérité en effet, ou sa fausseté, dépend de la valeur attribuée à l'indéterminé. « x est un homme », dit encore B. Russell, n'est pas une proposition car, ce n'est ni vrai ni faux. Si nous donnons à x n'importe quelle valeur constante qu'il nous plaira, l'expression, alors, devient une proposition. Elle est telle qu'elle, pareille à une forme schématique, pouvant servir à l'une quelconque des propositions de toute une classe de propositions » (51).

Mais il convient de ne pas faire de confusions. Nous pouvons avoir affaire à une assertion de la forme de celle-ci : « x est homme implique x est mortel, pour toute valeur de x où il s'agit, « non d'une seule mplication mais de toute une classe d'implications ; il y a cependant, maintenant, une véritable proposition, dans laquelle, bien qu'apparaît la lettre x, il n'y a pas de variable à proprement parler ; la variable est absorbée d'une manière semblable à l'x sous le signe d'intégration d'une intégrale définie, de sorte que le résultat, n'est plus une fonction de x » (52). En effet, les valeurs les plus diverses attribuées à x ne changent rien à la proposition dont il s'agit, c'est-à-dire à celle qui affirme que l'humanité implique toujours la mortalité. Cette proposition est bien déterminée, et la détermination la plus stricte de « x » n'ajouterait rien à sa vérité. Tandis que, au contraire, « x est homme » est, selon les valeurs de x, vraie ou fausse, — vraie si, par exemple on remplace x par « Paul », fausse si on

(50) **B. Russell.** Idem, pp. 12-13.
(51) **B. Russell.** Idem, p. 13.
(52) **B. Russell.** Ouvrage déjà cité, p. 13.

remplace x par « cet encrier » ; — en soi elle n'est rien qu'un schéma, comme dit Russell. Les Logisticiens appellent les expressions de cette forme des fonctions propositionnelles. Dans le calcul des propositions, il n'est pas question d'elles , mais uniquement de propositions véritables « où il n'y a pas de variable à proprement parler » (53). Ce qui ne veut pas dire que les propositions elles-mêmes, représentées dans le symbolisme par une lettre, ne jouent pas le rôle de variables. Il suffit qu'elles ne contiennent pas de terme variable (54).

Cela dit, revenons à la notion d'implication. Nous avons dit qu'elle est fondamentale dans la partie de la Logique Symbolique que nous examinons. Comme le remarque Russell, cette notion n'est définissable ni au moyen des idées de vérité et de fausseté (dire que « p implique q » signifie « si p est vrai q est vrai, si p est faux q est faux », n'est pas une définition), ni au moyen de celle de disjonction. — alors que la disjonction, elle, au contraire, peut être définie par l'implication. «En fait, l'assertion que q est vrai ou bien p est faux, revient à être strictement équivalente à « p implique q » ; mais l'équivalence veut dire implication mutuelle » (55).

D'autre part, observons que si l'implication « matérielle » est la notion fondamentale du calcul des propositions, l'implication formelle (des vérités concernant « une variable »), doit aussi y être considérée. Mais elle n'y est pas caractéristique, elle «se présente au cours de tout l'ensemble des mathématiques » (56), alors que l'implication entre propositions distingue le calcul logique dont il s'agit ici.

Il n'est besoin, à la base de ce calcul, d'aucun autre indéfinissable que ces deux notions-là, dont l'une (l'implication formelle) est, nous dit Russell, une « notion complexe ». Ce terme est à retenir. Ces indéfinissables entrent comme matériaux dans un petit nombre (Russell en énumère dix) de propositions indémontrables ou « principes », que les Logisticiens expriment le plus souvent à l'aide des signes conventionnels dont Péano a fait un si ample usage en traduisant,

(53) **B. Russell.** Idem, p. 13.
(54) **B. Russell.** Idem, p. 13.
(55) **B. Russell.** Idem, p. 15.
(56) **B. Russell.** Idem, p. 14.

au moyen d'eux, les propositions des mathématiques — technique qui tend bien à rendre palpable la réduction de toute la Mathématique au Calcul logique.

On trouve ces propositions fondamentales aussi bien dans Russell que dans Couturat, exprimées dans un ordre qui peut n'être pas toujours le même, et dans des termes différents ; cela est indifférent, et nous pourrions nous contenter de renvoyer à ces auteurs (57). Toutefois, l'importance des dits « principes », — de quelques-uns surtout, — est assez grande, dans la théorie logistique en général, pour qu'il semble meilleur d'en rappeler ici toute la liste.

La voici : 1° Quels que soient p et q, p implique q est une proposition ; 2° Tout ce qui implique quelque chose est une proposition ; 3° Tout ce qui est impliqué par quelque chose est une proposition ; 4° Dans une implication, la thèse peut être l'objet d'une assertion indépendante de celle de l'hypothèse ; 5° Si p implique p et q implique q (c'est-à-dire si p et q sont des propositions), alors de « produit logique pq — (nous expliquerons ce qu'on entend par là) — implique p. C'est là le « principe de simplification » ; 6° Le principe du syllogisme, — Couturat spécifie avec raison : du syllogisme hypothétique (58). Si p implique q et q implique r, alors p implique r ; 7° Le principe « d'importation ». Si q implique q et r implique r (si, c'est-à-dire, q et r sont des propositions), et si p implique que q implique r, alors pq implique r ; 8° Le principe d'« exportation » : Si le produit logique pq implique r, alors p implique que q implique r ; 9° Le principe « de composition » : Si p implique q et si p implique r, alors p implique le produit logique qr ; 10° Le principe de réduction : si p implique p et q implique q (si, c'est-à-dire, p et q sont des propositions), alors « p implique q, implique p » (59).

Les neuf premiers de ces principes servent à prouver le principe dit « de contradiction » et le dixième, celui du « milieu exclu ». On voit donc que sur eux repose toute la logique. Russell remarque qu'on aurait pu à la place du dixième, en choisir un autre, peut-être apparemment plus évident, équivalent à lui. Mais le « principe de réduction » est « pour des

(57) **Russell.** « The Principles of Mathematics », pp. 16-17. **L. Couturat.** « Principes des Mathématiques », pp. 8 à 15.

(58) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 10.

(59) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 16.

raisons formelles, de toute façon « plus simple » que n'importe laquelle des alternatives possibles. C'est pour cela qu'il a été compris dans les principes fondamentaux de préférence à des propositions plus courantes et plus superficiellement claires » (60). Cette importance accordée à la simplicité est à relever. L'exemple est aussi à retenir pour éclairer ce que Russell, — et les Logisticiens, — entendent par simplicité logique, et partant, par simplicité mathématique puisque les deux domaines se confondent.

Couturat, lui, qui traduit tous les principes fondamentaux qu'il énumère en symboles, définit le vrai (V) et le faux (Λ) que Russell prend comme des notions primitives. La définition en est la suivante : A ⊃x, x ⊃V. « Le faux implique tout ; le vrai est impliqué par tout » (61). Russell déclare la même chose en termes presque les mêmes, avec la différence que cette affirmation est, pour lui, une conséquence de la notion d'implication (62). De même le « principe de contraposition », que Couturat admet pour démontrer que la négative d'une proposition est unique, et qu'il formule : que « p ⊃q. ⊃. -q ⊃ -p. ». (Si p implique q, non-q implique non-p ») (63), serait, semble-t-il, pour Russell, une conséquence, ou plutôt une autre forme du « principe de réduction (64).

De même, alors que Russell fait des principes « d'importation » et « d'exportation » des propositions indémontrables et fondamentales, Couturat les déduit d'un « principe d'assertion : « p = (p = V), -p = (p = Λ) quelque soit p » (65). Ces différences toutefois (et nous n'en signalons qu'entre deux logisticiens. On en en pourrait relever entre tous), ne doivent pas nous impressionner. Le fond de la théorie exposée ici et là est bien le même, et, surtout, les conséquences qui en sont tirées en ce qui concerne l'interprétation des mathématiques, sont identiques.

Nous avons déjà rappelé que l'importante notion d'équivalence de deux propositions signifie leur implification mu-

---

(60) **B. Russell.** Idem, p. 17.
(61) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 12.
(62) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 15.
(63) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 14.
(64) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 17
(65) **L. Couturat.** Ouvrage cité, pp. 14-15

tuelle (66). Dans l'exposé des principes il a été plus d'une fois fait appel à l'idée de «produit logique ». Le produit logique de deux ou plusieurs propositions, c'est « l'affirmation simultanée de ces proposition » (67). La disjonction, ou « somme logique » de deux propositions p et q, dont nous avons encore besoin dans le calcul des propositions et dans la suite, est « une proposition s qui est impliquée par chacune d'elles, et qui implique toute proposition impliquée par chacune d'elles.

$$p \supset s.\ q \supset s.\ p \supset x.\ q \supset x.\ s \supset x$$

La somme logique de deux propositions est leur alternative et s'écrit $p \cup q$. (p ou q) (68).

Ces deux notions de somme et de produit logiques sont très importantes par leur corrélation avec la somme et le produit mathématique, tels que les Logisticiens les définissent. A la définition de la somme logique, ou disjonction, est liée celle de la négation : « non p » est équivalent à l'assertion que p implique toutes les propositions, — c'est-à-dire que p est une proposition fausse, comme le montre Russell. Et « d'à partir de là, on peut prouver les principes de contradiction et du milieu exclu, et de la double négation, et établir toutes les propriétés formelles de la multiplication et de l'addition logique, — leurs lois associative, commutative et distributive. D'où la logique des propositions est maintenant complète » (69).

2° *Le Calcul des Classes,* logiquement postérieur au calcul des propositions, si comme l'admet Russell, et aussi Couturat, l'idée de classe est « dérivée, subordonnée à celle de proposition » (70), forme, comme lui, une branche très importante de la Logique Symbolique. Il peut être développé, soit en prenant comme notions fondamentales et indéfinissables la notion de classe et celle de la relation d'individu à classe (représentée par les Logisticiens par la lettre ε) ainsi que le veut Péano, soit, comme le fait Russel « pour des raisons de commodité formelle » (71), en tenant pour telles la relation ε, la notion de fonction propo-

(66) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 15.
(67) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 18.
(68) **L. Couturat.** Idem, p. 12.
(69) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 18.
(70) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 16.
(71) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 18.

sitionnelle (dont nous avons parlé précédemment), et la notion de « tel que », qui est, en quelque sorte, son complément.

On insiste dans les ouvrages de logistique, en particulier chez Peano et Russell, sur la distinction à établir entre la relation ε, (d'individu à classe) et celle de partie à tout, à la fois, semble-t-il, parce que cette distinction utile n'a guère été faite auparavant par les auteurs (72), et parce que les Logisticiens lui attachent de l'importance en ce qui concerne l'application de la Logique Symbolique à l'interprétation des mathématiques. Russell relève, entre autres, que « la relation de la partie au tout est transitive, alors que celle de l'individu à la classe à laquelle il appartient, ne l'est pas » (73). C'est dire que ces deux relations n'ont pas les mêmes propriétés formelles. C'est là, en effet, ce qui du point de vue des logisticiens, fait surtout, fait même seulement, que deux relations sont à distinguer.

On insiste aussi sur la distinction entre la classe proprement dite (l'ensemble des individus qui la composent, autrement dit l'extension du concept), et le concept, vu dans sa compréhension, la relation ε devant être étendue de la classe proprement dite : Socrate ε homme, signifiant, par exemple : Socrate est un homme.

Nous avons dit plus haut ce qui s'entend par «fonction propositionnelle », ou expression de la forme grammaticale d'une proposition, mais contenant au moins un terme indéterminé, « variable », et nous avons vu que ces expressions deviennent vraies ou fausses, — se transforment, c'est-à-dire, en propositions, — dès qu'on donne une valeur à la variable. Il en est qui, pour toutes les valeurs de la variable possibles, deviennent forcément des propositions vraies, et Russell pense (74) qu'il s'agit alors toujours d'implications entre deux concepts, en d'autres termes, de « classes d'implications », sans pouvoir, toutefois, le prouver.

Les équations mathématiques, sont, pour lui, assimilables à un cas particulier de fonctions propositionnelles et leurs ra-

---

(72) **B. Russell**, en excepte toutefois le mathématicien Frege. Ouvrage cité, p. 19.

(73) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 19.

(74) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 20.

cines sont les valeurs satisfaisantes de la variable (75), vue qui n'est qu'une anticipation de l'identification complète des mathématiques à une branche spéciale de la Logique générale. Et la « classe », notion tout à fait importante, est définie comme « l'ensemble des valeurs d'une variable telles que une certaine fonction propositionnelle de cette variable devienne, pour chacune d'elles, une proposition vraie » (76).

Ceci établi, le calcul des classes a besoin encore de deux propositions fondamentales, indémontrables : la première est que « si x appartient à la classe des termes qui transforment en proposition vraie une fonction propositionnelle $\varphi(x)$, alors $\varphi(x)$ est vraie ». La seconde, que « si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des propositions équivalentes pour toutes les valeurs de x, alors la classe des x tels que $\varphi(x)$ soit une proposition vraie, est identique à la classe des x tels que $\psi(x)$ soit proposition vraie » (77). On définit l'identité en disant que « x est identique à y si y appartient à toute classe à laquelle appartient x » (78). Russell remarque que tout ce qu'il dit là des classes s'applique à la classe proprement dite (en extension), et non au « concept-classe » qui en est distinct. Toutefois, dit-il, il n'est pas nécessaire, dès la Logique Symbolique, de faire appel au point de vue extensionniste des classes si on a soin « de distinguer l'égalité des classes, définie comme leur inclusion mutuelle, de l'identité des individus. Formellement, les deux sont entièrement distincts : l'identité est définie comme ci-dessus, l'égalité, elle, de a et de b, est définie par l'équivalence de « x est un a » et de « x est un b » pour toute valeur de x » (79).

On voit, dès maintenant l'importance, en somme très grande, de la notion de fonction propositionnelle dans le « Calcul des Classes ».

L. Couturat, après avoir rappelé la différence entre l'implication matérielle et l'implication formelle, cette « espèce d'implication qui existe entre deux fonctions propositionnelles contenant les mêmes variables, et qui vaut pour toutes les valeurs possibles de ces variables », qui « enveloppe l'affirma-

---

(75) **B. Russell.** Idem, p. 20.
(76) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 17. — **B. Russell**, ouvrage cité, p. 20.
(77) **B. Russell.** Idem, p. 20.
(78) **B. Russell.** Idem, p. 20.
(79) **B. Russell.** Idem, p. 21.

tion d'une multitude d'implications matérielles » (80), dit que « cette implication équivaut à la relation d'inclusion entre classes, de sorte que le calcul des classes coïncide avec celui des fonctions propositionnelles, tandis qu'il ne coïncide pas avec celui des propositions » (81).

La correspondance des classes aux fonctions propositionnelles est uniforme, c'est-à-dire que « si les deux fonctions propositionnelles $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont équivalentes, les classes correspondantes sont égales » (82). Grâce à cette correspondance, on peut, entre les classes, définir des relations analogues à celles qui existent entre propositions. « La plupart des propositions du Calcul des Classes sont facilement déduites de celles du Calcul des propositions » (83). La relation d'inclusion entre deux classes correspond à celle d'implication entre deux propositions, celle d'égalité entre deux classes à celle d'équivalence entre propositions, etc. On définit le « produit logique » de deux classes a et b, « l'ensemble des individus qui appartiennent à la fois à a et à b » (84), la « classe des x tels que le produit logique de « x est un a » et « x est un b », soit vrai » (85). On définit parallèlement la « somme logique » de deux classes, — l'ensemble des individus qui appartiennent soit à l'une, soit à l'autre, « des x qui sont soit des a, soit des b » (86), — et la négation d'une classe.

« Les lois formelles de l'addition, de la multiplication, de la tantologie et de la négation sont les mêmes (87) en ce qui concerne les classes et les propositions. La loi de tantologie stipule qu'aucun changement n'est produit quand une classe ou une proposition est additionnée à elle-même, ou multipliée (logiquement) par elle-même » (88). Ceci est très important dans la théorie logistique, car c'est à ces lois formelles qu'on s'en référera pour établir la correspondance entre la Logique Symbolique et les mathématiques, bien plus, leur identité « au

(80) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 21.
(81) **L. Couturat.** Idem, p. 24.
(82) **L. Couturat.** Idem, p. 18.
(83) **B Russell.** Ouvrage cité, p. 21.
(84) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 19.
(85) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 21.
(86) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 19.
(87) C'est nous qui soulignons ce mot.
(88) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 23

fond ». Une notion nouvelle du Calcul des Classes, qui n'a pas son pendant dans le Calcul des Propositions, est celle des « classes de classes », importante elle aussi du point de vue de la critique mathématique puisque le nombre, cette entité jusqu'à eux considérée comme le fondement des sciences mathématiques, est traité par nos auteurs comme une « classe de classes » aussi que nous le verrons. « Si k est une classe de classes, son produit logique est la classe des termes appartenant à chacune des classes de k... Sa « somme logique » est la classe qui est contenue dans chaque classe dans laquelle toute classe de la classe k est contenue » (89). Une autre notion, — dont nous retrouverons le correspondant en mathématiques, — est la « classe nulle », celle qui n'a pas de termes, qu'on peut définir de plusieurs façons, toutes équivalentes, qui reviennent toutes à dire que « c'est la classe des x qui satisfont à n'importe quelle fonction propositionnelle $\varphi(x)$ qui est fausse pour toutes les valeurs de x » (90).

3° *Le calcul des Relations,* troisième et dernière partie de la Logique Symbolique est également très important. — « La Logique des relations, dit Russell, a une portée mathématique plus immédiate que celle des classes ou des propositions » car « une analyse soigneuse du raisonnement mathématique montre que les types de relations, en sont la matière véritable, le sujet réellement en question » (91).

La notion même de relation est indéfinissable. On ne peut dire « ce » qu'elle est, on ne peut qu'en décrire les propriétés et chercher à énoncer les lois qui les régissent. Si on désigne une relation par la lettre R, on écrit xRy la fonction propositionnelle : « x est lié à y par la relation R ». Le premier axiome que formulent les Logisticiens sur le compte des relations, énonce que « nous avons besoin d'une proposition primitive (indémontrable) pour exprimer que xRy est une proposition pour toute valeur de x et de y » (92). C'est la répétition de notre affirmation qu'une relation ne se dé-

---

(89) **B. Russell.** Idem, p. 21.

(90) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 25. — **B. Russell,** ouvrage cité, p. 23.

(91) **B. Russell.** Ouvrage cité, pp. 23-24.

(92) **B. Russell.** Idem, p. 24. — **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 29.

finit pas, qu'il faut en postuler l'idée qui échappe à toute analyse.

Toute relation a un sens. La « paternité » est la relation de père « à » fils ou fille. Autre chose est la relation de fils à père. On appelle « domaine » d'une relation xRy, la classe formée par l'ensemble des x, ou antécédents de la relation (93). Son « co-domaine est la classe formée par l'ensemble de ses conséquents » (94). « L'ensemble des pères forme le domaine de la relation de paternité. L'ensemble des enfants forme le co-domaine de la même relation » (95). Le champ de la relation est l'ensemble de son domaine et de son co-domaine, la « somme logique » de la classe de ses antécédents et de celle de ses conséquents.

Il y a, concernant les relations, des propositions indémontrables ou « axiomes », autres que celle que nous avons énoncées plus haut. Telle, celle qui énonce que « Toute relation a sa converse », c'est-à-dire, « si R est une relation, il y a une relation R' telle que xRy est équivalent à yR'x pour toutes les valeurs de x et de y » (96). Telles encore, celles qui énoncent 1° que « toute relation a sa négative, qui est une relation » (97). 2° que « entre deux termes quelconques il existe une relation qui n'existe pas entre deux autres termes quels qu'ils soient » (98) — proposition très importante qu'on peut rapprocher du principe qui veut que tout terme soit « le membre unique d'une certaine classe ». (99), mais qui ne peut pas, elle, se prouver, étant donnée la position, extentioniste quant à la conception des classes de la plupart des auteurs classiques de la logistique ; 3° enfin, que le « produit logique d'une classe de relations est une relation ainsi que le produit logique de deux relations

(93) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 28. — **B. Russell** : The class of terms which I call referents with respect to R. Ouvrage cité, p. 24.

(94) **L. Couturat.** Idem, p. 28. — **B. Russell.** Idem, p. 24 : The class of relata.

(95) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 24.

(96) **B. Russell.** Idem, p. 25.

(97) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 30.

(98) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 25.

(99) **B. Russell.** Idem, p. 25.

seulement) (100) ; 4° que le produit relatif de deux relations (qu'il convient de ne pas confondre avec leur produit logique) est une relation (101).

Le produit logique de deux relations R_1 et R_2 est la relation qui existe entre deux termes x et y dès que les deux relations R_1 et R_2 existent à la fois entre eux (102). La multiplication logique est commutative. Le «produit relatif » de deux relations (R et S par exemple, pour suivre de plus près Russell), « est la relation qui existe entre deux termes x et z toutes les fois qu'il y a un terme y tel qu'entre x et y il existe la relation R alors qu'entre z et y il existe la relation S. Telle la relation du grand-père maternel envers son petit-fils, est le « produit relatif » des relations de père et mère ; celle de grand'mère paternelle, est le produit relatif de celles de mère et de père, etc.» (103). La multiplication relative diffère de la multiplication logique, entre autres, du fait qu'elle n'est pas, elle, commutative, c'est-à-dire que, si on représente par exemple par $(R^{\times}S)$ la relation complexe, produit relatif de R et de S, on n'a pas : $(R^{\times}S) = (S^{\times}R)$.

On définit encore la somme logique de deux relations. « C'est la relation qui existe entre deux termes x et y, dès qu'il existe entre eux l'une des relations R_1 ou R_2 » (104).

On dit qu'une relation R_1 est contenue dans une relation R_2 lorsque toutes les fois qu'on a xR_1y, on a aussi xR_2y, quels que soient x et y (105). Deux relations sont dites égales quand elles sont contenues réciproquement l'une dans l'autre, quand, en d'autres termes leur inclusion est mutuelle.

Les relations se distinguent l'une de l'autre, logiquement, — et mathématiquement, — par leurs propriétés formelles. Nous avons défini plus haut ce qu'on entend par « propriétés formelles » (106). Nous n'y reviendront pas. On dit qu'une relation R est « symétrique » si quels que soient les termes x et y entre lesquels elle est sensée exister, on a forcément, nécessairement, yRx, dès que l'on a xRy. Dans le cas contraire elle est non-symétrique. Elle est asymétrique, par

(100) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 25.
(101) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 30.
(102) **L. Couturat.** Idem, p. 32.
(103) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 25.
(104) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 32.
(105) **L. Couturat.** Idem, p. 32.
(106) Voir plus haut : p. 121.

essence, dans les cas où jamais, quels que soient x et y, on n'a à la fois xRy et yRx. L'égalité est une relation symétrique ; les relations de « plus grand que », « plus petit que » sont asymétriques.

Une relation R est dite « transitive » si l'affirmation de xRy et de yRz entraîne nécessairement l'affirmation de xRz. Elle est non transitive, si cette nécessité n'est pas un fait. Elle est intransitive dans les cas où la nécessité contraire est un fait. — dans les cas ou xRy et yRz excluent l'affirmation xRz.

Une relation est dite uniforme si, a chaque antécédent correspond un conséquent, et un seulement, quand, en d'autres termes, xRy et xRz, impliquent, quel que soit x, l'identité des termes y et z. Si la converse de la relation (yRx, s'il s'agit d'une relation xRy) est, elle aussi, uniforme, selon qu'il vient d'être défini, alors on dit que la relation (xRy) est bi-uniforme.

De toutes ces considérations sur les relations (très succinctes, ici, car nous ne faisons que les rappeler) (107), on déduit un certain nombre de « théorèmes » de Logique, que tout raisonnement mathématique suppose, sans qu'on ait songé à les « formuler » à propos de lui, directement. Tel par exemple. « Le produit relatif d'une relation uniforme et de sa converse est une relation transitive symétrique », qui a pour réciproque, également vraie : « Toute relation transitive et symétrique, non nulle, peut être considérée comme le produit relatif d'une relation uniforme et de sa converse, autrement dit, peut être analysée en deux relations uniformes de même espèce et de même sens qui unissent ses deux termes à un troisième » (108). Tous ces théorèmes se démontrent rigoureusement. Leur corps constitue une partie très solide et très importante de la Logique Symbolique. D'eux, et des axiomes sus-dits, on déduit d'importantes propositions concernant à la fois les relations et les classes. Couturat, dans son ouvrage tant de fois cité, en a relevé trois (109). Mais nous n'insisterons pas davantage. Le peu que nous avons dit du Calcul des Proposition, du Calcul des Classes, et du Calcul

(107) Voir les développements dans les ouvrages cités par **L. Couturat** (pp. 30-33) et de **B. Russell** (pp. 23-26).

(108) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 33.

(109) **L. Couturat.** Idem, p. 34.

des Relations, en suivant d'aussi près que possible deux grands « logisticiens », mathématiciens en même temps que philosophes, suffit, semble-t-il, à donner une certaine idée du domaine et de la méthode de la Logique Symbolique. Il nous reste maintenant à montrer l'importance de cette « Logique » en ce qui concerne l'interprétation des Mathématiques, aux yeux de la même école.

La logique symbolique et les mathématiques. — Les éléments de la Logique symbolique, dit Couturat « suffisent à fonder toutes les mathématiques pures » (110). Quant à Russell, après avoir dit de la Logique Symbolique tout ce qu'il avait à en dire, il écrit : « Les mathématiques ne nécessitent, tant que je sache, que deux autres propositions primitives, l'une affirmant que l'implication matérielle (111) est une relation, l'autre que ∈ (la relation d'un terme individuel à la classe à laquelle il appartient) est une relation. Nous pouvons maintenant développer le corps entier des mathématiques sans poser de nouveaux indéfinissables » (112). Et nous n'avons, ici, parlé de la Logique Symbolique, que parce que, pour se rendre compte comment les Logisticiens arrivent à y ramener le corps entier des mathématiques (désormais visiblement reconnu non indépendant) et comment cette « dépendance » a sa répercussion sur la manière juste d'envisager toute notion qui, entre autres, peut être regardée comme « mathématique » — telle la notion de simplicité — il faut, semble-t-il, se représenter, au moins en gros, ce que sont la méthode et les matériaux de cette Logique « générale ». La question que nous envisageons maintenant est celle-ci : comment la Mathématique se ramène-t-elle, à la Logique Symbolique ? La méthode logique, remarque encore Couturat, « consiste en un double processus de réduction : réduction des notions les unes aux autres par la définition, et réduction des propositions les unes aux autres par la démonstration. Démontrer une proposition, c'est la déduire de certaines autres, admises ou données comme vraies, au moyen des seuls principes de la logique » (113). Et tout l'effort des Logisticiens porte sur ces trois points : 1° Que « il n'y a pas d'autre mode de démonstration

(110) **L. Couturat.** Idem, p. 34.
(111) Définie plus haut. Voir p. 123.
(112) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 26.
(113) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 35. — C'est nous qui soulignons la fin de la citation.

en mathématique que ceux valables en Logique », tout autre procédé de raisonnement étant « considéré comme illégitime, au moins comme moyen de démonstration, et ne pouvant servir tout au plus que comme moyend'invention » (114) ; 2° Que toutes les notions fondamentales des mathématiques, tant de l'arithmétique et de l'algèbre que de la géométrie ou de la mécanique, sont susceptibles d'une définition purement logique, avec laquelle l'intuition n'a rien à voir ; 3° Que tous les ensembles d'axiomes qui fondent chacune des branches de la mathématique (chacune des géométries par exemple), sont réduisibles à de pures constructions logiques dans lesquelles il n'y a pas place pour d'autres élément que les notions de Logique Symbolique.

C'est surtout sur ces deux derniers points que les logisticiens s'appesantissent, constatant, toutes les fois qu'ils en ont l'occasion, qu'ainsi qu'à la « pureté logique des concepts », « les mathématiciens modernes ont constamment tendu à la rigueur déductive des raisonnements » (115), et dénonçant le caractère non-mathématique de tout raisonnement, quelles que soient ses prémisses et sa conclusion, s'il se permet, pour passer des unes à l'autre, de faire, pour aussi peu que ce soit, appel à l'intuition, spatiale ou autre.

Parmi les notions fondamentales des mathématiques dont la « pureté logique » a été établie avec le plus d'insistance, compte celle de nombre. Il est classique de considérer à part le nombre cardinal et le nombre ordinal, soit pour tirer la définition de l'un des deux, de celle de l'autre, comme plusieurs mathématiciens l'ont tenté, soit pour montrer qu'on peut les définir séparément, indépendamment l'un de l'autre. Cette dernière position est celle qu'adoptent les Logisticiens.

Ils sont d'accord, d'autre part, pour s'élever avec une égale énergie contre l'opinion admise par certains philosophes, que la notion de nombre résulte, dérive, de celle du dénombrement, en d'autres termes, qu'elle a une origine empirique. La définition, observent-ils, du nombre au moyen de l'idée de dénombrement constitue un cercle vicieux, car tout acte de « compter » présuppose la notion de nombre, de quelque façon qu'en l'envisage (116). Cette notion lui est logiquement

---

(114) **L. Couturat.** Idem, p. 35.
(115) **L. Couturat.** Ouvrage cité. Avant-propos, p. V.
(116) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 45.

antérieure, et ne peut donc être définie, si elle est définissable, qu'indépendamment de lui.

Russell remarque — et là est le point important qui va lui permettre de rattacher la définition du nombre et des opérations mathématiques se rapportant à lui, à celles de la Logique Symbolique, — que « les nombres sont, on doit le reconnaître, essentiellement applicables aux classes » (117). Il est vrai, ajoute-t-il que, lorsqu'il s'agit d'un nombre fini, on peut le constituer par une énumération complète d'individus, comptés un à un, sans appel aucun au concept-classe. Mais toute collection finie d'objets forme une classe, ce qui fait que le résultat (de l'énumération) est, après tout, le nombre d'une classe. Et lorsqu'il s'agit d'un nombre infini, les individus ne peuvent pas être énumérés, mais doivent être définis en compréhension, par quelque propriété commune en vertu de laquelle ils forment une classe. D'où, dès qu'un concept-classe est donné, il y a un certain nombre d'individus auxquels il est applicable, et le nombre peut, de ce fait, être regardé comme une propriété de la classe » (118). Vue très intéressante par sa généralité car « elle rend possible la théorie de l'infini tout entière du fait qu'elle nous libère de la nécessité d'énumérer les individus desquels on considère lle nombre » (119).

Pour dégager quelle est cette propriété des classes qu'on appelle leur nombre, il convient de comparer, deux classes telles que l'on dise qu'elles ont le même nombre quant aux caractères logiques de leur relation, et de remarquer que, dans ce cas, «on peut établir entre leurs éléments une correspondance univoque et réciproque, c'est-à-dire une relation biuniforme », que, en d'autres termes, elles sont équivalentes » (120). Cette définition du nombre comme le remarque Russell et Couturat après lui, est indépendante de la notion de 1. L'unité d'un élément considéré est une propriété de cet élément, tandis que le nombre 1 est la « propriété d'une certaine classe », comme tout autre nombre (121). La notion de 1 (comme élément) serait-elle même tout

(117) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 112.
(118) **B. Russell.** Idem, p. 113. — C'est nous qui soulignons les derniers mots. — **Péano.** F. 1901, 532. o. Note,
(119) **B. Russell.** Idem, p. 113.
(120) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 47.
(121) **L. Couturat.** Idem, p. 48.

empirique, que la définition du nombre n'en demeurerait pas moins « purement logique » (122).

Mais cette définition peut être critiquée. « Rien n'assure, d'une part, que les classes équivalentes ont une propriété commune, et, d'autre part qu'elles n'ont qu'une propriété commune » (123). On peut remédier à cette insuffisance, d'une manière applicable à tous les cas où on a affaire à une définition « par abstraction » comme celle-ci, « en définissant comme « nombre » d'une classe, la classe de toutes les classes similaires à la classe donnée. Etre membre de cette classe de classes c'est avoir une certaine propriété qu'ont toutes les classes similaires, et pas d'autres ; plus encore, toute classe de la collection de classes similaires a, envers la collection, une relation qu'elle n'a envers rien autre, et que chaque classe a envers sa propre collection. D'où les conditions requises (pour une bonne définition du nombre), sont complètement remplies par cette « classe de classes », laquelle a l'avantage d'être déterminée dès qu'une classe est donnée, et d'être différente pour deux classes qui ne sont point similaires. Cette définition du nombre d'une classe, en termes purement logiques, est donc irréprochable » (124).

Cette définition, justifiée également par L. Couturat (125), est adoptée par l'école logistique. Elle présente, comme nous

---

(122) **L. Couturat.** Idem, p. 47.

(123) **L. Couturat.** Idem, p. 49.

(124) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 115.

(125) **L. Couturat.** Ouvrage cité, pp. 48-49 : En effet, la relation d'équivalence est symétrique et transitive : si deux classes A et B sont équivalentes à une même classe C, elles sont équivalentes entre elles. Par suite, et plus généralement, si deux classes A et B sont équivalentes, les concepts « classe équivalente à A » et « classe équivalente à B » auront la même extension, c'est-à-dire, détermineront la même classe de classes. (Frege : Grund'agen der Arithmetik, § 73). On a ainsi les deux propositions réciproques suivantes : « Deux classes de la même classe ont le même nombre », et « deux classes qui ont le même nombre appartiennent à la même classe », (d'où, par contraposition : deux classes appartenant à des classes différentes ont des nombres différents). Il y a donc une correspondance bi-uniforme entre les nombres cardinaux et les classes de classes. Mais alors il existe au moins une entité, et une entité unique qui correspond à chaque nombre cardinal, et c'est précisément la classe des classes qui sont dites avoir le nombre. On peut donc considérer cette classe de classes comme représentant le nombre cardinal correspondant. »

l'avons dit, l'avantage — considérable — d'englober aussi bien les nombres infinis que les nombres finis, introduisant de la sorte, dès les principes, dans les mathématiques l'affirmation en même temps que la justification de l'unité foncière de tout leur développement, depuis l'arithmétique élémentaire jusqu'au calcul infinitésimal, y compris ; unité que les mathématiciens, au cours du siècle dernier, ont de plus en plus fait ressortir. De plus, elle est, comme l'ont répété tous ceux qui l'ont mise en avant « purement logique », et l'on ne saurait trop insister sur l'importance de ce point.

La thèse des Logisticiens peut se résumer : l'assimilation de la Mathématique à la Logique pure. Or, réussir à définir sans référence à d'autre notion que celle de classe, le nombre, notion fondamentale des mathématiques, c'est faire un très grand pas dans le sens de la démonstration de cette thèse ; c'est montrer, comme l'a mis en évidence Russell, la fonction logique du nombre, en laquelle réside toute son « existence », et, par conséquent, la signification logique de tous les calculs qui reposent sur lui, c'est-à-dire de toutes les opérations mathématiques du fini et de l'infini. « Partout où les mathématiques font dériver une propriété commune d'une relation reflexive, symétrique et transitive, écrit Russell, le rôle mathématique de cette propriété est complètement rempli, quand celle-ci est remplacée par la classe des termes qui ont, avec un terme donné, la relation en question ; et c'est là précisément le cas des nombres cardinaux. Pour ce, je m'en tiendrai à la définition donnée plus haut (de ces nombres), puisqu'à la fois elle est précise, et adéquate à tout usage mathématique » (126).

Une fois le nombre entier, — fini ou infini, répétons-le — défini logiquement, il est aisé de définir ces nombres qui au premier abord semblent avoir quelque chose de particulier. Ce sont des classes de classes comme les autres. On les définit par les propriétés spéciales des classes qui leur appartiennent. C'est ainsi que, loin d'être indispensablement considéré comme dérivant d'une indéfinissable notion extra-logique d'unité, le nombre 1, peut se définir comme « la classe des classes qui ne sont pas nulles, et qui sont telles que si x appartient à une de ces classes, la classe sans x, est la classe nulle, ou encore, telles que si x et y appartiennent l'une de ces

(126). **B. Russell**, Ouvrage cité, p. 116,

classes, alors x et y sont identiques » (127). Le nombre 0, lui, sera « la classe de toutes les classes desquelles le seul membre est la classe nulle » (128), c'est-à-dire, en d'autres termes, « le nombre cardinal de la classe nulle » (129).

On définira de même les opérations fondamentales de l'arithmétique dans sa généralité, l'addition et la multiplication des nombres entiers finis ou infinis (130), en les ramenant à l'addition et à la multiplication logiques, dont nous avons déjà parlé. C'est la notion de disjonction (addition logique) qui est au fond de celle d'addition arithmétique. « Si k est une classe de classes desquelles il n'en existe pas deux qui aient des termes communs, alors, la somme arithmétique des nombres des diverses classes qui composent k est le nombre des termes dans la somme logique de k. Cette définition est absolument générale, et est également applicable, que k ou l'une quelconque de ses classes constituantes soient finies ou infinies » (131). Le nombre obtenu par sommation est essentiellement, est-il dit plus loin, « le nombre de la somme logique d'une certaine classe de classes ou d'une certaine classe similaire de classes similaires » (132).

La multiplication, à son tour, est définie, indépendamment de l'idée d'ordre, elle aussi (et indépendamment de l'addition). Soit k une classe de classes, dont il n'y en a pas deux qui ont un terme commun. Formons ce qu'on appelle la classe « multiplicative » de k, c'est-à-dire la classe dont chacun des termes est une classe formée en choisissant un et un seul des termes de chaque classe appartenant à k. Alors, le nombre des termes dans la classe « multiplicative » de k est

---

(127) **B. Russel.** Idem, p. 128.

(128) **B. Russell.** Idem, p. 128. — **L. Couturat**, p. 60. (Ouvrage cité).

(129) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 58.

(130) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 117.

(131) **B. Russell.** Idem, p. 118.

(132) **B. Russell.** Idem, p. 118. — **L. Couturat,** ouvrage cité, p. 52 : « La somme arithmétique de deux nombres X et B correspondant à deux classes a et b est le nombre cardinal de la somme logique des classes a et b à la condition que ces classes soient disjointes. Cette définition s'étend sans difficulté au cas d'un nombre quelconque de classes disjointes, lors même que ce nombre serait infini. »

le produit de tous les nombres des diverses classes qui composent k » (133).

Le lien qui rattache la multiplication à l'addition peut, grâce à ces définitions, être mis en évidence sur une solide base logique. Russell formule cette relation de la manière suivante : « Soit k une classe de b classes qui s'excluent mutuellement (c'est-à-dire qui n'ont pas de termes communs), classes qui contiennent chacune ces termes, alors la somme classes qui contiennent chacune a termes, alors la somme logique de k contient (a×b) termes » (134). Il est, poursuit-il, aisé, d'après cela, d'obtenir la définition logique d'une « puissance », « de prouver les lois associatives et distributives, et les lois formelles concernant les puissances, telles que $a^b a^c = a^{(b+c)}$. Mais il faut remarquer que l'exponention n'est pas une opération nouvelle et indépendante puisqu'elle est seulement une application de la multiplication... Les puissances doivent, pour ce, être regardées comme simplement des abréviations tenant lieu de produits dans lesquels tous les nombres multipliés entre eux sont égaux » (135).

Les opérations inverses des susdites, soustraction, division, extraction de racines, étant définies à partir d'elles, deviennent, du fait même du caractère purement logique de ces dernières, des opérations purement logiques, elles aussi. Et ainsi, toute l'arithmétique où l'on a affaire à des entiers (que ce soient des nombres finis ou infinis) est considérée par l'école logistique comme fondée sur des définitions qui n'admettent comme éléments que les notions de la Logique Symbolique, et ne s'appuie sur d'autres règles que celles de cette science.

L'infini mathématique lui-même, qui échappe totalement à l'intuition, n'échappe pas à la définition logique, et c'est une preuve de plus que l'on peut reconstruire l'édifice mathématique avec les données de la logique seule. Soit u une classe et soit u' la classe formée en enlevant à u un terme x, d'ailleurs quelconque. « Quand il est possible d'enlever un terme quelconque à u, et de laisser ainsi une classe u' similaire à u, alors on dit que la classe u est infinie. Quand cela

---

(133) **Russell.** Ouvrage cité, p. 119.
(134) **B. Russell.** Idem, p. 119.
(135) **B. Russell.** Idem, p. 120.

n'est pas possible, on dit que c'est une classe finie » (136). De deux classes infinies l'une peut avoir un plus grand nombre de termes que l'autre, et, on sait qu'il y a un nombre infini plus petit que tous les autres nombres infinis. Ce nombre n'est autre que le nombre des nombres entiers, que Russell (137) appelle $\aleph_0$, et qu'il soit le plus petit de son espèce, cela se prouve logiquement. Ce nombre se définit, lui aussi, en ne faisant appel qu'aux notions de la Logique Symbolique dont nous parlons depuis le début. Cantor l'a défini (138). Russell l'a défini (139), et d'autres mathématiciens et logisticiens aussi. Nous n'insisterons pas sur ces définitions.

L'ordre, cette notion si importante en mathématiques, primordiale même selon Couturat (140), en tout cas indispensable à considérer en tout ce qui concerne les séries (qui ne se forment que grâce à elle), est définie à son tour par l' « intérité » (141), c'est-à-dire par l'existence de certaines relations assymétriques particulières. « La moindre proposition ordinale qui peut être formée partout où il existe un ordre, est de la forme : « y est entre x et z » et cette proposition signifie. « Il y a quelque relation assymétrique transitive entre x et y et entre y et x » (142). Et les séries elles-mêmes sont rigoureusement déterminées par les propriétés logiques des relations entre leurs termes, et par elles seules. C'est de telpropriétés qui permettent de départager les séries en « ouvertes » et « fermées », sans que ces mots imagés créent l'illusion d'une part de l'intuition qui interviendrait forcément dans cette distinction. Le nombre ordinal, n par exemple — tout à fait différent, quant à sa signification mathématique, du nombre cardinal n, — est défini comme « la classe des relations de séries de laquelle le domaine a n termes, n étant un nombre cardinal fini » (143), ou, comme dit Couturat. « la classe des classes semblables entre elles (du point de vue de l'extension). Au point de vue de la compréhension, c'est la propriété commune à toutes les classes, c'est-à-dire leur

(136) **B. Russell.** Idem, p. 121.
(137) **B. Russell.** Idem, p. 122.
(138) **Georg Cantor.** « Math. Annalen », vol. XLVI, § 6.
(139) **B. Russell.** Ouvrage cité, pp. 122 et 127.
(140) **L. Couturat.** « Principes des Mathématiques ». Ch. III.
(141) Betweenness.
(142) **B. Russell.** « Principles of Mathématics », p. 127.
(143) **B. Russell.** Idem, p. 243.

type d'ordre (144). — définitions qui exigent une élucidation de la notion de similitude entre classes, à laquelle procèdent les logisticiens, sans faire appel à autre chose qu'à l'idée indéfinissable et primitive de « relation », et à certaines des qualités logiques qui peuvent la particulariser (145), selon leur tendance si marquée de bannir tout intuition de leurs théories. De même le nombre irrationnel, le nombre réel « qui n'est autre qu'une certaine classe de nombres rationnels », (146), et enfin le nombre « complexe », sont définis d'une manière purement logique, sans le moindre appel à l'intuition.

Avec les nombres complexes, nous abandonnons le domaine de la pure arithmétique, car ces nombres impliquent un appel à l'idée essentielle de pluralité de dimensions, ce qui nous introduit déjà dans la géométrie. La distinction entre arithmétique et géométrie, n'est pas, chez les Logisticiens, une distinction de nature. « La géométrie est, dit B. Russell, l'étude des séries qui ont plus d'une dimension » (147). La série, notion mathématique apparentée de très près à celle d'ordre, a été définie auparavant, d'une manière, nous l'avons vu, purement logique. Il en est de même de la notion de dimension. Russell la dégage de la définition de la série à deux dimensions : « Soit, dit-il, quelque relation P transitive assymétrique, qui engendre la série u_1. Soit chaque terme de u_1 une relation transitive assymétrique, qui engendre une série. Soit admis que tout le champ de P forme une série simple de relations assymétiques, et que chacune de celles-ci a pour champ une série simple de termes. Alors, la classe u_2 de termes formant les champs de toutes les relations dans la série engendrée par P, est une série à deux dimensions. En d'autres mots, le champ total d'une classe de relations assymétriques transitives formant une série simple, est une série double. Mais, au lieu de partir de la relation assymétrique P, nous pouvons partir des termes. Soit une classe de termes u_2 desquels l'un quelconque (avec possibilité d'une exception), appartient au champ de l'un, et d'un seul, des termes d'une classe u_1 de relations de série. C'est-à-dire que, si x est un terme de u_2, x est aussi un terme du champ de quelque re-

(144) **L. Couturat.** « Principes des Mathématiques », p. 77.
(145) **L. Couturat.** Idem, p. 77.
(146) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 270.
(147) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 374.

lation de la classe u_1. Soit maintenant u_1 une série. Alors u_2 sera une série double. Ceci semble constituer la définition des séries à deux dimensions » (148). On définirait, cela s'entend, les séries à plus de deux dimensions d'une manière analogue (149).

Cette notion de dimensions élucidée (on voit qu'il ne s'agit en rien de quelque chose qui relève de l'intuition), chacune des parties de la géométrie se développe sur la base de ses axiomes propres. Et non seulement aucun de ces axiomes n'exprime une réalité sensible, mais aucun ne tient sa valeur de sa connexion avec le sentiment d'une telle réalité. L' « espace » est une pure construction de l'esprit, un édifice logique, et chacune des divisions de la géométrie communement admises (géométries projective, descriptive, métrique), correspond à un « point de vue » différent sur cet édifice, à une manière différente d'envisager les rapports entre les « points ». Le « point » lui-même, est un indéfinissable, « une certaine « classe-concept » de laquelle nous affirmons qu'il existe au moins deux, trois ou quatre représentants, selon les circonstances » (150).

Les trois sortes de géométrie se différencient dès qu'il s'agit de la classe de points qu'on appelle « ligne droite ». « La géométrie projective affirme que deux points quelconque déterminent cette classe qui est aussi déterminée par deux autres points quelconques. Cette classe étant considérée comme déterminée en vertu d'une relation entre les deux points, cette relation est symétrique. La géométrie descriptive, au contraire, s'ouvre par l'affirmation d'une relation assymétrique déterminant une ligne droite orientée. Enfin, la géométrie métrique considère la droite dans l'un des sens précédents et lui ajoute, soit une seconde relation entre deux points, en l'espèce la « distance », qui est une grandeur, soit la considération de vecteurs en tant que grandeurs. N'importe laquelle des trois, par un choix convenable d'axiomes, conduira à l'espace euclidien ou non-euclidien que l'on voudra » (151).

---

(148) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 374.
(149) **B. Russell.** Idem, p. 374-375.
(150) **B. Russell.** Idem, p. 382.
(151) **B. Russell.** Idem, p. 382.

Enfin, non seulement l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie tout entière, mais encore la mécanique rationnelle est, en tant que science mathématique pure, construite uniquement sur des notions qui peuvent — qui doivent — être logiquement définies, sans le secours de l'intuition. « Les points matériels, écrit encore Russell, sont remplacés par des relations particulières de tous les moments à certains lieux, c'est-à-dire, de tous les termes d'une série continue t, à une dimension, à certains termes d'une série continue s, à trois dimensions. Le mouvement, — cette notion fondamentale de la mécanique, — « consiste, en gros dans la corrélation de différents termes de t avec différents termes de s » (152). Bref comme le dit encore Russell, auquel nous nous sommes si souvent référés, on peut « définir en langage logique le monde mécanique » (153) parce que, ce monde mécanique est entièrement exprimable en langage mathématique, et que, de ces deux langages, le second se ramène au premier, bien plus, tire sa valeur et sa solidité, de ce qu'on peut le ramener intégralement au premier.

En somme, et pour résumer, nous voyons que, pour les Logisticiens, qu'il s'agisse de Russell, de Couturat, ou de ceux qui les ont précédés, et aux travaux desquels ils doivent l'esprit et les bases de leur doctrine, les idées essentielles de la philosophie mathématique sont que

1° Les notions fondamentales de la mathématique, — de quelque branche qu'il s'agisse, — sont de nature logique, non empirique. C'est, par exemple, l'idée logique de cette « classe de classes » qu'on appelle nombre, présente dans l'esprit quoique non tirée au clair, qui permet le dénombrement ; et ce n'est pas le dénombrement qui donne, par abstraction,

---

(152) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 473 : Suit la citation du passage suivant :

« A relation R. which has a single term of s for it's converse domain corresponds to a material particle which is at rest through all time. A relation R, which correlates all the terms of t, in a certain interval, with a single term of s, corresponds to a material particle, which is at rest through the interval, with the possible exclusion of it's end terms (il any), which may be terms of transition between rest and motion. A time of momentanary rest is given by any term for which the differential coefficient of motion is zero... » **B. Russell**, ouvrage cité, p. 473.

(153) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 480.

naissance à l'idée de nombre. C'est l'idée logique de relation assymétrique entre deux termes, et non pas le fait empirique de l'arrangement en série, qui est à la base de « l'ordre », et par suite de toutes spéculations mathématiques ou celui-ci joue un rôle primordial, etc., etc. Il en est de même des autres notions.

2° Les axiones des mathématiques, quels qu'ils soient, sont de pures conventions de l'esprit qui ne tirent aucune valeur de la part d'intuition, — s'il en est une, — qui a pu pousser à les choisir.

3° L'édifice que forme chacune des différentes branches des mathématiques, est constitué par un enchaînement, ou plutôt par la possibilité d'un grand nombre d'enchaînements de proposition vraies. Le passage de l'une à l'autre est, dans tous les cas, une opération de nature purement logique — nullement empirique ou dynamique.

De cette manière, comme le remarque L. Brunschvicg dans sa critique, « la mathématique pourra se constituer sur le plan le plus vaste sans faire appel à d'autres principes que la logique » (154). Il nous reste après ce rappel de la doctrine des Logisticiens, à examiner comment, sur les bases d'une telle doctrine, la simplicité mathématique semble être conçue par eux.

---

(154) **L. Brunschvicg**. « Les étapes de la philosophie mathématique », p. 390.

CHAPITRE VII

CE QUE LES LOGISTICIENS ENTENDENT PAR « SIMPLICITE » DANS LES ENCHAINEMENTS MATHEMATIQUES

Quand, dans la premiere partie de cette étude (chapitre IV), nous avons insisté sur la nécessité de séparer, comme le fait J. Nicod, l'idée de simplicité envisagée dans les « enchaînements » mathématiques, de celle de la simplicité des « notions mathématiques », nous avons noté chez les mathématiciens, une tendance à rechercher surtout la première. Et il n'est pas surprenant que, pour eux, ce soit la plus importante, toute leur œuvre semblant être, avant tout, une œuvre de construction ordonnée. Nous commencerons donc l'examen de la conception logisticienne de l'idée du simple, en ayant en vue la simplicité des « enchaînements ».

Et, tout d'abord, qu'est-ce, exactement, que l'on peut appeler un « enchaînement » par opposition à une « notion » mathématique ? Il semble qu'il s'agisse là d'une distinction, bien moins de « choses » que de « points de vue ». La preuve en est que, souvent le même « tout » mathématique (constitué, par exemple, par une proposition), peut être envisagée, tantôt comme un « enchaînement ». et tantôt, sinon comme une notion mathématique, du moins, comme un élément au sein d'un enchaînement. Soit, en effet, une démonstration. Les propositions, de l'une à l'autre desquelles on passe, y sont traitées comme des éléments, comme des pièces détachables au moins, quoique toutes indispensables. Ce que l'on considère comme « enchaînement », c'est, ici, la démonstration elle-même, c'est-à-dire la suite ordonnée des propositions, l'ensemble, autrement dit, des liens, mis en évidence entre l'une et les autres. On pourrait remplacer le contenu de chaque proposition par un contenu différent, à condition que les caractères logiques en soient les mêmes, et que, par suite, chaque proposition con-

tinue à faire, par rapports aux autres, la même figure. La démonstration restera, au fond, *la même*. En particulier, son degré de plus ou moins grande simplicité *mathématique*, restera le même du point de vue de l'école des Logisticiens, en raison de ce que, de ce point de vue, — comme il ressort de tout ce qui vient d'être dit précédemment, — cette simplicité n'est autre que la simplicité logique.

Mais, d'autre part, chacune de ces propositions peut être considérée comme un « enchaînement » par rapport aux idées qui y sont rapprochées, et qui, elles, en constituent, en quelque sorte, les « éléments ». Elle exprime, en effet, entre ces idées, une certaine relation ou suite de relations, dont on néglige les caractères quand on la considère, en bloc, comme chaînon d'une démonstration, comme maille dans un réseau de propositions. Nous pouvons dire, semble-t-il, en général, qu'une relation ou une suite de relations constitue un « enchaînement » mathématique, toutes les fois que, ce qui, *mathématiquement*, nous intéresse, est *le lien seul* qui existe entre les termes de cette relation, ou entre ces relations, alors que chacune d'elles, prise isolément, ne présenterait de notre point de vue, aucun intérêt, non plus que chacun de ces termes, pris isolément.

Cette précision nous dispense de faire la distinction entre les enchaînements qui peuvent, — comme les propositions — être, dans certains cas, envisagés comme éléments d'un enchaînement plus vaste, et ceux qui ne le peuvent jamais : ceux dont, pour ainsi dire, l'essence même est d'être des enchaînements. Nous pourrons ne considérer que ces derniers parmi lesquels il faut ranger les démonstrations mathématiques (en général, tous les « raisonnements »), et les « théories » mathématiques. Ce qui en sera dit s'appliquera à tous les enchaînements.

D'autre part, il ne nous faudra pas, pour juger de la simplicité de ces enchaînements dans l'esprit des Logisticiens, nous contenter de nous souvenir que, pour ceux-ci, le point de vue mathématique se ramène entièrement au point de vue logique, et de nous en rapporter au critère d'un « sens commun » plus ou moins vague, pour ce qui est de l'élucidation de ce qu'est la simplicité logique. Il s'agira, au contraire, pour nous, autant que possible, de nous appuyer sur des textes de Logisticiens, et de chercher, — bien entendu, à la lumière des théories, précédemment rappelées, de leur école, — ce qui

rend « simples » les enchaînements mathématiques, que ces textes proclament tels.

Voyons, pour commencer, ce que le Logisticien entend, par exemple, par « une théorie simple ».

Et d'abord, qu'est-ce que c'est qu'une théorie mathématique dans le sens où ce mot est pris, toutes les fois, là, où le texte permet nettement de voir en quoi, une « théorie » est considérée comme plus simple qu'une autre ? C'est un système de postulats et de notions premières irréductibles (c'est-à-dire indéfinissables), par rapport à l'ensemble de ces postulats (1) ; système permettant de déduire, le plus avantageusement possible, toutes les vérités mathématiques d'un certain ordre, c'est-à-dire, toutes les vérités se groupant logiquement autour d'une certaine notion fondamentale. Ce n'est donc pas, à proprement parler, un « enchaînement » logique dans le sens où nous venons de les définir, mais plutôt le point de départ de certains vastes enchaînements pareils. C'est en tout cas, un « tout » dans lequel entrent des notions mathématiques, et que, par suite, on ne peut pas traiter à la façon d'une notion mathématique isolée.

Examinons donc, chez L. Couturat, — ou chez B. Russell, ce serait la même chose — un ou deux cas de « théories » dont il est parlé de la simplicité. Soit, par exemple, la théorie ordinale des nombres, valable seulement pour les nombres finis. Elle peut comporter, à sa base, trois « notions » fondamentales : celle de 0, de N et de « nombre suivant », plus cinq axiomes nécessaires et suffisants pour fonder, avec ces notions, toute l'arithmétique. Mais, remarque Couturat, on peut définir 0 à l'aide des deux autres notions. 0 cesse donc d'être une notion « première », et « cela a suggéré à Padoa un système « plus simple », qui ne comporte que deux notions premières » (2).

Nous n'entrerons pas ici dans le détail de cette théorie, ni d'autres. Bornons-nous à constater que Couturat nous donne comme étant « la plus simple » la théorie des nombres finis qui comporte le moins de notions premières et de postulats, c'est-à-dire le système d'éléments fondamentaux qui comporte le moins d'éléments. Et tout laisse entendre que ce fait qu'il a « moins d'éléments », a compté dans le juge-

(1) **L. Couturat.** « Principes des Mathématiques », p. 57.
(2) **L. Couturat.** Idem, p. 56.

ment de l'auteur sur ce système, déclaré par lui « plus simple ». Mais rien ne nous dit ici, si d'autres faits, d'autres particularités de la théorie de Padoa, ne contribuent pas aussi, avec le nombre de ses postulats et notions premières, à en faire la simplicité.

Une précision à ce sujet nous est suggérée un peu plus loin, par Couturat, à propos de la théorie des nombres infinis, — dont nous avons rappelé plus haut (3) la définition purement logique, et absolument distincte de celle des nombres finis. Après avoir défini logiquement l'égalité et l'inégalité des nombres infinis, et exposé succinctement les bases de leur dite théorie, il ajoute qu'on pourrait presque dire « qu'elle est plus simple que celle des nombres finis puisqu'elle n'a pas besoin, comme celle-ci, du principe d'induction et qu'on peut l'établir sans passer par la théorie des nombres finis » (4).

Ici, semble-t-il, il apparaît clairement :

1° Qu'il n'y a pas, du point de vue de la philosophie des Logisticiens, d'autre simplicité mathématique que la simplicité logique elle-même. Cela n'est pas d'ailleurs pour nous étonner. Nous l'avons répété : tout système de propositions mathématiques, toute définition mathématique, toute notion mathématique, se ramène, pour le Logisticien, à un système d'axiomes, à une définition, à une notion ou un ensemble de notions de logique pure.

2° Que, cela étant admis, la simplicité d'une théorie, — système d'axiomes et de notions premières servant de point de départ à une branche des mathématiques — est d'autant plus grande, que cette théorie comporte moins d'axiomes et de notions premières, qu'elle repose sur moins de principes exprimés.

3° Que la simplicité d'une « théorie » mathématique, tient, non seulement au petit nombre d'axiomes et de notions premières qui en constituent la base, mais aussi, au petit nombre des principes logiques sur lesquels il est indispensable de s'appuyer pour son développement, ou auxquels il est indispensable de faire appel pour la compréhension des notions premières. Dans l'exemple cité, le « principe d'induction » était nécessaire à la précision de la notion fondamentale de « suivant » dans la théorie des nombres finis, alors que la

(3) Voir plus haut, pages, 142, 143.

(4) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 67.

théorie des nombres infinis peut se passer de lui, et est, pour cela même, tenue pour « plus simple ».

4° Que plus une théorie est « simple » et plus elle s'établit directement. Autrement dit, un système d'axiomes et de notions premières qui suppose l'existence d'un autre tel système, par lequel on est obligé de « passer », auquel, en d'autres mots, on est obligé, logiquement, de se référer pour préciser l'une au moins de ses notions fondementales, n'est pas « simple » — ou, du moins, est « moins simple » que le système primitif, logiquement antérieur.

Nous touchons, ici, à cette liaison de la simplicité mathématique à l'antériorité logique, idée que nous allons retrouver à chaque pas dans l'élucidation de ce qu'est, dans la philosophie logistique, la simplicité des « notions » mathématiques.

Et ce que, jusqu'ici, nous avons dit, se trouve confirmé, si nous examinons une troisième comparaison entre deux « théories », de laquelle il ressort, d'après Russell — et, à sa suite, d'après Couturat, — que l'une est plus simple que l'autre, la cause de cette simplicité étant nettement spécifiée. Il s'agit de la théorie de la grandeur.

Selon Russell, l'idée de grandeur « serait inutile et même étrangère à la mathématique pure parce qu'on ne pourrait pas la définir sans quelqu'appel à l'intuition, ou, du moins, qu'on ne pourrait la définir que par postulats, ce qui ne permettrait pas d'affirmer l'existence de l'objet défini » (5). Toutefois, les « théories » qu'il en donne — et que Couturat relève à sa suite — font partie du domaine exploité par la philosophie logistique ; ce sont toutes deux des théories « logiques », des ensembles d'axiomes, non déduisibles les uns des autres, mais tels que, de leur totalité posée on puisse déduire, sans faire appel à l'intuition, tout un corps de vérités ; et si, comme nous l'avons vu, la simplicité mathématique doit, du point de vue des Logisticiens, se ramener à la seule simplicité logique, il y a lieu de penser que le parallèle de ces théories peut nous être utile dans notre effort pour saisir ce qui fait la simplicité des « théories mathématiques », de ce même point de vue.

Russell et Couturat ont défini la grandeur d'une manière aussi abstraite que possible en disant que « une grandeur

(5) **L. Couturat.** Ouvrage cité, pp. 98-99.

est, du point de vue de l'extension, une classe de quantités égales, et, du point de vue de la compréhension, l'état commun de ces quantités, leur qualité commune » (6), puis ils exposent la théorie ou thèse « relativiste » de la grandeur, basée sur un système de huit axiomes que voici : (7).

I. Ou A = B, ou A > B, ou A < B (les 3 cas étant disjoints).
II. Il y a une grandeur B, égale à A, quel que soit A.
III. Si A = B, on a : B = A.
IV. Si A = B et B = C, on a : A = C.
V. Si A ~ B, on a B < A.
VI. Si A ~ B, et B ~ C, on a A ~ C.
VII. Si A > B et B ~ C, on a A > C.
VIII. Si A = B et B ~ C, on a A > C.

A cette théorie, s'oppose la théorie appelée « absolutiste » de la grandeur, dans laquelle « égal » est rigoureusement synonyme d'« identique », et où « deux grandeurs sont dites d'une même espèce quand l'une peut être dite plus grande ou plus petite que l'autre » (8) en d'autres termes, quand elles sont susceptibles d'être inégales. Elle comporte elle, à sa base, quatre axiomes seulement

I. Aucune grandeur n'est > ou < qu'elle-même.
II. De deux grandeurs (non identiques), A et B, ou bien A > B, ou bien B > A.
III. Si A ~ B on a : B < A.
IV. Si A > B et B > C on a : A > C.

Cette « théorie » qui, elle aussi, rend compte de toutes les propositions vraies concernant la grandeur au sens logique et mathématique pur, doit, selon les Logisticiens, être préférée à la précédente « d'autant plus qu'elle repose sur des principes plus simples et constitue une notable économie de pensée » (9). Reste à savoir « en quoi » elle est plus simple. Le texte nous le dit explicitement : la simplicité de ce système « tient à ce que tous les axiomes relatifs à l'égalité ont disparu, et cela se comprend puisque, dans cette théorie l'égalité n'est plus une relation originale et indéfinissable, mais

---

(6) **L. Couturat.** Idem p. 101. — **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 163.
(7) **L. Couturat.** Idem, p. 100. — **B. Russell.** Idem, p. 163.
(8) **L. Couturat.** Idem, p. 101. — **B. Russell,** Idem, p. 164, § 155.
(9) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 101.

seulement l'égalité logique ou identique. Quant à l'inégalité, elle se trouve définie implicitement par ses propriétés : c'est une relation assymétrique transitive » (10) — c'est, en effet, cela même qu'affirment les axiomes III et IV de ce système.

Nous avons bien, ici, par le fait de la disparition des axiomes relatifs à l'égalité, *moins* d'axiomes dans la théorie « absolutiste » que, dans la théorie « relativiste » de la grandeur. Les axiomes III et IV de la théorie « absolutiste » ne sont autres que les axiomes V et VI, qui, dans la théorie « moins simple » précédemment citée, définissent l'inégalité par ses propriétés logiques fondamentales. A ces deux axiomes, comme on le voit, il suffit, dans le cas le plus simple, d'en ajouter deux autres, l'égalité des grandeurs n'étant pas définie mais regardée comme pure identité. Le premier, affirmera la permanence, pourrait-on dire, d'une grandeur donnée, son éternelle identité avec elle-même ; le second formulera que deux grandeurs différentes ne pourront, en aucune façon, être tenues pour identiques. Dans la théorie « relativiste » au contraire, aux deux axiomes sus-dits concernant l'inégalité, il faut en ajouter six : deux pour affirmer qu'une grandeur est, soit égale soit plus grande, soit plus petite qu'une autre, et qu'il existe toujours une grandeur égale à une grandeur donnée ; deux pour définir l'égalité par ses propriétés logiques caractéristiques ; deux, enfin, pour poser la relation de deux grandeurs, respectivement égale et inégale à une même troisième. De ces six axiomes, dans le cas de la théorie absolutiste, les quatre derniers sont automatiquement supprimés par la non intervention de l'idée d'égalité à définir, et les deux premiers, remplacés par d'autres. Et de ces deux autres, le deuxième, — qui affirme l'impossibilité de l'égalité de deux grandeurs différentes, — implique, justement, que « égal » veut dire identique, et ne peut vouloir dire autre chose. On ne saurait donc dire que l'admission de cette synonymie constitue, en fait, celle d'un axiome de plus.

De plus, le fait que les deux axiomes sur l'inégalité se trouvent les mêmes dans les deux théories, rend encore plus frappant, pour ainsi dire, l'écart entre le nombre des axiomes de la « relativiste », et celui de ceux de l'« absolutiste ». Il met en lumière que, la théorie dite « relativiste », c'est la théorie dite « absolutiste » augmentée de quelque chose,

---

(10) **L. Couturat.** Idem, p. 101.

Ce « quelque chose » — axiomes relatifs à l'égalité des grandeurs, à la relation de deux grandeurs dont l'une est égale et l'autre inégale à une même troisième — est sûrement indispensable à la cohérence de la théorie relativiste, mais apparaît, à l'examen, ne pas l'être à la découverte et à l'exposition des vérités concernant la grandeur, puisqu'il existe un enchaînement de vérités premières — (le système « absolutiste » lui-même), — où il ne figure en rien, et duquel toutes les vérités concernant les grandeurs n'en peuvent pas moins logiquement être tirées. Remarquons, ici, en passant, que, c'est parce que les mêmes vérités concernant la même notion sont supposées pouvoir être tirées de nos deux systèmes, que ces deux systèmes sont comparables l'un à l'autre au point de vue de leur simplicité mathématique. Sinon, — s'il s'agissait de systèmes à la base de parties différentes des mathématiques, il se pourrait encore peut-être que l'on soit tenté de dire, du point de vue d'un certain sens commun, que l'un est « simple » et que l'autre l'est beaucoup moins, mais, il ne s'agirait plus, dans ce jugement de leur simplicité mathématique, vu que « mathématiquement » les deux systèmes appartiendraient à un ordre différent. Il semble qu'il en serait de même, à plus forte raison, de deux systèmes quelconques d'axiomes ou de vérités fondamentales ; qu'un « point de vue » soit toujours nécessaire pour décider de la simplicité relative de tels enchaînements, et que ce point de vue doive être cherché dans leur finalité commune.

Russell dit que le choix entre les deux précédents systèmes d'axiomes peut être fait de suite « par l'appel à un certain principe général, d'application très étendue », qu'il propose de nommer principe d'Abstraction. « Selon ce principe, toutes les fois qu'une relation, de laquelle il existe des exemples, possède la double propriété d'être à la fois symétrique et transitive, cette relation n'est pas primitive, mais peut être, à l'analyse, tenue pour une similitude de relation par rapport à un troisième terme ; et cette relation commune (par rapport à un troisième terme), est telle qu'il y a un seul terme, au plus, auquel un terme donné soit susceptible d'être rapporté, quoique plusieurs termes puissent être rapportés à un terme donné. En d'autres mots, la relation est comme celle de fils à père : un homme peut avoir plusieurs fils, mais n'a qu'un seul père. » (11).

(11) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 166.

Ce principe d'abstraction, prouve donc que l'égalité de deux termes, en l'espèce, n'est pas une relation primitive qui les joindrait, mais l'expression que ces deux termes, ont, respectivement, avec un même troisième, (ou avec des termes identiques, ce qui revient au même), une même relation.

Dirons-nous que ce principe logique, doit, parce qu'il justifie le choix du deuxième système, compter parmi les éléments de celui-ci ? Cela peut se soutenir. Mais on ne peut pas dire que cela rende le deuxième système « mois simple » que ce qu'il paraissait d'abord être, par rapport au premier, — dans le sens où L. Couturat entendait ce mot, alors que, dans l'exemple précédemment rappelé de la théorie des nombres finis et de celle des nombres infinis, il affirmait la première être « moins simple » parce que nécessitant à sa base le « principe d'induction », dont la seconde, elle se passe totalement (12).

Ici, le principe en question, n'est pas, à proprement parler, utilisé dans un système plutôt que dans l'autre. Il s'agit de l'un des grands principes logiques, tout à fait généraux, et par suite applicables à toute théorie logique — et, cela va sans dire, à toute théorie mathématique, — en l'espèce, aussi bien à la théorie « relativiste » de la grandeur qu'à la théorie « absolutiste ». C'est un principe qui n'« appartient », spécialement, ni à l'une ni à l'autre, mais qui sert à interpréter l'une et l'autre. Que de cette interprétation sorte la justification de la seconde, il n'en résulte pas que le principe doive s'ajouter aux éléments de cette dernière, comme s'il n'avait point sa place, aussi, parmi ceux de la théorie qu'on lui oppose, logiquement. Il met, il est vrai, en évidence la simplicité plus grande de la seconde, consistant, comme nous venons de le voir en son petit nombre d'axiomes fondamentaux, parmi lesquels, de plus, se trouvent des axiomes de la première elle-même, auxquels, dans la première, s'en ajoutaient d'autres. C'est en nous rappelant la vraie signification logique de ces autres axiomes — de certains du moins, d'entre eux — que le « principe d'Abstraction », nous incite, pour raison de simplicité, à choisir la théorie « absolutiste ».

Et pour cela, il nous fait voir, sinon le système relativiste comme logiquement postérieur à l'autre, et s'appuyant sur lui, pour ainsi dire, du moins, plusieurs de ses axiomes com-

(12) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 67. (Voir plus haut, p. 151.)

me logiquement postérieurs à deux des axiomes de ce dernier, et nécessitant leur admission préalable. En effet, qu'affirme-t-il, ce principe, sinon que, logiquement, l'idée d'égalité est postérieure à l'idée d'inégalité, qu'elle n'est pas, comme elle, « primitive » (13), mais qu'elle dérive, au moins en partie d'elle, puisqu'en somme, deux grandeurs égales, selon lui, — et en général deux « choses égales » — si elles sont différentes, sont deux choses, chacune séparément, inégales exactement de la même manière, à une même autre chose ?

Nous retombons dans ce que nous disions précédemment à propos des théories des nombres finis et infinis : de deux systèmes d'axiomes, le plus simple, est, pour le Logisticien, dans le cas où l'un suppose l'autre, ne fût-ce qu'en partie, celui qui, logiquement est le plus primitif, le plus *direct*, celui, c'est-à-dire, qui nécessite pour son établissement, nous ne dirons pas la grande économie de pensée, au sens psychologique du mot — ceci n'aurait pas de sens dans une doctrine qui ne fait à l'intuition aucune place légitime dans la mathématique envisagée par l'épistémologue (non par l'historien, certes), — mais la plus grande économie de pensée au sens logique ; en d'autres termes, la plus grande économie de pensée, non seulement « pensée » effectivement, mais encore sous-entendue, supposée pour la rationalité du résultat.

Comporter, en résumé, le plus petit nombre possible d'axiomes fondamentaux, le plus petit nombre possible de principes logiques présupposés, nécessaires à la clarté du système, le plus petit nombre possible de principes logiques indispensables au développement de ce système en réseau complet de vérités d'un ordre donné : telles semblent être, d'après la conception logisticienne des mathématiques, les conditions que doit remplir un système d'axiomes posés ensemble, ou « théorie mathématique », pour être, parmi les théories du même ordre qu'elle, — les seules qui lui soient comparables, — la plus simple possible. Ou, en appelant « éléments » logiques de la théorie en question, toutes les propositions exprimées ou non qui sont à sa base, comme conditions de légitimité de l'ensemble des vérités qui en constituent le développement, on peut dire que la simplicité mathématique d'une théorie est en rapport direct avec le petit nombre de ses éléments logiques.

---

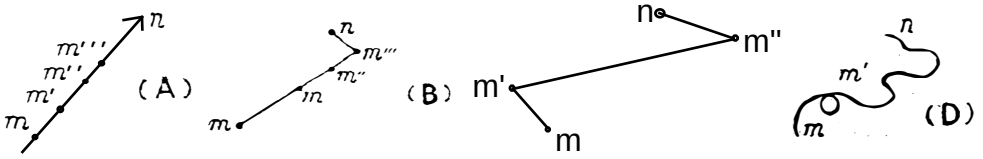
(13) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 166. (Déjà cité).

Est-ce là tout ? Il ne semble pas qu'en s'appuyant uniquement sur la conception mathématique des Logisticiens et sur leurs textes, on puisse, jusqu'à maintenant du moins, avancer autre chose. Resterait à s'assurer, si, dans l'idée de théorie la plus simple parce que la plus directe, il n'y a pas, toujours du même point de vue, quelque chose de plus.

Et d'abord, remarquons ceci : 1° Un système d'axiomes constituant le noyau d'une théorie mathématique, n'est pas une suite logique naturelle de propositions dérivant l'une de l'autre comme celles d'une démonstration, en général, et, par conséquent, logiquement antérieures l'une à l'autre. C'est un ensemble de propositions qui, quoique liées entre elles par le fait qu'on les pose ensemble pour servir d'assiette au développement progressif d'un réseau d'autres propositions, n'en sont pas moins, logiquement, séparées : on peut, sans absurdité, admettre telles d'entre elles en en rejetant telle autre ; c'est même là une des conditions de la perfection du système.

On ne saurait donc traiter cet enchaînement, — car c'en est tout de même un — à la manière d'un enchaînement dynamique discursif, et voir dans ce que l'on peut, du point de vue logistique, appeler un système d'axiomes (ou une théorie) plus simple qu'un autre, un système dans lequel la pensée raisonnante aurait moins d'étapes à parcourir pour « passer » d'un axiome à l'autre. Si les axiomes sont indépendants, c'est-à-dire, si le système n'en contient pas d'inutiles, ce « passage » n'existe pas. Cela devait être rappelé pour éviter certaines confusions.

2° Il faut se défendre de croire que, même en principe, un enchaînement comportant moins d'éléments qu'un autre, soit, forcément, par cela seul, plus « direct », comme il peut paraître à première vue. La notion de « direct » ne concerne pas seulement, pas surtout, le nombre des éléments envisagés ensemble dans un tout, mais bien plutôt, semble-t-il, leur agencement. Cela est très sensible (pour prendre un exemple grossier) dans un enchaînement matériel de points. Soient les ensembles de points A, B, C.



Il saute aux yeux de chacun que l'enchaînement de points (A) conduit plus « vite », c'est-à-dire par un chemin plus

court, de m à n, que par exemple, l'enchaînement (C), qui, cependant, entre les deux mêmes points, n'admet que deux intermédiaires. C'est là ce qui, en général, s'appelle « être plus direct ». Si, maintenant, nous imaginions un enchaînement de points (D), dans lequel il n'y aurait entre m et n, ne fût-ce qu'une seule étape, mais où cette étape serait reliée aux points extrêmes non plus par des lignes brisées mais par des courbes plus ou moins irrégulières et capricieuses, il y aurait lieu de le considérer comme encore moins direct que les précédents. Il est vrai qu'on pourrait voir, dans ces courbes irrégulières, une quantité extrêmement grande de changements de direction, et, par suite, d'étapes. Mais cela n'empêcherait pas, toujours, qu'un nombre tout aussi énorme d'étapes « en ligne droite », donnerait, lui, un enchaînement « direct » de m à n.

Et ce que nous disons d'un enchaînement de points, d'un schéma semblable à l'un des précédents, nous pouvons, semble-t-il —toujours d'après le sens commun — l'étendre à un enchaînement de propositions. L'économie de pensée réalisée sera apparemment, plus grande dans le cas où nous envisagerions un ensemble de propositions immédiatement liées les unes aux autres, que dans celui où nous concevrions un ensemble, équivalent quant à sa signification — c'est-à-dire, utilisable au même titre en vue des mêmes fins logiques — mais dont les propositions, fussent-elles moins nombreuses, ne seraient liées les unes aux autres que d'une manière fort détournée.

Mais ces remarques s'appliquent-elles aux systèmes d'axiomes que nous examinons en ce moment ? C'est là toute la question. On peut faire, à cette application possible une première critique, qui paraît assez sérieuse. Dans nos schémas précédents l'ordre des points, leur « arrangement », joue un grand rôle dans la longueur du chemin parcouru, parce que ces points sont liés les uns aux autres. Ce n'est d'ailleurs que parce qu'on les conçoit liés les uns aux autres en quelque façon, que l'on peut leur concevoir un ordre. Il en serait sans doute de même dans le cas d'un ensemble de propositions liées logiquement les unes aux autres, dans, par exemple, une démonstration. Mais n'avons-nous pas insisté sur le fait que, dans un système d'axiomes constituant la base d'une « théorie » mathématique, les axiomes ne soutiennent pas, entre eux, de tels rapports ? et non seulement qu'ils sont, là, absolument

« séparés », — que la notion qu'ils concernent, chacun en particulier, soit ou non la même, — mais que, de plus, cette séparation, cette indépendance logique des uns vis-à-vis des autres, est l'une des conditions de la perfection logique du système ? Si, en effet, un axiome peut être regardé comme conséquence nécessaire d'un autre, ou de plusieurs autres, il est inutile, il devient, dans le système, un pléonasme. Comment donc, dans ces conditions, comparer un système d'axiomes à un schéma de points où interviennent des questions de distance et de direction, ou à un enchaînement logique dans lequel les propositions, liées les unes aux autres et formant, dans leur ensemble un « développement », une « progression », sont plus ou moins assimilables aux étapes d'un chemin, droit ou bifurqué, c'est-à-dire, en fin de compte, aux points de nos schémas ? Il semble qu'il s'agisse là de choses nettement différentes.

Mais, pourrait-on dire, quoique les axiomes dont le système est à la base d'une théorie soient indépendants, il en est qui, sinon par le fait d'une nécessité logique qui les ferait découler l'un de l'autre, du moins par ce que nous appellerions volontiers leur « contenu », par la notion commune qu'ils contribuent ensemble à préciser, ont entre eux un certain lien très net, et forment, par là, comme des « groupes » capables d'être considérés à part dans le système global. Nous avons, par exemple, en parlant de la « théorie relativiste de la grandeur », distinguer de tels groupes parmi les huit axiomes qui lui servent de fondement : tels, le groupe des axiomes servant spécialement à définir l'égalité, celui des axiomes concernant, au contraire, l'inégalité. Ces groupes sont comme autant d'articulations du système, comparables à des changements de direction dans un enchaînement de points liés entre eux (analogue aux précédents), ou encore aux changements d'orientation que prend une démonstration à chaque nouvelle vérité antérieurement admise qui s'y trouve rappelée, et dont on y utilise une chaîne plus ou moins longue de conséquences. On peut dire que, au contraire, le système que les Logisticiens opposent au sus-dit dans leur étude de la grandeur, et dont les axiomes concernent la seule inégalité, est, lui, comme construit « d'une seule pièce ». Et il est naturel de supposer que la plus grande simplicité qu'on lui reconnaît, provient autant de cette unité dans le contenu de ses axiomes, que du fait que ces axiomes sont au nombre

de quatre au lieu de huit. Et on pourrait peut-être dire, de même, que, si la théorie des nombres infinis, est, comme le croît, apparemment, Couturat, plus simple que celle des nombre finis, parce qu'on n'a pas besoin de passer par celle-ci pour établir celle-là (14), cette simplicité n'est pas seulement due au fait qu'elle comporte « moins d'éléments » dans le sens que nous avons, plus haut, donné à ce mot, — en particulier, qu'elle n'utilise ni le principe d'induction, indispensable à la théorie des nombres finis, ni les axiomes, de cette dernière, — mais qu'elle tient aussi, à ce que les axiomes, en plus petit nombre, qu'elle utilise, sont plus homogènes quant à leur contenu.

Et si l'on soutenait cela, il faudrait, ou bien renoncer à l'affirmation que la simplicité mathématique d'un système d'axiomes tient au petit nombre de ses « éléments » logiques (dans le sens donné plus haut), ou bien, modifier la signification de cette expression d' « éléments » du système. Si l'on se résolvait à ce dernier parti, il faudrait faire entrer en ligne de compte et le nombre des « éléments » logiques tels que nous les avons désignés, — axiomes et principes logiques admis explicitement et implicitement, — et celui des différentes notions servant, pour ainsi dire, de « contenu » aux axiomes, des notions autour desquelles ces axiomes (ou les principes implicitement admis) se groupent en catégories plus ou moins semblables, mais nettement séparables. Ces notions seraient, elles ausi, comptées comme « éléments ». Mais il y aurait lieu, même alors, de modifier l'affirmation primitivement formulée sur le critère de simplicité, car les divers nouveaux « éléments » du système, d'une part les notions, de l'autre, les axiomes et principes, ne seraient mis sur le même plan, par la communauté de leur désignation, que grâce à un artifice. Cet artifice ne les empêcherait pas : 1° d'être, les uns, des notions, c'est-à-dire des concepts, les autres, des jugements précis ; 2° d'avoir, du point de vue de la simplicité du système, une importance très différente, si, s'appuyant sur le « sens commun », on envisage jusqu'au bout l'analogie du système avec les enchaînements schématiques auxquels nous faisions, un peu plus faut, allusion.

Nous avons vu, en effet, dans ces enchaînements, la simplicité de l'ensemble dépendre avant tout du petit nombre

---

(14) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 67. (Déjà cité).

des directions, des « articulations » du système, le nombre de « points », correspondants ici à des « éléments » véritables du système, n'intervenant que dans la comparaison de deux enchaînements également directs, ou, en termes plus concrets, plus imagés, le nombre des étapes du chemin parcouru n'intervenant qu'après la plus ou moins grande constance de sa direction. S'il en était ainsi, un ensemble d'axiomes à la base d'une théorie comme celles auxquelles nous avons fait allusion, d'axiomes séparés, il est vrai, mais groupés autour de quelques notions relatives à leur contenu, serait d'autant plus simple qu'un moins grand nombre de telles notions interviendraient en lui ; et, à simplicité égale, (entendue dans ce nouveau sens), de deux systèmes, le plus simple, serait celui qui aurait le moins d'éléments logiques, — axiomes, et principes logiques admis implicitement, — c'est-à-dire, le moins d'éléments dans le premier sens où nous avons d'abord précisé ce mot.

Mais pouvons-nous nous en tenir à cette position ? Il ne le semble pas. 1° Des difficultés graves lui sont inhérentes, et, 2° elle paraît incompatible avec l'attitude qui, en philosophie des mathématiques, caractérise l'école logistique.

La plus grande de ces difficultés semble être l'imprécision des « notions » autour desquelles on pourrait grouper les différents axiomes. Reprenons, par exemple, le système d'axiomes à la base de la théorie relativiste de la grandeur, dont nous avons parlé plus haut. Combien peut-on découvrir d' « articulations » à ce système ? Si on admet que l'on peut grouper les axiomes autour des deux notions d'égalité et d'inégalité, on en découvrira seulement deux. Mais il y a trois axiomes seulement sur les huit (15), qui se rapportent proprement à l'égalité, — qui, en quelque sorte, la définissent. Il y en a deux aussi qui ne font que préciser la nature de l'inégalité (relation transitive, etc.) Deux autres concernent les rapports de trois grandeurs dont deux seulement sont égales entre elles, et l'un, pose que, de deux grandeurs l'une est forcément égale à l'autre, ou bien, plus petite, ou bien, plus grande qu'elle, en d'autres termes, que deux grandeurs sont forcément égales ou inégales. Dira-t-on que ces trois derniers axiomes entrent dans un groupe à part (concernant à la fois l'égalité et l'inégalité) et, si on l'admet,

(15) Voir plus haut, p. 153.

fera-t-on, au sein même de cette division, un sous-groupe des deux axiomes qui concernent les rapports de trois grandeurs dont deux seulement sont égales ? Considérera-t-on en bloc l'« inégalité », ou séparera-t-on la notion du « plus grand », de celle du « plus petit » ? On peut, semble-t-il, adopter l'une ou l'autre classification chacune étant légitime, d'un certain point de vue. Et même, sans doute, on aurait pu, si le nombre d'axiomes du système avait été plus grand, et les groupes formés plus variés, subdiviser ces groupes en sous-groupes de différentes façons, logiquement toutes soutenables.

Ceci ferait de la simplicité mathématique des divers systèmes d'axiomes, quelque chose de tout à fait relatif. Le même système serait tenu pour plus ou moins « simple », selon qu'il serait diversement envisagé, selon ce que l'on juge être ou ne pas être une notion indépendante, parmi celles qui peuvent être trouvées à sa base.

Une telle conception n'aurait, en soi, du moins de prime abord, rien d'une absurdité. Il n'y a pas contradiction à soutenir que la simplicité mathématique d'un système d'axiomes, est une notion relative, et même très relative. Cependant, l'interprétation précédente a l'inconvénient, entre autres, d'être très floue. En effet : il sera souvent, sinon toujours, possible de décomposer les notions qui apparaissent, selon ce que nous avons dit, comme des centres de groupement des axiomes, en un certain nombre de notions plus fondamentales. Devra-t-on les décomposer, et ne pas donner, dans l'appréciation de la simplicité du système, la même valeur, la même place, à une de ces notions peu décomposables, et à une autre qui l'est davantage ?

Si on ne le fait pas, — et même si on ne va pas jusqu'au terme logique de leur analyse, — il semble que le nombre des notions notées (donc le nombre d' « articulations » du système, jouant, par hypothèse, un rôle de premier ordre dans sa plus ou moins grande simplicité), soit, non seulement relatif, mais encore arbitraire, limité à notre fantaisie ou à notre perspicacité logique, mais non, assurément, solidement assis sur la réalité que nous étudions.

Mais si, au contraire, on le fait, si, au lieu de considérer, en dernier lieu, non pas le nombre des notions elles-mêmes, autour desquelles se groupent les axiomes, et cela quelqu'arbitrairement choisies qu'elles puissent être, mais le nombre de toutes celles en lesquelles elles se résolvent logiquement,

ne semble-t-il pas qu'alors, on n'ait plus le droit de parler du « nombre d'articulations du système », et par suite de simplicité « du système » ? Le nombre des notions dernières trouvées peut avoir de l'importance, dans chaque cas quand à la simplicité plus ou moins grande de la notion dont nous sommes partis — (nous aurons, plus loin, à parler de la question de la simplicité des notions). Il ne semble en avoir « dans le système», ni pour les Logisticiens, dont les textes ne suggèrent rien de tel, ni pour le bon sens. « Dans le système », une notion très complexe joue, apparemment, exactement le même rôle qu'une autre, elle, non analysable — pourvu qu'autour d'elle on groupe, naturellement, certains axiomes, pourvu que l'un, au moins, la concerne. Le nombre d'« articulations » du système est donc indépendant du nombre (non arbitraire) des notions que l'on peut trouver à la base de toutes les sciences. Ce nombre ne peut donc être qu'arbitraire. Il dépendra de la classification des axiomes dont nous parlions plus haut.

Mais elle, de quoi dépend-elle ? Sur quel critère logique repose-t-elle ? On ne voit pas bien. Nous avons dit qu'elle pouvait être aussi légitime que d'autres. Mais, avant de baser sur elle la notion logistique de simplicité mathématique des systèmes d'axiomes, il faut nous demander si du point de vue même de l'école logistique, nous avons le droit de le faire ; si, étant donnée sa nature, nous pouvons la prendre en considération, dans la recherche de la conception, logistique d'une notion qui, quoiqu'elle ne semble pas être spéciale aux mathématiques, doit, apparemment, quand elle est prise « mathématiquement », être traitée comme l'école veut que l'on traite toute notion mathématique, c'est-à-dire, être élucidée sans appel à autre chose qu'à la logique pure. Nous devons donc bien nous poser la question : qu'est-ce qui nous sert de guide pour adopter telle classification des axiomes d'un système plutôt qu'une autre ? pour nous arrêter à tel choix de groupes fondamentaux plutôt qu'à un autre, et pour subdiviser, s'il y a lieu, nos groupes de telle ou telle manière ?

Nos distinctions sont « de nature logique », si on considère les choses que nous distinguons, et c'est bien peut-être aussi l'unique « souci de logique » qui nous a poussé à faire ces distinctions. Mais cela suffit-il, pour que nous puissions les justifier uniquement par un appel à des considérations de

logique pure ? Et, ne semble-t-il pas plutôt que ce soit cette intuition que les Logisticiens ne nient pas rencontrer dans la psychologie de l'invention mathématique (16), — mais qu'ils écartent avec la dernière énergie toutes les fois qu'il s'agit de se servir d'elle pour fonder ou préciser quelque notion mathématique que se soit, — qui intervienne, au premier chef, dans le choix des idées autour desquelles se grouperaient les axiomes, c'est-à-dire, dans le nombre de groupes et de sous-groupes déterminés parmi les axiomes, ou encore, dans le nombre d' « articulations » principales et secondaires du système que ces axiomes réunis constituent ?

Et ce n'est pas, insistons-y, la relativité des classifications possibles dont nous parlions, mais bien leur caractère arbitraire qui nous incite à y chercher la marque de l'intuition qui les engendrerait. Un même système d'axiomes pourrait bien être autre, considéré à deux points de vue différents. Logiquement, il s'agirait de « deux » systèmes, et le point de vue importerait peu. Le citer ne serait qu'une manière de désigner le système que l'on considère. Ici, il ne s'agit pas de cela. Il y a seulement que, si l'on ne fait pas appel à l'intuition, on ne comprend plus pourquoi on s'arrête à telle classification plutôt qu'à telle autre. Chacune n'a pas sa raison d'être en soi (dans son rapport logique, voulons-nous dire, avec le système en question), mais dans un ensemble de conceptions « individuelles » de celui qui s'arrête à elle de préférence, conceptions qui, inconsciemment, conduisent sa pensée, lui imposant comme étant « plus rationnelle », par exemple, la distinction, à la base du système d'axiomes concernant la théorie « relativiste » de la grandeur, des seules notions d'égalité et d'inégalité, ou, au contraire, de trois groupes d'axiomes dans ce système.

Une objection, cependant, vient à l'esprit. Faut-il, vraiment, refuser de faire intervenir, dans la notion de la simplicité mathématique d'un système d'axiomes, le nombre d' « articulations » du système, sous prétexte que, vu que c'est l'intuition qui arrête quelles sont ces articulations, cette intervention serait contraire à l'esprit de l'école logistique, et constituerait, par conséquent, une fausse interprétation ? Les Logisticiens posent, en efft, comme point central de leur

(16) **L. Couturat**. Ouvrage cité, p. 35.

philosophie scientifique: l'affirmation de la possibilité de fonder toutes les notions mathématiques, et de refaire les mathématiques tout entières, sans aucun appel à l'intuition, même la plus intellectuelle. Comme nous l'avons remarqué, ils ne nient le rôle de l'intuition ni dans le développement historique des mathématiques (cela va de soi), ni dans le processus obscur de l'invention chez le mathématicien. Ce qu'ils nient, c'est seulement que l'intuition soit indispensable dans l'explication a postériori des mathématiques, et dans l'élucidation de leurs notions, quelles qu'elles soient ; c'est qu'elle ait, dans ces sciences, en droit, la place qu'elle a, en fait, dans le travail mental du savant qui cherche, ni aucune place.

Ne pourrait-on pas soutenir qu'ici, l'intuition entre bien, sans doute, dans le choix d'une classification des axiomes — indispensable pour que l'on puisse parler d' « articulations » dans leur système ; — mais que, quelle que soit la classification, il est possible, et même souhaitable de ne la considérer que sous l'angle de la logique pure ? Ne peut-on pas l'expliquer, cette classification, à postériori, sans appel aucun à l'intuition ? Dire que chaque « articulation » en question, chaque notion autour de laquelle se groupent des axiomes du système, sert, indépendamment de toute intuition, de lien logique entre les axiomes qu'elle rassemble, lien qui n'existe pas, entre eux et les autres axiomes ? et, qu'en conséquence, fonder la simplicité mathématique du système, en partie sur le petit nombre de ces articulations, n'est pas faillir à l'esprit de l'école ?

Mais, en formulant cette objection en faveur de l'admission par les Logisticiens d'une simplicité des systèmes d'axiomes reposant sur autre chose que sur le petit nombre des axiomes eux-mêmes, on oublie, semble-t-il une chose essentielle : c'est qu'il faudrait, pour pouvoir dire ce qui précède, que les axiomes du système ne soient pas logiquement indépendants. Nous avons trop insisté, plus haut, sur le fait qu'ils le sont, pour y revenir longuement. Bornons-nous à dire que, si vraiment ils le sont, chaque axiome constitue un « individu », en face d'un autre axiome, quel que puisse être le « contenu » de l'un et de l'autre. Que l'un serve à poser tel caractère de l'inégalité, et l'autre, un autre caractère de la même notion, ou que ce dernier se rapporte à tout autre notion, qu'on imaginera, s'ils ne se déduisent en aucune façon

l'un de l'autre, ni n'admettent de lien déductif, lointain ou proche, avec aucune autre axiome qui serait, pour employer une expression hardie mais suggestive, comparable à leur ancêtre commun ; si, en un mot, ils sont indépendants, comme doivent l'être les axiomes d'un système parfait, ils sont, purement et simplement « deux » axiomes. Ce n'est jamais leur contenu qui peut les lier « logiquement », étant donné qu'ils sont, l'un et l'autre, des propositions. Le prétendu lien qu'il crée, entre eux, n'est que l'effet trompeur d'une association d'idées dont il faut se défier, car elle n'a pas, ici, sa place. Le seul lien qui les lie, est le fait qu'ils sont posés ensemble dans le système qui les réunit.

Il semble, en définitive, que, du point de vue de la philosophie mathématique des Logisticiens — caractérisée, comme nous l'avons répété, par le fait que, pour elle, les opérations « mathématiques » véritables, sont uniquement des opérations logiques, et qu'elle rejette toute intervention « en droit » de l'intuition dans les sciences dont nous parlons ici, — on doive, se refuser, dans l'appréciation de la « simplicité mathématique » d'un stystème d'axiomes, à tenir compte de ce que nous avions d'abord appelé ses « articulations » : et cela, pour la raison que (à moins que l'on fasse appel à l'intuition pour y en distinguer), un système d'axiomes ne saurait avoir d' « articulations ». Ajoutons qu'on ne saurait en chercher en faisant appel, fût-ce à une « communauté de forme » (ne disons plus de contenu), de certains axiomes. Car ici, dire que deux axiomes séparés ont « la même forme » — que le lien logique entre les termes, à l'intérieur de l'un et de l'autre est le même, — c'est dire qu'ils ont même « contenu », dans le sens où nous entendions ce mot un peu plus haut, c'est-à-dire, qu'ils peuvent tous les deux se grouper autour de la même notion logique, qu'ils précisent tous deux le même type de relation dans deux cas différents. Nous ne pouvions pas prendre pour leur « contenu » la « chose » de laquelle ils traitent, car, comme il est clair, ils ne traitent pas de « choses » mais uniquement de symboles.

Nous dirons donc, pour conclure, fidèles à la première formule que nous avions trouvé (17), et en accord, nous semble-t-il, avec Russell et Couturat, et leur école en général, que

(17) Voir plus haut, p. 157.

la simplicité d'un système d'axiomes posés ensemble ou d'une « théorie » mathématique, réside dans le petit nombre de ces axiomes, ou, plus généralement, de ses « éléments » logiques, entendant par là, avec les axiomes, les principes logiques présupposés et les principes logiques indispensables au développement rationnel du système en réseau complet de propositions vraies d'un ordre donné. Nous répéterons que la « plus grande simplicité mathématique » se confond, là, avec la plus grande économie de pensée au sens logique, telle que nous l'avons définie (18) ; en définitive, qu'elle tient au petit nombre d'opérations, — ici purement logiques — nécessaires pour asseoir la théorie en question.

Insistons toutefois encore sur le fait que la simplicité d'une théorie mathématique ne repose pas seulement sur le petit nombre des « axiomes », mais bien sur celui des « éléments » ou opérations logiques que nécessitent ou présupposent l'affirmation de l'ensemble de tous ces axiomes, et leur développement normal. (Chaque principe, en effet, ajoute quelque chose à la complexité de la théorie, parce que son affirmation, amorce de tout un développement plus ou moins long, constitue une opération logique de plus).

Considérons un exemple qui pourra nous éclairer sur la pensée de l'école logistique. Couturat, dans son ouvrage sur les « Principes des Mathématiques » après avoir exposé un système de dix-sept axiomes fondant la géométrie descriptive en tant que branche de la mathématique pure (19) cite le système de douze axiomes seulement, proposé par O. Veblen (20), comme « constituant une simplification et un perfectionnement de la géométrie descriptive » (21). Cela ne l'empêche pas de mettre le lecteur en garde contre l'illusion qui consisterait à croire que la simplicité de la théorie tient uniquement au petit nombre des axiomes qui sont à sa base, car « comme l'a fait remarquer Pieri, on peut fondre à volonté plusieurs axiomes en un seul » (22). Mais qu'est-ce donc que fondre plusieurs axiomes en un seul sinon, en somme, concen-

(18) Voir plus haut, p. 157.
(19) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 169.
(20) **O. Veblen**, « Transactions of the American Mathematical Society », t. V, pp. 343-384. Juillet 1904.
(21) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 169.
(22) **L. Couturat.** Idem, p. 174.

trer, en une même proposition grammaticale, deux ou plusieurs propositions logiques posées comme vraies, c'est-à-dire le résultat de deux ou plusieurs affirmations distinctes, de deux ou plusieurs « opérations logiques » qui pourraient se faire l'une sans l'autre, et sont, par suite, naturellement à séparer ?

Si, au contraire, les axiomes ne représentent chacun qu'une seule et même affirmation, si on peut vraiment les considérer comme des « unités » logiques, dans le sens opératoire, alors la réduction de leur nombre obtenue par leur choix plus judicieux, constitue véritablement une simplification de leur système et de la théorie. Et il semble que ce soit bien ainsi que Couturat (et l'école qu'il représente) entendent la chose, car :

1° Il indique deux « simplifications » successives apportées à la théorie de O. Veblen, d'abord par Vailati (23), puis par Russell. Toutes deux consistent bien en une réduction du nombre des opérations logiques qui fondent la théorie, du nombre total des affirmation indépendantes qui sont à sa base. Russell arrive, à l'aide de huit axiomes seulement à fonder la théorie et à démontrer les postulats de Vailati. Et c'est en cela que son système, à lui, constitue « un pas de plus dans la voie de la réduction logique et de la simplification » (24). Nous retombons encore dans ce que nous disions au début : le système le plus simple est le plus « direct » — celui dont les « éléments », les opérations logiques, fondamentales, sont indispensables aux autres systèmes, sans que leurs éléments, à eux, lui soient indispensables, celui qui n'est qu'une « réduction logique » des autres systèmes possibles auxquels on peut le comparer, c'est-à-dire qui a le moins d'éléments logiques possibles.

2° Pour montrer la supériorité de la théorie de O. Veblen, au nom de la simplification qu'elle représente par rapport au système précédemment cité (de dix-sept axiomes au lieu de douze) Couturat fait la remarque que « l'on peut édifier la géométrie projective — (et non seulement la descriptive) — sur les fondements précédents — c'est-à-dire sur les bases de la théorie d'O. Veblen, — en définissant et introduisant

(23) **Vailati.** « Rivista di Matematica », t. II, pp. 71-75 (1892).
(24) **L. Coutura.** Ouvrage cité, p. 175.

les éléments impropres ou idéaux (points, droites, plans projecteurs) suivant une méthode à exposer plus loin. On montre, ajoute-t-il, comment on peut, avec le même système de principes établir la géométrie métrique euclidienne, sans nouveaux axiomes, et simplement en donnant une définition projective de la congruence » (25).

C'est donc, non seulement parce que le système de O. Veblen a moins d'axiomes que le précédent qu'il est plus simple. C'est aussi parce que « ce sont les trois formes de la géométrie que O. Veblen fonde sur douze axiomes seulement » (26). En d'autres mots : plus une théorie repose sur un petit nombre d'axiomes (nous dirons, dans le sens le plus général : d'opérations logiques fondamentales), par rapport à l'étendue du domaine mathématique qu'elle permet d'embrasser, et plus elle est « simple ».

Il faudrait peut-être distinguer ici, le système d'axiomes envisagé presque « en lui-même », pour ainsi dire, regardé comme la base d'une certaine théorie particulière, et le système d'axiomes rattaché à tous ses développements logiques possibles qui intéressent le mathématicien ; en somme, l'enchaînement, statique jusqu'à un certain point, des axiomes indépendants, posés ensemble, et l'enchaînement que forment ces mêmes axiomes indépendants, envisagé par rapport aux divers réseaux de conséquences qu'on peut en tirer, en mathématiques, aux divers corps de propositions qu'on peut édifier sur lui, grâce à un plus ou moins grand nombre d'adjonctions. Dans le premier cas, la simplicité du système tient, comme nous l'avons répété, uniquement au petit nombre d'axiomes et de principes logiques sous-entendus, qui, en fait, le constituent ; — au petit nombre d'opérations logiques fondamentales qu'il nécessite pour être « posé ». Dans le second cas, à étendue et à variété égales des corps de propositions mathématiques qui reposent sur lui, le système le plus simple sera celui qui nécessite, pour être « posé », le plus petit nombre d'opérations logiques. Mais, à nombre égal d'opérations logiques fondamentales, le système d'axiomes préféré « pour raisons de simplicité » est celui en partant duquel on peut asseoir, grâce au plus petit nombre possible

(25) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 173.
(26) **L. Couturat.** Idem, h. 174.

d'adjonctions, les corps de propositions mathématiques les plus vastes et les plus divers.

Il ne s'agit plus ici, à proprement parler, de la simplicité « du système d'axiomes », de « la » théorie particulière dont il est d'abord question à propos de lui (envisagés isolément, deux systèmes d'axiomes, reposant sur un nombre égal d'opérations logiques fondamentales, sont également simples) ; il s'agit bien plutôt de la simplicité de la théorie générale qui, grâce à ce petit nombre d'opérations logiques fondamentales, introduit dans la diversité des domaines distincts des mathématiques — comme ici dans la géométrie descriptive, la géométrie projective et la géométrie métrique — une unité d'autant plus frappante qu'elle s'étend plus loin, et qu'elle couvre plus de variété. Et cette unité est d'autant plus complète :

1° Comme nous venons de le dire, que les domaines qu'elle lie sont plus éloignés.

2° Que moins d'opérations (moins d'éléments logiques nouveaux) sont à adjoindre aux opérations fondamentales du système initial, pour pouvoir passer régulièrement d'un domaine à l'autre.

La simplicité de la « théorie », tient, comme le montre Couturat dans son exemple, à ce que très peu d'axiomes, très peu d'affirmations fondamentales, sont nécessaires pour asseoir les édifices de conséquences, très divers au premier abord, entre lesquels cette théorie met de l'unité ; — et le système initial d'axiomes est considéré comme appartenant à cette théorie là, dans sa généralité, et non à l'un seul des domaines qu'elle éclaire — ici, par exemple, à la géométrie descriptive.

En somme, dans un cas comme dans l'autre, simplicité mathématique est synonyme d'économie de pensée ; — non psychologiquement parlant, mais logiquement parlant, ne l'oublions pas. Elle est synonyme de « caractère de la pensée mathématique *directe* ».

Seulement, alors que dans le premier cas, la pensée porte uniquement sur le système d'axiomes base d'une certaine théorie, dans le second, elle porte sur le système en tant que moyen de prendre connaissance de l'unité d'un ensemble plus ou moins vaste de propositions, ou, si l'on envisage les mathématiques comme le produit d'une création, comme un moyen de mettre de l'unité, dans cet ensemble. La simplicité

mathématique, si l'on en veut une autre expression, correspondra à un nombre, dans le premier cas, à un rapport dans le second. Mais ce nombre et ce rapport, ne sont ici et là, que la manière de traduire soit une économie d'opérations logiques dont on ne spécifie pas la portée générale (et qu'on envisage seulement sous un certain angle), soit une économie d'opérations logiques en vue d'un travail d'unification rationnelle des objets de la pensée mathématique, que l'on veut aussi complète que possible. Dans les deux cas, on peut dire, semble-t-il, ce que nous disions plus haut : *la théorie la plus simple est la théorie la plus directe.* Le système d'axiomes, en effet, qui assied une théorie est le plus direct, quand cette théorie (la seule en question), est entièrement réductible au moins grand nombre possible d'éléments logiques, est pensable en partant du moins grand nombre possible d'axiomes et de principes logiques sous-entendus. D'autre part, le système d'axiomes que l'on considère dans sa portée mathématique générale (comme Couturat, dans notre exemple, considère la « théorie de O. Veblen sur la géométrie descriptive), est, d'autant plus direct qu'il constitue dans les mathémathiques prises dans leur ensemble, un instrument d'unité plus vaste et plus complète, tout en comprenant le moins possible d'axiomes et de principes logiques, — en faisant appel au plus petit nombre possible d'opérations logiques.

Il nous faut, maintenant, essayer d'élucider ce qu'est, toujours pour l'école logistique, la simplicité de ces « enchaînements » au sens plus propre du mot, que sont les démonstrations mathématiques. Et avant toute examinons ce que c'est qu'une démonstration. « Démontrer une proposition, dit Couturat, c'est la déduire de certaines autres, admises ou données comme vraies, au moyen des seuls principes de la logique » (27). Les principes du syllogisme, de simplification, de composition, de contraposition, d'importation et d'exportation, et les formules du syllogisme hypothétique qui en dérivent (28) peuvent, ajoute-t-il, presque tous servir. Il s'agit là de la démonstration mathématique, car « il n'y a pas d'autre mode de démonstration en mathématiques que ceux valables en logique. Tout autre procédé de raisonnement est

(27) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 35.

(28) Voir dans l'ouvrage cité de **Couturat** la partie qui traite de la Logique Symbolique.

aujourd'hui considéré comme illégitime, au moins comme moyen de démonstration, et ne peut servir, tout au plus, que comme moyen d'invention » (29).

Et la psychologie de l'inventeur n'est pas ici ce que nous considérons. Nous essayons de nous placer, comme les Logisticiens eux-mêmes, devant une mathématique achevée, en tant que donnée logique, et nous cherchons à dégager ce qui rend ses enchaînements « simples » quand cela leur arrive de l'être. La démonstration est l'enchaînement mathématique par excellence, et les Logisticiens reconnaissent aisément l'importance de sa place dans la science qu'ils s'efforcent d'analyser. « La Méthode Logique consiste, déclare encore L. Couturat, en un double processus de réduction : réduction des notions les unes aux autres par la définition, et réduction des propositions les unes aux autres par la démonstration » (30).

Mais il est beaucoup plus difficile de trouver des textes de philosophes de l'école logistique, permettant d'étudier ce qui fait, pour eux, la simplicité des démonstrations, qu'il ne l'a été d'en citer pour mettre en lumière l'idée que ces mêmes philosophes mathématiciens se font de la simplicité des « théories » mathématiques. Nous ne trouvons pas, en effet, dans leurs œuvres — du moins dans celles que nous avons pu consulter, — de parallèle entre deux démonstrations de la même proposition dont l'une soit déclarée être « plus simple » que l'autre, parallèle duquel il ressorte les raisons de cette plus grande simplicité, comme nous avons trouvé à plusieurs reprises, des parallèles entre deux (ou plusieurs), systèmes d'axiomes à la base de la théorie mathématique d'une même notion. Il ne nous est donc pas possible d'étudier dans le détail, comme nous venons de le faire pour les systèmes d'axiomes, un « exemple » qui nous éclairerait sur ce qui fait la simplicité des démonstrations aux yeux des Logisticiens. Tout ce que nous pouvons faire, est d'essayer d'établir ce qui « vraisemblablement », ce qui « probablement », sans doute, la constitue à leurs yeux, en tâchant de nous placer dans l'esprit de leur philosophie mathématique.

Une démonstration, avons-nous rappelé au début, et la « réduction » logique d'une proposition, à une proposition admise. Partant d'une proposition admise, on aboutit, par

---

(29) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 35.
(30) **L. Couturat. Idem,** p. 35.

une suite de déductions, à montrer l'équivalence de la proposition à démontrer, avec une autre, déduite de celle dont on est parti, et par conséquent, considérée comme équivalente à elle. Telle semble bien être la pensée de Couturat et des autres Logisticiens, pour lesquels le principe d'implication des propositions joue un si grand rôle dans les mathématiques.

Prenons pour exemple une démonstration mathématique. Essayons de mettre en évidence, en elle, cette réduction progressive d'une proposition nouvelle à une proposition connue, puis d'en tirer quelques conséquences sur ce qui, pour le Logisticien, y est important et doit entrer en ligne de compte dans une recherche possible de ce qui fait sa plus ou moins grande simplicité. Choisir une démonstration géométrique dans laquelle nous aiderions la pensée raisonnante d'une figure, tracée ou imaginée, serait contraire à l'esprit de l'école logistique, pour lequel la mathématique pure se légitime entièrement sans le moindre appel à l'intuition, de quelqu'ordre qu'elle soit. Une démonstration géométrique, ne devra, pour eux, tant que nous ne sortons pas de la géométrie pure — et n'oublions jamais que c'est sur la mathématique pure que s'édifie toute leur philosophie scientifique, — faire usage que de propositions dont toute signification concrète est entièrement négligeable puisque tout à fait indifférente. On pourrait, dans ce sens, prendre pour exemple une des démonstrations géométriques de Hilbert. Mais il semble qu'il est tout aussi instructif de s'arrêter à n'importe quelle démonstration de mathématique élémentaire classique, pourvu que l'intuition n'y joue absolument aucun rôle — pourvu, en d'autres termes, qu'elle soit, aux yeux d'un Logisticien, parfaitement « satisfaisante » au point de vue mathématique. Nous prendrons la démonstration du théorème selon lequel on a : $\log (xx') = \log x + \log x'$ (31).

« Soit, dira-t-on, a, la base, et posons

(1) $\quad y = \log x \qquad\qquad y' = \log x'$

Cela équivaut à :

(2) $\quad x = a^y \qquad\qquad x' = a^{y'}$

En multipliant membre à membre ces égalités, nous obtenons :

$$xx' \quad a^{(y+y')}$$

(31) **Vessiot** et **Montel**. « Cours de mathématiques générales », tome I, p. 64.

Ce qui équivaut à $y + y' = \log (xx')$, ou, en remplaçant y et y' par leurs valeurs (1)

$$\log x + \log x' = \log (xx'). \text{ c. q. f. d.}$$

Cette démonstration est, comme on le voit, une réduction de la proposition à démontrer à une proposition admise ; c'est la mise en évidence que la formule $\log (xx') = \log x + \log x'$ est impliquée par la formule $xx' = a^{y+y'}$, et que, par conséquent, d'après le principe même de l'implication, — le plus couramment à rappeler des principes qui sont à la base de la « Logique des Propositions » — il faut l'admettre, puisque, par hypothèse on admet que

$$xx' = a^{y+y'}$$

Tâchons de l'analyser de plus près.

Nous y voyons tout d'abord poser que $y = \log x$ et que $y' = \log x'$.

Cela a son importance. Cela a même, psychologiquement, du point de vue de la recherche de ce qui se passe, sans doute, inconsciemment chez le mathématicien, une importance énorme car cela prépare la démonstration. Par l'artifice — car c'en est un — qui consiste à écrire certaines données du problème sous une forme particulière, voire même simplement à les désigner par une certaine lettre, déjà rencontrée dans l'expression de certaines propositions bien connues, on « aide » l'esprit à trouver, par association d'idées, entre la proposition qui est à démontrer et quelque propisition familière, une relation — celle justiment sur laquelle toute la démonstration repose. Ici la lettre y remplit cet office de « mettre l'esprit sur la voie », et cela, simplement, parce que celui qui s'occupe de démontrer un théorème concernant les logarithmes est familiarisé (ou supposé l'être), avec la formule même qui représente toute fonction logarithmique $y = \log x$ (ou $y = \log_a x$, a étant ce que dans ce cas, les mathématiciens appellent la « base »). Cet « y » lui fera se souvenir de ce qu'il sait sur cette fonction, au bon moment. Mais, à ce stade, on ne saurait dire que, logiquement, la démonstration soit commencée. Il s'agit, en effet, de démontrer l'égalité du log du produit xx', et de la somme $(\log x + \log x')$. On n'a rien fait, absolument, dans ce sens, quand on a donné un nom à $\log x$ et un autre nom à $\log x'$ (et remplacé, apparemment le second membre de l'égalité à démontrer par $(y + y')$ ni même quand on a

appelé la base « a ». Tout reste encore à faire, dans la réduction de la proposition « Le log du produit xx' est égal à la somme (log x + log x') » à une proposition connue..

La démonstration « commence » vraiment quand, après avoir « posé » $y = \log x$ et $y' = \log x'$, on passe de là à l'affirmation (2) que $x = a^y$ et $x' = a^{y'}$ (a étant la base). On aurait pu tout aussi bien, sans poser y ey y', en venir à la seconde affirmation directement et l'écrire

$$x = a^{\log x} \qquad\qquad x' = a^{\log x'}$$

« Logiquement », c'est d'ailleurs ainsi que l'on a procédé, la lettre y n'étant, comme nous venons de le dire, qu'une désignation commode pour aider l'intuition, dont le logisticien n'a pas à tenir compte puisque, pour lui, la démonstration comme fait logique et mathématique s'explique sans elle. Comment arrive-t-on à cette double affirmation ? On la pose parce que l'on sait que : « Par définition la fonction $y = \log_a x$, est la fonction inverse de $x = a^y$ » (32). Mais l'application de ce savoir suppose tout un raisonnement, qui, pour inconscient qu'il puisse être chez celui qui s'y livre, a une grande valeur aux yeux du Logisticien — parce qu'il montre l'utilisation des principes logiques pour faire avancer la pensée en mathématiques.

On a donc pu établir la formule à laquelle nous prêtons pour le moment attention — à savoir $x = a^y$, $x' = a^{y'}$, grâce à cet axiome de la Logique des Relations, dirait Couturat, ou tout autre de son école, selon lequel « toute relation a sa converse, et (R étant une relation entre deux termes quelconques x et y et R^c étant la converse de R), on peut affirmer que si xRy est vrai yR^cx l'est aussi. »

Ce principe a été appliqué au présent cas par un syllogisme, ou plutôt par deux syllogismes. Dans le premier, la majeure est le principe même que nous avons cité. La mineure serait : or $y = \log x$ et $x = a^y$ sont deux relations inverses entre x et y. (Qu'est-ce qu'une « fonction » si ce n'est une certaine relation constante affirmée entre deux termes ?) La conclusion serait « donc toutes les fois que l'on pose $y = \log x$ on affirme aussi que $x = a^y$ ». C'est cette conclusion qui devient la majeure du second syllogisme. Sa mineure serait : « Or, ici nous avons posé $y = \log x$ », et sa

(32) **Vessiot et Montel.** Ouvrage cité, p. 61.

conclusion : « donc nous pouvons écrire : $x = a^y$ » (et $x' = a^{y'}$ par un raisonnement en tout point analogue appliqué à $y' = \log x'$).

Ce sont-là, semble-t-il, les deux premières opérations logiques de la démonstration que nous examinons. Elles ont abouti à nous faire « avancer » d'un pas dans la voie de la réduction, en nous permettant de considérer deux égalités impliquées chacune par une partie du second membre de l'égalité à démontrer ; en nous mettant c'est-à-dire sur la voie, puisque, ce que nous cherchons, c'est à montrer que l'égalité à démontrer est impliquée par quelque chose que nous connaissons déjà, et, par conséquent, doit être admise. Mais, jusqu'ici, nous ne nous sommes pas, à proprement parler, occupés de l'égalité en question, mais seulement d'un de ses membres. Notre habileté a consisté à mettre en lumière ce que ce membre représente pour notre savoir acquis, de façon à pouvoir, à l'aide des nouvelles formules qui le traduisent, reconstituer aisément une égalité impliquée par la proposée, ou l'impliquant, donc, équivalente, logiquement, à elle.

Nous avons alors l'idée de multiplier membre à membre $x = a^y$ et $x' = a^{y'}$ de manière à mettre en évidence la valeur du produit xx'. N'est-ce pas, en effet, la valeur du logarithme de ce produit qu'on nous demande de démontrer comme étant égale à une certaine expression ? Or, nous savons que rien n'est plus direct, plus rapide par conséquent (logiquement), que de déduire ce logarithme de la valeur trouvée : ce sera, d'après la définition même de la fonction logarithmique, l'exposant de la « base » a.

L'intuition, sans doute, guide le chercheur et l'incite à former le produit xx' lui faisant sentir que, ce produit étant formé, il aura avancé d'un pas dans la démonstration. Mais l'idée même de former ce produit se justifie par un syllogisme ou plutôt une suite de syllogismes. La majeure du premier — si nous voulons remonter, suivant l'exemple que donnent les Logisticiens dans de si nombreux cas, aussi haut que possible vers les principes, — serait l'affirmation de ce même axiome auquel nous faisions allusion plus haut, que la proposition qui affirme ou nie entre deux termes quelconques une relation quelconque, implique la proposition qui affirme ou nie, entre ces deux mêmes termes, la relation converse. C'est d'à partir de là que la « cascade de syllogismes » commence, et si elle n'est pas « toute la déduction » vue du

dedans, si le psychologue doit en premier chef tenir compte de l'activité créatrice de l'esprit guidée par une intuition spéciale (et les Logisticiens eux-mêmes ne le nieraient pas), elle n'en reste pas moins tout ce que l'on peut à l'analyse saisir de la déduction, tout ce qu'elle est, logiquement, en tant que fait à l'étude.

Une fois la recherche du produit xx' logiquement légitimée — au nom, comme nous l'avons dit d'un des principes de la Logique des Relations, — il s'agit de s'y livrer. Pour cela, on applique la règle connue sur la formation du produit de deux puissances d'une même quantité, au moyen d'un nouveau syllogisme (de la première figure), dont cette règle est la majeure. Et l'affirmation de la conclusion est, en effet, un « pas de plus » dans la démonstration, car elle « pose » une égalité qui nous amène plus près de la proposée. En effet, nous voyons entre elle et celle que nous devons démontrer des similitudes de forme — et ce sont celles qui nous intéressent. C'est d'abord « une » égalité (et non deux, comme nous en avons posé précédemment) et puis, l'un de ses membres (xx') a, on s'en doute, avec log (xx'), membre de la proposée, une relation directement mettable en évidence.

Le dernier pas dans le sens de la réduction est fait lorsqu'on a montré que l'égalité obtenue implique la proposée, d'après la définition même de la fonction logarithmique, que, dire que $xx' = a^{y+y'}$ (c'est-à-dire $a^{\log x + \log x'}$, d'après nos conventions de langage), c'est-à-dire que $(\log x + \log x')$ n'est autre que le logarithme du produit xx' et ceci du fait que poser $x = a^y$ c'est poser par là même (d'après le principe déjà deux fois rappelé, de la Logique Symbolique) : $y = \log x$. Une troisième et dernière suite de syllogismes sert à l'accomplissement de ce dernier pas.

En somme, nous voyons que l'essence de la démonstration, est d'être une réduction progressive de la proposition à démontrer à une proposition connue, et qu'elle se fait par une succession de raisonnements syllogistiques dont chacun part de l'affirmation de l'un des grands principes de la Logique Symbolique. Cette affirmation, pratiquement, est implicite, cela va de soi, mais cela importe peu. Logiquement, elle existe ; et il semble que les philosophes de l'école qui fait sortir toutes les mathématiques uniquement de cette Logique Symbolique, ne sauraient moins faire que de remonter jusqu'à elle dans l'analyse des démonstrations dont ces sciences sont

faites. Il semble aussi que, ce qu'ils considéraient dans la démonstration comme essentiel, — d'après cela même qu'elle représente pour eux, — ce soit les différentes suites de déductions, consistant chacune à descendre du principe de logique au cas singulier envisagé, pour mettre en évidence qu'une certaine proposition en implique une certaine autre, qui, de ce fait, lui est logiquement équivalente. Nous avons vu; dans la présente démonstration, trois suites de déductions de cet ordre, comme, en somme, trois raisonnements distincts bien que liés entre eux, et (ce qui, ici, compte également), découlant tous trois du même axiome de Logique Symbolique, cité plus haut, concernant les relations et leurs converses. Ces trois raisonnements — ou plutôt ces trois « articulations » (ici le terme prend un sens), d'un même raisonnement, forment, peut-on dire, les trois éléments de notre démonstration.

Chacun d'un d'eux est composé d'un certain nombre de syllogismes, à l'origine du premier desquels, se trouve toujours un rappel de la base de vérité sur laquelle s'élève, d'après les Logisticiens, tout raisonnement mathématique, l'affirmation, c'est-à-dire, d'un principe de la Logique Symbolique. Et l'opération logique centrale, essentielle, de chacun, celle qui « fait avancer » vraiment la démonstration, consiste en l'affirmation de l'identité logique, pour ainsi dire, (puisque de l'implication mutuelle), de deux propositions, au nom de cette base de vérité, comme au bien fondé de toute relation mathématique. Et la démonstration prend fin, alors que cette même identité logique est etablie (au nom, toujours de quelque principe de la Logique Symbolique), entre quelque proposition connue et la proposition que l'on voulait arriver à « démontrer ».

Les syllogismes liés les uns aux autres, qui composent chacun de ces raisonnements, entrent bien dans la démonstration, mais uniquement en tant qu'éléments des raisonnements singuliers que leur chaîne constitue. Ils sont comme les « pas » faits entre les « haltes », le long d'une voie qui mènerait à la conclusion, à savoir, que ce qu'on se proposait de démontrer est démontré en effet. Or, si la démonstration n'est logiquement pas autre chose qu'une « suite de réductions », seules les « haltes » importent, car seule chacune d'elles constitue, véritablement, « une réduction ». En d'autres termes, ce sont ces raisonnements dont chacun abou-

tit à « réduire » la proposition à démontrer à une autre, puis à une autre, puis à une autre, (progressivement, jusqu'à ce qu'on arrive à une proposition connue), qui, du point de vue de la marche logique que la démonstration constitue, importent ; qui sont les « éléments » logiques véritables de cette démonstration. Peu importe, par contre, la longueur ou la texture propre de chacun d'eux, pris individuellement. Dans « la démonstration », ce sont des « unités », des « étapes » et voilà tout. Du moins, telle semble être la façon dont les considérerait un Logisticien, pour qui, le fait d'être une réduction logique progressive d'une proposition à une autre, est le caractère primordial, on peut dire l'« essence » de toute démonstration mathématique, — et sans doute, de toute démonstration parfaitement rigoureuse, en général.

Si, maintenant, nous nous demandons ce qu'il entendra par une démonstration plus simple qu'une autre, d'après ce qui précède, et, — pour raisonner par analogie sur l'opinion probable de la même école sur le sujet présent, — d'après ce qui fait, pour lui, nous l'avons vu, la simplicité d'une « théorie » mathématique, il semble qu'il doive déclarer la « plus simple », la démonstration qui arrivera à « réduire » la proposition à démontrer à une proposition connue, en le moins grand nombre d'« étapes » possible ; celle où les raisonnements distincts, mais liés, dont nous avons parlé, et dont chacun est suspendu à une opération logique utilisant quelque principe de la Logique Symbolique, soient le moins nombreux ; en d'autres termes, celle dans laquelle sont le moins nombreux, ces retours de l'esprit à la Logique Symsource de toute vérité mathématique — retours nécessaires pour étayer chaque nouvelle « réduction » à laquelle on procède. Et remarquons qu'il ne s'agit nullement du nombre de principes de la Logique Symbolique mis en jeu, mais uniquement du nombre de « fois » que l'esprit, logiquement, bien que, sans nul doute, inconsciemment, est obligé de remonter à quelqu'un de ces principes, — fût-ce toujours au même, comme dans notre exemple, où, malgré cela, nous avons bien une démonstration à trois articulations, une réduction en trois étapes, parce que nous y avons trois « actes logiques » originaux.

Nous ne disons pas que ces actes logiques soient les seuls ; au contraire, dans chaque syllogisme nous voyons une nouvelle opération logique. Mais ce sont les seuls « origi-

naux », disons-nous, qui déclenchent les autres comme un mécanisme que nous devons envisager dans son ensemble. Et nous devons le considérer dans son ensemble comme un « tout », ce mécanisme, non pas parce qu'il est « un mécanisme », par opposition à l'opération initiale qui le relie au système de la Logique Symbolique, — ce serait là vouloir faire de la psychologie (ce dont les Logisticiens se gardent), et même de la mauvaise psychologie, car, en somme, en quoi l'opération logique initiale de chacun de nos raisonnements est-elle moins « mécanique » que celles qui suivent ? — mais parce qu'il tend tout entier, avec l'opération qui l'a amené, à une réduction déterminée de la proposition en question à une certaine autre. Or, nous savons que, d'après la conception logistique, ce sont ces réductions qui comptent dans la démonstration ; et en nous ramenant, d'une part, à la Logique Symbolique, (système de propositions « connues », « établies », solides entre toutes), et, d'autre part en étant le point de départ du raisonnement « mécanique » dont nous parlons, ce que nous avons dénommé « chacun des actes logiques initiaux » de nos différents raisonnements liés en démonstration, légitime la réduction de la proposition à démontrer à une autre proposition, et à une seule.

En résumé, comme nous avons vu la théorie mathématique, basée sur un certain nombre de principes (les uns exprimés dans les axiomes cités pour la fonder, les autres sous-entendus par la possibilité de développement de ceux-ci, — principes dont chacun, pour être posé, nécessite une opération à part, et que nous avons appelés, plus haut, ses « éléments » logiques —), est d'autant plus simple qu'elle comporte moins de ces éléments ; de même, disons-nous, en croyant interpréter ainsi la pensée de l'école de Russell et de Couturat, que la démonstration, dont l'essence est d'être une réduction logique progressive, est, semble-t-il, en tant que telle, d'autant plus « simple » qu'elle comporte moins d'éléments, — c'est-à-dire, ici, moins de raisonnements aboutissant, à partir des axiomes de la Logique Symbolique, à l'établissement d'une nouvelle proposition équivalente à la proposition examinée, moins d'étapes dans la réduction.

Les raisonnements aboutissant à la réduction de la proposition à démontrer à une proposition nouvelle, sont, dans la démonstration, ce que les axiomes et principes posés ou sous-entendus, sont dans la « théorie mathématique » ; ce

sont les opérations avec lesquelles elle est faite ; ses « élément » à la fois logiques et architecturaux, — ce qui, ici, est la même chose, puisqu'il s'agit d'une construction logique pure.

Nous ne disons pas que toutes ces opérations soient également « simples » ou courtes, ni même qu'elles soient simples du tout. Mais il semble, du moins d'après la définition logistique de la démonstration, empruntée aux textes, que leur simplicité ou complexité individuelle, n'a rien à voir avec la sienne.

Ceci est utile à signaler, car nous pouvons saisir là, une opposition entre le point de vue du sens commun et celui d'une école de logiciens, et nous demander en quoi, au juste, elle consiste. Nous verrons qu'elle vient de ce que les uns et les autres, — ceux qui suivent le sens commun tout seul, et les Logisticiens, — en parlant de « démonstration » n'appellent pas du même nom la même chose. En effet, au premier abord, une « démonstration » paraît d'autant plus simple qu'elle est plus courte, c'est-à-dire, que l'on y montre l'équivalence de la proposition à démontrer avec une proposition admise par le moyen d'un plus petit nombre de syllogismes. (Nous écartons comme tout à fait inadéquate, même du point de vue du sens commun, l'idée que la démonstration la plus simple serait la plus facilement comprise par le plus grand nombre de gens). Tous les syllogismes se trouvent, en fait, dans l'exposé de la démonstration, liés les uns aux autres, on ne voit pas pourquoi on s'arrêterait à poser une coupure après la conclusion de certains d'entre eux. Cela paraît arbitraire, parce que, le sens commun confond « la démonstration » avec « l'exposé » de la démonstration », — sinon avec l'exposé écrit, du moins avec l'exposé tel que l'esprit le reconstitue facilement, en rétablissant, entre les propositions énoncées, la continuité syllogistique sans se préoccuper de rien de plus.

D'après la théorie que nous avons cru répondre à l'interprétation plus plausible de la pensée logistique, au contraire, une démonstration longue, et d'apparence embarrassée peut être quelque fois plus simple, « logiquement », qu'une autre qui le paraît beaucoup moins. Il suffit que la proposition qu'on y démontre, y soit ramenée, « réduite » à une proposition déjà admise, en moins d'étapes (c'est-à-dire en passant par moins de propositions équivalentes intermédiaires). Peu

importe la longueur ou la malaisance du chemin à suivre entre une proposition et l'autre. C'est que la théorie logistique n'a trait qu'à la démonstration « en elle-même », à la démonstration, processus logique, considérée indépendamment des moyens, logiques ou non, qu'on peut employer pour démontrer. Elle ne concerne ni la suite réelle des opérations déductives qui se succèdent chez celui qui démontre une proposition mathématique (elle n'est pas une théorie reposant sur les données « psychologiques »), ni la suite complète des syllogismes qu'on peut rétablir, syllogismes qui n'entrent dans la démonstration que parce qu'ils sont les éléments des raisonnements plus vastes qui font partie d'elle. Le nombre des syllogismes a affaire seulement, pour ce qui est de chacun de ces raisonnements, avec la simplicité de ce raisonnement-là, qui, lui, simple ou complexe, est un constituant de la démonstration, un pas en avant dans la progressive « réduction » logique, que l'on a sous les yeux. C'est là ce que l'on néglige au premier abord, et cela, faute d'une analyse préalable de l'idée même de « démonstration », au point de vue logique.

La complexité d'une démonstration peut aussi (apparemment), tenir à ce que la nature de la proposition à démontrer est telle, qu'avant de procéder à la réduction logique proprement dite de la proposition à démontrer à une autre, il est nécessaire de considérer plusieurs cas. Soit, par exemple, à démontrer que, « si m tend vers zéro, a^m tend vers 1 » (33). Nous ne connaissons rien de la valeur de a, qui peut être tout à fait quelconque. La supposer d'emblée « quelconque » nous embarrasserait beaucoup. Pour certaines valeurs privilégiées de a, la démonstration devient extrêmement claire et rapide, d'ailleurs. Ne pas classer les valeurs de a serait donc, — si la chose était possible — ajouter, en réalité la complexité de la démonstration, sous prétexte d'unité. Or nous avons vu, dès le début, chez les mathématiciens, un « souci de simplicité ». C'est ce souci, qui fera préférer la démonstration en plusieurs parties distinctes, — chacune simple, — d'une proposition, à celle beaucoup plus complexe (beaucoup moins directe), de la même proposition, d'emblée dans toute sa généralité variée. Ici, dans l'exemple cité il

(33) Vessiot et Montel, « Cours de mathématiques générales », t. I, p. 50.

y a quelques lignes, on envisagera trois cas : c'est-à-dire qu'on démontrera (ce qui sera vite fait) 1° que « si m tend vers zéro, a^m tend vers 1 », quand a est égal à 1 ; 2° que « si m tend vers zéro, a^m tend vers 1 », quand a est plus grand que 1 ; 3° que « si m tend vers zéro, a^m tend vers 1 », quand a est plus petit que 1, a, ne pouvant être autre chose que égal, plus grand ou plus petit que 1 (ou que tout autre nombre donné), toutes les possibilités sont épuisées quand ces trois cas sont examinés, et la démonstration, par conséquent, finie.

Mais on ne saurait confondre la soi-disant complexité d'une telle espèce de démonstration, — moyen, en fait, d'éviter une complexité, semble-t-il bien plus grande, — avec elle qui résulte d'un grand nombre d'étapes dans la réduction logique. Dans le cas où la proposition à démontrer peut avoir plusieurs sens, (dont il faut tout de même bien tenir compte, car chacun d'eux fait d'elle, en quelque sorte, une « autre » proposition »), ce n'est pas, en réalité, « la démonstration » qui est complexe, mais bien « la proposition à démontrer ». La « démonstration » est, ici, en fait, la réunion de plusieurs démonstrations différentes, distinctes non pas quant à l'intérêt de la marche suivie, mais quant au contenu de la proposition à démontrer, quant au point où elles veulent en venir, et mises ensemble pour la seule raison qu'elles se complètent l'une l'autre, ayant toutes trait aux différentes « possibilités » d'une même chose : de la variation de a^m, quand m tend vers zéro ».

Chacune de ces démonstrations est, comme nous l'avons dit, « simple » dans la mesure où elle est directe, dans la mesure où elle comporte moins de réductions logiques de la proposition à démontrer à une autre proposition, avant qu'on en arrive à la réduction dernière qui clôt le processus.

*
**

Nous pourrions nous demander aussi en quoi consiste, pour les Logisticiens, la simplicité d'un raisonnement mathématique, en général. Toutefois, cela paraît à peine nécessaire après ce que nous venons de dire des démonstrations et des théories.

Nous pouvons dire, semble-t-il que, quelle que soit, pour le logicien qui observe chez l'esprit au travail, la nature du raisonnement déductif, il subsiste, pour celui qui l'analyse

en tant que « fait » logique, indépendamment de sa genèse. (comme le font les Logisticiens), que ce raisonnement se réduit à une suite de raisonnements élémentaires ou syllogismes (énoncés ou sous-entendus), comme on peut le voir dans les raisonnements qui composent nos précédentes démonstrations.

Dans ce cas, un raisonnement sera, logiquement, d'autant plus « simple » qu'il sera fait de l'enchaînement de moins de syllogismes (énoncés ou sous-entendus). Et comme c'est la Logique Symbolique qui donne au raisonnement mathématique, l'appui qui en fait la valeur, — qui lui permet, dès son début, de se passer de toute base intuitive, — la majeure du premier syllogisme (sous-entendu) dans un tel raisonnement, sera l'énoncé de l'un des principes de Logique Symbolique, que nos auteurs ont exposés et étudiés, et le premier syllogisme une application de ce principe. Chaque autre syllogisme part, soit d'un axiome de la Logique Symbolique, soit d'une proposition, connue et admise comme conclusion du syllogysme précédent — et, dans ce dernier cas encore, on peut dire que c'est, en fait, à la Logique Symbolique qu'on s'en réfère chaque fois, car c'est grâce à cet axiome, si important, que les Logisticiens appellent « principe du syllogisme hypothétique » (34) (et qui peut s'énoncer « pɔq. pɔr. pɔr » c'est-à-dire « La relation d'implication est transitive »), que chaque nouveau syllogisme est appelé dans le développement du raisonnement. C'est ce principe qui fait de lui, comme des précédents, une opération logique valable, et, en quelques sorte, « indépendante », puisque directement rattachée à la source même de la logique, et justifiée de ce fait.

On objectera, sans doute, que nous rencontrons en mathématiques des quantités de déductions non syllogistiques, relevant de la « Logique des Relations », différente de la « Logique de l'Inhérence » ou de l'Attribution ; que, en particulier, tous les raisonnements mettant en jeu des propositions qui comportent la pseudo copule « égal », entrent dans cette catégorie. Et on dira que c'est justement l'un des mérites de l'école Logistique, que d'avoir insisté sur ce fait que la Logique des Relations, est la logique mathématique par excellence, et même que la relation d'attribut à ce sujet n'est pas

(34) **L. Couturat.** Ouvrage cité, pp. 11-12.

une relation mathématique du tout. Comment donc, cela étant, parler de raisonnements mathématiques « composés de syllogismes », et dire que, dans l'esprit de la doctrine logistique, un tel raisonnement sera d'autant plus simple qu'il sera constitué par moins de syllogisme ? Il y a là un point à éclaircir, apparemment.

Toutefois, si l'on y réfléchit, il semble que l'« objection » que nous venons de nous faire en quelque sorte à nous-même, ne puisse que reposer sur une confusion, quant à ce que nous avons voulu dire, en écrivant qu'un raisonnement mathématique est « composé de syllogismes ». D'abord, nous avons parlé de syllogismes sous-entendus, entre autres, laissant entendre par là que le raisonnement que nous examinions, n'était pas le raisonnement « exprimé », à proprement parler, ni celui que l'esprit chercheur « suit », (psychologiquement), mais celui qui logiquement, en droit, indépendamment des actes logiques conscients réels, permet la réduction d'une proposition à une autre, c'est-à-dire, plus, justement, la mise en évidence de l'équivalence mathématique, de deux propositions. Il ne s'agissait pas, — il ne s'est jamais agi — pour nous, de soutenir que la déduction se réduit au syllogisme, et que les relations mathématiques sont des relations d'attribution. Mais, quelle que soit la nature de ces relations, il semble incontestable que, pour qu'un raisonnement ait de la valeur, c'est-à-dire, avance en ne perdant pas contact avec les principes qui, pour les Logisticiens, sont la base de toute spéculation, il faut que, par un acte logique sans cesse renouvelé (inconscient sans doute, mais en droit indispensable) sans cesse quelqu'un de ces principes, tout à fait généraux, soit appliqué au problème dont l'examen se déroule. Et cela ne se peut faire que par ce raisonnement élémentaire qu'est le syllogisme — appuyé comme nous venons de le voir, lui aussi, à l'origine, sur un des principes de la Logique Symbolique, ne portant pas directement sur les relations entre les termes mathématiques en question, mais, si on peut dire, sur des notions très générales de logique, dont les exemples mathématiques ne sont que des illustrations. Soit, par exemple le raisonnement qui consiste à dire : $A = B$, or $B = C$, donc $A = C$. On a répété, avec raison, que ce n'est pas un véritable syllogisme, car on n'« attribue » rien à A ou à B. ; on affirme seulement la relation qui existe entre eux, et des

propriétés (sous-entendues) de cette relation, on conclut à l'existence d'une autre relation (entre A et C), en passant par celle qui lie B et C. Mais on attribue quelque chose à la notion abstraite, logique, de « relation d'égalité », à savoir la « symétrie » et la « transivité », et si l'on voulait remonter à la source — c'est-à-dire à la Logique Symbolique d'où toute la mathématique est tirée, — le raisonnement précédent, logiquement beaucoup plus long qu'il ne l'est pratiquement, commencerait ainsi, par un syllogisme :

« Le relation d'égalité est symétrique et transitive,

Or cette relation est celle qui unit A et B,

Donc la relation qui unit A et B est symétrique et transitive. »

C'est, en fait, cette conclusion, qui s'exprime, dans le langage mathématique, en disant : Si $A = B$ et si $B = C$, $A = C$, affirmation qui sert de « majeure » au « syllogisme » dont la « mineure » serait : « Or, ici (dans le cas du problème que nous examinons), on a à la fois $A = B$ et $B = C$ », et la conclusion : « Donc, ici, $A = C$. »

Le syllogisme entre donc bien dans le raisonnement mathématique, non pas là où on a cru le voir d'abord et où en réalité il y a seulement des pseudo-syllogismes, mais au-delà. Et il semble que, envisagé de cette façon, les Logisticiens ne l'en excluraient pas. Il est l'acte logique qui met en relation les axiomes de la Logique Symbolique, et les propositions mathématiques qui en sont des illustrations, des applications, et, de ce point de vue, l'acte essentiel du raisonnement, ou plutôt le raisonnement essentiel. Le tout était de bien montrer l'existence et le rôle des syllogismes sous-entendus, à majeure extrêmement générale, derrière les pseudo-syllogismes (exprimés ou sous-entendus, eux aussi), qu'on a tendance à considérer comme constituant seuls les actes successifs du développement logique.

On conçoit aussi qu'il ne saurait être question de se demander si, pour les Logisticiens, le raisonnement mathématique est ou non un enchaînement linéaire, et s'il y a lieu de tenir compte des différents changements de direction, — (dus au fait qu'un syllogisme, au lieu d'admettre pour majeure la conclusion du précédent, admet pour majeure une proposition nouvelle), — dans l'appréciation de sa simplicité. Chaque nouveau syllogisme réel suppose l'appel à un principe de la Logique Symbolique. Même celui qui, dans son expression,

a pour majeure la conclusion du précédemment exprimé, suppose, derrière soi, un autre syllogisme dont la majeure est le « principe du syllogisme hypothétique » lui-même. Quelle que soit, donc, l'allure « linéaire » du développement du raisonnement, il faut, en réalité, à chaque pas, remonter à la source. Considérer à « quels » principes on remonte, et déclarer, par exemple, qu'un raisonnement d'allure parfaitement linéaire qui ne ferait tout au long appel qu'au seul principe de syllogisme hypothétique, est « plus simple » qu'un autre faisant appel à des principes divers commes majeures de ses syllogismes sous-entendus, ce serait tenir compte du « contenu » des propositions constituant les majeures, à la matière des syllogismes, et non à leur seule existence en tant qu'unités logiques. Ce serait, par là, sortir de l'attitude observée, nous l'avons vu dès le début, dans l'école des Logisticiens dont il est question. Peu importe que les principes invoqués soient un ou plusieurs, quant à leur contenu !— Chafois qu'on invoque un, fût-ce toujours le même, un syllogisme nouveau, un raisonnement élémentaire nouveau s'ajoute aux précédents, et, souvent, à celui-ci (qui est sous-entendu) s'en ajoute un autre (souvent exprimé), basé sur sa conclusion.

Il semble donc, en résumé, qu'on puisse dire, en gardant au syllogisme le sens que nous lui avons précisé dans le raisonnement mathématique, et en prenant en considération les syllogismes sous-entendus — les plus fondamentaux, — aussi bien que ceux qui sont exprimés (s'il s'en trouve), qu'un raisonnement est d'autant plus simple qu'il se compose, en effet, de moins de syllogismes ; en d'autres mots, d'autant plus simple qu'il est plus direct, qu'il y a moins de démarches logiques réelles, en lui, entre les données universelles de la Logique Symbolique et sa conclusion.

Cette affirmation semble en accord avec l'esprit de l'école en question, et elle est analogue à ce que nous avons dit, en tâchant d'interpréter les textes, de la simplicité mathématique des « démonstrations » et des « théories » comprises du point de vue logistique. Nous avions, en effet, à l'exemple de Russel et de Couturat, examiné la simplicité des « théories » en nous adressant aux systèmes d'axiomes qui sont à leur base. Et il nous était apparu que la théorie la plus « simple » mathématiquement, est la plus « directe ».

celle, c'est-à-dire qui, à extension égale du domaine mathématique qu'elle permet d'embrasser, comporte à sa base le moins d'axiomes et de principes logiques exprimés ou sous-entendus, autrement dit, le moins d'« éléments logiques » — car ce sont ces axiomes et principes, exprimés ou sous-entendus qui la constituent, et qui, pour les Logisticiens, suffisent à la constituer.

De même, nous avons vu que la démonstration la plus simple, semble être, pour les Logisticiens, toujours la plus directe. Et, toute démonstration étant, d'après le mot de Couturat, la réduction logique d'une proposition nouvelle à une proposition connue, — c'est-à-dire, la mise en évidence de leur « équivalence », — la plus directe est celle qui arrive progressivement à son but en passant par le moins d'étapes. Les étapes, — chacune des réductions achevées, ou des « équivalences » successivement montrées, — étant ce qui constitue logiquement la démonstration, celle-ci est d'autant plus simple qu'elle en compte un plus petit nombre.

Ici, enfin, nous voici arrivés à une conclusion analogue a savoir, que le raisonnement (au moyen duquel chaque réduction peut seulement s'opérer), est, lui aussi, d'autant plus simple qu'il comporte le moins d'éléments logiques, le moins d'opérations logiques constituantes, en un mot qu'il est plus direct. (On aurait pu dire seulement : d'autant plus simple qu'il comporte moins d'opérations constituantes, car, il n'y a pas, ici, d'autres opérations constituantes dans un raisonnement que des opérations logiques, comme il n'y a pas d'autres opérations constituantes d'une démonstration que ces réductions progressives dont nous parlions, ni d'une « théorie » mathématique que celles qui « posent » les axiomes et principes sur lesquels elle se fonde). « Simple », serait donc, quand il s'agit d'un « enchaînement » mathématique quel qu'il soit, synonyme de « direct », ou de « constitué d'un petit nombre d'opérations ». Et comme il ne s'agit, dans tout ceci que d'opérations logiques ; que, l'on doit faire abstraction de toute intuition qui pourrait les faire s'appeler l'une l'autre, et donner à leur ensemble plus ou moins d'une certaine unité interne ; que l'on doit aussi faire abstraction de toute matière sur laquelle portent ces opérations, il ne saurait, ici, être question de leur agencement.

La théorie, la démonstration, le raisonnement, — l'« enchaînement » mathématique, quel qu'il soit, — qui comporte *le moins* d'éléments, sera *toujours* le plus direct, et par là le plus simple. Cela peut dérouter quelque peu, étant donnée l'idée « intuitive » qu'on se fait, au premier abord d'un « enchaînement ». Mais cela semble bien découler nécessairement de la notion (familière apparemment à l'école que nous étudions), d'opérations logiques considérées en elles-même, comme des faits d'un ordre de choses « achevé », indépendamment de la psychologie de l'esprit qui les groupe d'une manière plutôt que d'une autre.

CHAPITRE VIII

CE QUE LES LOGISTICIENS ENTENDENT PAR « SIMPLICITE » DES NOTIONS ET ETRES MATHEMATIQUES

Ce que nous venons de conclure quant à la simplicité mathématique des « enchaînements », nous porte déjà, au début du présent examen, à une certaine défiance de nos « impressions », même très fortes, de simplicité dans tout domaine où seule l'analyse logique a le droit de se prononcer ; en d'autre termes, nous sommes portés à prévoir que, pas plus en ce qui concerne les « notions » des sciences mathématiques, qu'en ce qui concerne les « enchaînements » qu'elles présentent, la simplicité mathématique (que l'école que nous étudions confond tout à fait avec la simplicité logique), n'est à identifier avec la « simplicité » de ce qui nous serait familier, ou nous paraîtrait évident. Dès le début de cette étude, nous avons attiré l'attention sur cet écueil. Il n'est pas bon d'y insister trop. Mais l'écueil est trop clairement signalé, ici, par les Logisticiens eux-mêmes, pour que nous ne le rappelions pas. Ne serions-nous pas, en effet, assez adaptés encore à l'esprit de l'école logistique, pour éviter, dès l'abord, que l'idée de familiarité ne s'impose à nous en réalité, sous le nom de « simplicité », et ne fausse nos jugements, que nous pourrions, par les remarques très nettes des auteurs, nous convaincre de cette nécessité. « De même, en effet, dit Russell, que les corps les plus faciles à voir sont ceux qui ne sont ni trop loin, ni trop près, ni très petits, ni très grands, de même, les conceptions les plus faciles à saisir sont celles qui ne sont ni très compliquées ni très simples (en employant

le mot « simple » dans son sens logique (1) ». Et, plus loin, il met en évidence l'inconsistance de l'idée commune de simplicité d'une notion comme celle de « suite naturelle des nombres », par opposition à l'idée de la simplicité logique — c'est-à-dire mathématique — de la même notion. « Il a sûrement fallu des siècles, dit-il, pour découvrir qu'une paire de faisans et un couple de jours, sont deux exemples du nombre « deux »... Si nous nous étions embarqués, aux jours d'autrefois, dans une étude de philosophie mathématique, nous aurions dû partir avec quelque chose de moins abstrait que la série des nombres naturels, que nous aurions trouvée en revenant sur nos pas. Lorsque les bases logiques des mathématiques nous seront devenues familières, nous pourrons partir de plus loin encore en arrière de ce qui est maintenant un point gagné par notre analyse. Mais, pour le moment, les nombres naturels paraissent représenter ce qu'il y a de plus simple et de plus clair en mathématique » (2). L'important, ici, est justement ce « paraissent », qui indique bien — le contexte d'ailleurs nous en persuaderait, — que ce que l'on est très fortement tenté de prendre pour simple ne l'est pas mathématiquement, c'est-à-dire logiquement. Couturat exprime la même idée, quand, après avoir donné sa définition purement logique du continu, il déclare qu'on « verra en géométrie des définitions plus simples et plus intuitives du continu » (3), mais s'efforce de montrer que cette simplicité n'est au fond qu'apparente ; qu'elle « vient du fait qu'un certain nombre de conditions de la continuité se trouvent impliquées déjà dans la définition de la droite » (4), c'est-à-dire, qu'elle est le fruit, en somme, d'une insuffisance d'analyse.

Il s'agit donc, maintenant, d'étudier en quoi consiste, pour les philosophes de la même école, cette vraie simplicité des notions mathématiques, qui n'a rien à voir avec la simplicité que l'intuition peut leur prêter. Pour cela, nous procéderons comme précédemment dans l'étude de la simplicité des théories mathématiques, puisque les textes nous le permettent. Nous rappellerons, c'est-à-dire, quelques analy-

(1) **B. Russell.** « Introduction à la Philosophie Mathématique » (trad. Moreau), p. 12.
(2) **B. Russell.** Même ouvrage, p. 13.
(3) **L. Couturat.** « Principes des mathématiques », p. 97.
(4) **L. Couturat.** « Principes des Mathématiques », p. 97.

ses, plus ou moins poussées, de notions dont les auteurs font clairement allusion à la plus ou moins grande simplicité, et nous essayerons de voir à quoi tient leur jugement sur ces notions, de nous rendre compte pourquoi telle notion, à leurs yeux est « plus simple » qu'une autre.

Aussi bien Russell que Couturat ou Péano ou les autres théoriciens des mathématiques de mêmes tendances (tels que Burali-Forti, etc.), abordent la question de la définition logique du nombre, et. pour y arriver se voient forcés d'en analyser la notion. Les remarques que fait Russell à propos de cette analyse, sont fort intéressantes du point de vue qui nous occupe. Après avoir. en effet, critiqué la théorie de Péano comme pouvant servir de base à n'importe quelle progression aussi bien qu'à la « suite naturelle des nombres » (5), il en arrive à définir le nombre (entier), comme « la classe de toutes les classes qui lui sont semblables » (6), (définition que nous avons déjà rencontrée au cours de ces pages), deux classes étant dites « semblables », quand il existe une relation « de un à un » dont une classe est le domaine et l'autre le domaine réciproque » (7). Et de là il conclut que « la notion de similitude est logiquement impliquée dans l'opération de numération ; elle est logiquement « plus simple », bien que moins familière » (8). Toutes les propriétés fondamentales du nombre. viennent de ce que les classes qui ont le même nombre sont des classes semblables. « En comptant, il st nécessaire de prendre les objets dans un certain ordre. Mais l'ordre n'est pas l'essence du nombre ; c'est une addition hors de propos, une complication sans utilité du point de vue logique. La notion de similitude est indépendante de l'ordre. La notion de similitude ne demande pas non plus que les classes semblables soient finies » (9). Et c'est pour cela, que la notion de nombre, établie comme plus haut est indépendante, elle aussi, de l'ordre et qu'elle s'applique aussi bien aux classes infinies qu'aux classes finies.

---

(5) **B. Russell.** « Introduction à la Philosophie mathématique », p. 20.

(6) **B. Russell.** Même ouvrage, p. 31.

(7) **B. Russell.** Même ouvrage, p. 29.

(8) **B. Russell.** Même ouvrage, p. 30. — C'est nous qui soulignons cette affirmation.

(9) **B. Russell.** Idem, p. 30.

Il résulte de tout ceci que la notion la plus simple, logiquement, donc mathématiquement, est celle qui est « logiquement antérieure » à celle à laquelle on la compare ; celle que l'autre, ou les autres, impliquent ; celle qui, dans l'ordre des notions qui en supposent d'autres (auxquelles elles doivent leurs caractères logiques), est la plus primitive.

Mais qu'est-ce que la notion la « plus primitive » ? C'est la notion qui, pour se concevoir dans toute sa clarté et distinction, n'a besoin que du plus petit nombre possible d'autres notions, logiquement antérieures à elle. La notion réellement primitive, — et réellement simple, — serait « celle qui ne réclamerait pas, logiquement, cette sorte de définition qui procède par analyse » (10).

La notion mathématique n'étant rien, au fond qu'un être logique, créé, en quelque sorte, par sa définition, il semble que, définir une notion de plusieurs manières non équivalentes, c'est, logiquement, considérer plusieurs notions. Pratiquement, ces notions peuvent coïncider, c'est-à-dire qu'on en peut faire, dans les raisonnements et démonstrations, le même usage. Cela n'empêche pas que leurs éléments logiques soient différents, et c'est, justement, de là, que vient leur différence de simplicité. Nous avons vu, au début de cette étude, que, dans un cas pareil, le Logisticien préfère la définition qui rend la notion la plus simple. L'examen plus détaillé des raisons de l'une de ces « préférences », jettera pour nous plus de lumière sur la nature de la simplicité des notions mathématiques. Il extiste, chez Couturat, à propos des rapports de la notion de nombre à celle de grandeur, une critique des idées de Burali-Forti « qui définit les multiples d'une même grandeur comme les sommes obtenues en ajoutant successivement cette grandeur à elle-même... puis définit les nombres entiers comme les opérations par lesquelles on obtient les multiples d'une grandeur donnée en partant de cette grandeur » (11). Couturat rejette cette définition « bien qu'elle soit logiquement correcte », parce qu'elle lui paraît « détournée, et inutilement compliquée. En effet, elle fait dériver l'idée de nombre de l'idée de grandeur alors qu'on peut obtenir une définition nominale du

---

(10) **B. Russell.** « Introduction à la philosophie mathématique », p. 14.

(11) **L. Couturat.** Ouvrage cité, pp. 109-110.

nombre indépendamment de l'idée de grandeur. En outre, elle exige qu'on démontre que l'ensemble ainsi défini est le même pour toutes les suites de grandeurs multiples (de même espèce ou d'espèce différente), sans quoi on aurait autant de systèmes de nombres qu'il y a de grandeurs différentes, et non l'ensemble unique des nombres » (12).

Nous voyons ici que la notion de nombre définie indépendamment de celle de grandeur, est plus simple que la notion de nombre définie à partir d'elle, d'abord, par ce seul fait qu'elle en est indépendante. Dans l'idée de « nombre » conçue à la manière de Burali-Forti, il entre une notion présupposée — donc « logiquement antérieure », — qui est absente de l'idée de nombre telle que Couturat l'entend. Mais cela n'est pas suffisant. Car il se pourrait que le « nombre » de Burali-Forti qui présuppose la grandeur, ne présuppose pas une autre notion, qui, elle, serait logiquement antérieure au « nombre » tel que Couturat (et Russell), l'entendent, à savoir, la notion de similitude des classes. On pourrait alors dire, soit que la notion de similitude est antérieure, logiquement, à celle de nombre et partant plus simple qu'elle, soit que la notion de grandeur est logiquement antérieure à celle de nombre et partant plus simple qu'elle, — suivant la conception que l'on voudra se faire du nombre, — mais non que la notion de nombre définie à partir de la similitude entre les classes est plus simple que la notion de nombre définie à partir de l'idée de grandeur multiple d'une autre.

En réalité, le fait d'asseoir la notion de nombre sur celle de grandeur ne dispense pas du tout d'y faire entrer l'idée de similitude de classes, fût-ce après coup. Démontrer que l'ensemble des nombres définis comme opérations par lesquelles on obtient les multiples d'une grandeur donnée en partant de cette grandeur, « est le même pour toutes les suites de grandeurs multiples, de même espèce ou d'espèce différente », n'est pas autre chose que démontrer que le nombre est ce que toutes les classes semblables ont en commun. Et c'est parce que cela est nécessaire pour que la définition de Burali-Forti prenne tout son sens, que nous sommes amenés à répéter que, pour les Logisticiens, une « notion logiquement antérieure à telle autre » est synonyme de « notion plus simple que cette autre », alors qu'une notion « logiquement

(12) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 110.

postérieure », est, par cela même « plus compliquée », qu'une autre. Les « raisons de rapidité et de simplicité » (13), en effet, qui font préférer à Couturat la définition du nombre indépendante de la grandeur, résident en ce que la notion de nombre définie à partir de celle de grandeur, présuppose tout ce que présuppose l'autre et quelque chose de plus — à savoir la notion de grandeur elle-même.

C'est la même idée que nous trouvons exprimée, chez le même auteur, dans la discussion de l'idée d'« ordre » et de « nombre ordinal », comparé au « nombre cardinal ». « Comme l'idée de nombre, dit Couturat, l'idée d'ordre a pour matière des classes ou ensembles... seulement, tandis qu'une classe, dès qu'elle est donnée et déterminée, a un nombre, elle n'a un ordre que moyennant certaines relations établies entre ses éléments. L'idée d'ordre est donc moins simple, moins primitive que l'idée du nombre » (14), c'est-à-dire : elle contient tous les éléments logiques de la notion de nombre, elle présuppose nécessairement tout ce que cette notion présuppose et quelque chose de plus.

Pour les raisons ci-dessus, et « bien qu'on puisse tirer tout l'arithmétique des nombres ordinaux finis sans évoquer le nombre cardinal » (15) comme l'ont montré plusieurs mathématiciens (16), le nombre ordinal est « moins simple », que le nombre cardinal, parce que ce dernier lui est logiquement antérieur. Couturat avait défini en effet le nombre cardinal comme « la classe des classes équivalentes » (17), en donnant au terme « équivalente » le sens même que B. Russell attribue au terme « semblables » (18). Le nombre ordinal est, pour lui, « la classe de toutes les classes semblables entre elles » (19), la similitude, étant pour les classes ordonnées la relation analogue à l'équivalence des classes » (20). En d'autres mots, pour qu'il y ait similitude — donc nom-

---

(13) **L. Couturat.** Ouvrage cité, pp. 115-16.
(14) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 68.
(15) **L. Couturat.** Idem, p. 79.
(16) Entre autres dont les travaux ont fortement contribué à la fondation de la Philosophie Logistique.
(17) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 50.
(18) Voir **B. Russell.** « Introduction à la philosophie mathématique », pp. 29 et 31.
(19) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 77.
(20) **L. Couturat.** « Principes des Mathématiques », p. 76.

bre « ordinal », — il faut que les classes soient données, déterminées et ordonnées (elles ne peuvent d'ailleurs être « ordonnées » si elles ne sont d'abord données et déterminées), alors qu'il suffit qu'elles soient données et déterminées pour qu'elles soient, moyennant une certaine relation (de un à un) entre leurs termes, équivalentes, et aient, par là, le même nombre cardinal. C'est parce que la similitude des classes est une notion moins simple que celle d'équivalence des classes, que le nombre ordinal, qui en dérive, est moins simple que le nombre cardinal. Les raisons de cette moins grande simplicité sont, d'ailleurs, exposées on ne peut plus nettement, par Couturat, un peu plus loin : la notion de nombre cardinal, « n'implique, en effet, qu'une seule relation biuniforme entre deux classes, tandis que la notion de nombre ordinal implique en outre une relation génératrice d'ordre dans chacune de ces classes. En d'autres termes, la relation de similitude — (toujours dans un sens tout différent de celui où nous l'avons, à la suite de Russell, employé plus haut), — est plus compréhensive que la notion d'équivalence, elle implique la relation d'équivalence et quelque chose de plus. » (21)

Si on veut quitter le domaine de l'arithmétique pure pour passer à celui de la géométrie, on est amené à faire des remarques analogues à celles que nous venons de faire ici, et cela n'a pas de quoi nous étonner, du moment que la géométrie, aussi bien que l'arithmétique et l'algèbre, est fondée, selon les philosophes de l'école en question, uniquement (en droit), sur des principes de logique pure, et que ses méthodes sont en tout point les mêmes.

Tout d'abord, le logisticien nous met en garde contre la trompeuse apparence de simplicité de certaines notions de géométrie, notions, en réalité très délicates à définir, mais dont le vrai sens logique nous échappe justement parce que nous ne savons pas nous libérer de l'intuition, et que ces notions — ou plutôt certaines images qu'évoquent leurs noms, — nous paraissent très familières. Telles sont les notions d'espace, de surface et de ligne « qu'on ne peut définir avec rigueur qu'au moyen du calcul intégral » (22). Couturat insiste sur cette idée de la non-simplicité de ces notions. « Il

(21) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 70.
(22) **L. Couturat.** Idem, p. 126.

ne faudrait pas croire, écrit-il, que si la Géométrie ne peut, dès le début, définir ces trois notions, c'est parce que celles-ci sont des notions premières, fondamentales et simples. Tout au contraire c'est parce qu'elles sont très compliquées » (23).

La même conception de la simplicité des notions dont toute l'essence logique réside dans la définition qu'on en donne, est à noter dans ce qui est dit à propos des notions singulières et précises, de point, de droite et de plan, dans l'analyse desquelles il faut aller chercher les vraies notions premières et indéfinissables de la science géométrique. « Le point est l'élément indéfinissable de tous les systèmes de géométrie » (24). C'est une notion véritablement « simple » dans le sens que nous avons vu jusqu'à maintenant, puisqu'elle ne peut se fonder sur aucune autre. Il n'en est pas tout à fait de même de la droite (« projective », c'est-à-dire « infinie ») si on la définit comme on a coutume de le faire, — à savoir, en disant qu'elle est déterminée par deux de ses points — car, alors, « cette propriété qui lui sert souvent de définition peut se déduire de postulats plus simples » (25).

Présentée sous cette forme, la notion n'en est pas irréductible à quoi que ce soit. (Présentée au moyen d'une autre propriété caractéristique, — comme par exemple, satisfaisant aux postulats qui la concernent parmi les douze que cite Couturat pour fonder la géométrie projective, — elle peut d'ailleurs être regardée, comme déduite de sa définition courante, prise comme fondamentale, semble-t-il, et primitive) (26). Dans tout ceci, ce qui nous intéresse surtout,

---

(23) **L. Couturat.** Idem, p. 126

(24) **L. Couturat.** Idem, p. 126.

(25) **L. Couturat.** « Principes des Mathématiques », p. 157, cite parmi les douze postulats de géométrie projective :

Postulat IX : « a et b étant des points distincts et c un point de la droite ab distincte de a, b est un point de la droite ac ».

Postulat X : « Dans la même hypothèse la droite ac est contenue dans la droite ab. D'où il suit que ces deux droites sont identiques. On peut démontrer alors, que, si c et d sont deux points distincts de la droite ab, celle-ci coïncide avec la droite cd autrement dit qu'une droite est déterminée par deux quelconques de ses points. »

(26) **L. Couturat.** Ouvragé cité, p. 157. « L'unique notion indéfinissable de la théorie que nous examinons est celle de droite projective. C'est un ensemble de points déterminé par deux points. »

c'est cette idée, qui revient constamment, selon laquelle la notion « simple » c'est la notion fondamentale, antérieure, logiquement, aux autres ; celle qui fait partie de la compréhension des autres sans que d'autres fassent partie de sa propre compréhension.

Si c'est une notion fondée sur un « postulat » (comme, plus haut, celle de ligne droite), qui lui-même dérive logiquement d'autres postulats, (et n'est donc pas en réalité « indépendant » dans le sens où nous avons vu que les axiomes pouvaient l'être), alors, elle est « moins simple » que la notion définie seulement à l'aide de ces autres postulats. (Et une notion qui dérive d'une autre est toujours, en fait, fondée sur quelque axiome ou ensemble d'axiomes concernant cette autre, puisque, en fin de compte, toutes les mathématiques dérivent, de proche en proche, d'axiomes de logique pure auxquels de nouveaux axiomes, sans cesse, viennent s'ajouter). C'est bien là ce que Couturat dit expressément quand il parle de l'extrême complexité des notions les plus intuitives, — les plus simples en apparence, — de la géométrie. C'est parce qu'un grand nombre de postulats sont nécessaires pour fonder une vérité aussi élémentaires que celle-ci : « Deux points déterminent une droite », que cette vérité n'est pas simple. C'est parce qu'« on ne se doute pas du nombre de théorèmes inconsciemment invoqués par Euclide et ses imitateurs dans la démonstration des théorèmes les « plus simples » (27), que ces théorèmes démontrés sont, logiquement, en réalité très compliqués. On ne les appelle couramment « simples » que pour faire allusion à la « facilité » avec laquelle leur évidence apparaît, en raison de l'appel qu'elle fait à l'intuition. Mais il ne s'agit là à aucun titre de simplicité mathématique.

C'est encore dans ce sens que nous croyons pouvoir interpréter l'idée de simplicité des notions mathématiques telle que Couturat, dans son chapitre sur la Géométrie métrique, l'évoque quand il déclare, par exemple, que « la notion de vecteur est plus complexe que celle de distance, car, l'égalité des vecteurs implique, outre l'égalité des distances, l'identité de la direction et du sens » (28), c'est-à-dire, en d'autres termes, implique tout ce qu'implique la notion de distance

(27) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 181.
(28) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 183.

et deux éléments logiques, ou groupes d'éléments logiques (deux notions) de plus.

C'est aussi en ce sens qu'un « espace » est d'autant plus simple qu'il a moins de dimensions, c'est-à-dire qu'il est obtenu au moyen de moins de « mouvements » à partir de l'élément indéfinissable et simple par excellence, le point — ou plutôt, de moins de relations s'ajoutant à la relation fondamentale entre les points qui constitue l'espace à une dimension — « car ce qui constitue proprement et essentiellement le continu à plusieurs dimensions, ce n'est pas un ensemble de points, mais un ensemble de relations » (29), ces relations en sont les vrais « éléments logiques », les opérations qui consistent à les concevoir sont celles-là même par lesquelles l'espace — l'espace abstrait, le vrai espace mathématique — est construit. Le texte est explicite là-dessus : « Un ensemble à une dimension, — ou « espace » à une dimension, ce qui revient au même, — est une suite simple, dont les éléments sont des individus absolus, des points. Un ensemble à deux dimensions est une suite double, c'est-à-dire, dont les éléments sont à leur tour des suites simples, etc. Ou plutôt, puisque toute suite consiste, au fond, en une relation asymétrique transitive qui en ordonne les éléments, un ensemble à une dimension est une relation de ce type dont les termes sont des individus absolus (ne sont pas des relatios). Un ensemble à deux dimensions, est une relation dont les termes sont eux-mêmes des relations. Un ensemble à trois dimensions est une relation dont les termes sont des relations de relations. L'ensemble sera continu si chacune des suites ou des relations qui le composent, est continue, etc. » (30).

Il semble donc que, dès maintenant, nous puissions, à l'aide de tous ces exemples, pris dans les textes — et que rien n'empêcherait de multiplier, — nous arrêter à une idée de la simplicité mathématique des notions chez les Logisticiens. Nous voyons en effet être constamment appelée, par eux, « plus simple » qu'une autre, une notion logiquement antérieure à celle-ci. Qu'est-à-dire qu'une notion « logiquement antérieure » ? C'est une notion telle que, soit une partie seulement des notions que présupposent l'autre — (la notion « moins » simple), — est présupposée par elle et suffit à

(29) **L. Couturat.** Idem, pp. 133-134.

(30) **L. Couturat.** Idem, p. 134. — **B. Russell.** « Principles of Mathematics », § 354.

la constituer ; soit, une partie seulement des postulats sur lesquels repose l'autre, suffit à l'asseoir entièrement ; soit, une partie seulement des relations dont l'accumulation constitue l'autre notion, suffit à la constituer — (c'est là le cas des notions de moins en moins simples d'ensembles à une, deux, trois... n dimensions, que nous venons de rappeler).

Un postulat — qui souvent sert seul à définir une notion (comme celle de droite par exemple) — et qui peut se déduire d'autres postulats, est « plus simple » qu'un autre, quand cet autre découle de « tous » les postulats desquels il découle, et d'au moins un de plus. Une définition est plus simple qu'une autre, alors que cette autre fait appel à toutes les notions auxquelles elle fait appel, et à au moins une de plus ; qu'elle repose sur tous les postulats sur lesquels elle repose, et sur au moins un de plus. Or, on peut dire en dernière analyse, que toutes les notions mathématiques sont ce que les font leur définition, — c'est pour cela qu'elles sont, en fait, logiquement différentes (et plus ou moins simples), suivant la définition que l'on en donne.

Dans tous les cas cités, les notions sont considérées comme, pour ainsi dire, « composées », de par leur définition, d'autres notions — qu'elles présupposent, comme l'idée de nombre cardinal présuppose celle de similitude des classes (31), — soit de postulats (quand un postulat, qui en implique d'autres, leur sert de définition), soit de relations (comme dans le cas précité des ensembles à plusieurs dimensions). Dans chaque cas, semble-t-il, les notions présupposées, les postulats impliqués, les relations posées, forment ce que nous pourrions appeler, pour maintenir une terminologie que nous avons déjà adoptée dans ce que nous avons dit de la simplicité des théories et des démonstrations mathématiques, les « éléments logiques » des notions. Une notion sera plus simple qu'une autre, quand cette autre sera composée de tous ses éléments logiques, et d'au moins un de plus. Et nous remarquerons que chaque notion inclue dans la compréhension d'une autre se résout, en fin de compte, en une ou plusieurs relations. — (la « similitude » entre deux classes, telle que l'entend Russell, c'est la relation de un à un entre les termes de ces classes) ; — que chaque postulat pose synthéti-

(31) Il s'agit, bien entendu, ici, de la « similitude des classes » telle que l'entend **B. Russell.** (Voir plus haut la citation). **Couturat** dirait « l'équivalence des classes. »

quement l'existence d'une ou plusieurs relations, et que, donc, en poussant suffisamment l'analyse, on conçoit les derniers « éléments logiques » des notions mathématiques, comme étant les relations qu'elles supposent entre des « individus absolus », pour reprendre l'expression de Couturat (termes d'une classe, points invoqués en géométrie, etc.), dont peu nous importe d'ailleurs la signification en eux-mêmes.

Mais un fait doit retenir notre attention : à savoir que, dans toutes les comparaisons citées, de notions mathématiques du point de vue de leur plus ou moins grande simplicité, il s'agissait toujours de deux notions logiquement inclues l'une dans l'autre, dont l'une, c'est-à-dire, est logiquement antérieure à l'autre ; la moins simple comprend des « éléments logiques » étrangers à ceux de la plus simple, mais, elle comprend toujours, avec eux, « tous » les éléments logiques de la plus simple. Devons-nous, — pouvons-nous, — conclure de là que seules, dans la pensée des Logisticiens, sont comparables quant à leur simplicité, les notions dérivant ainsi, en quelque sorte, l'une de l'autre, par addition d'« éléments logiques » à un fond commun, constitué par les éléments logiques de la plus simple ? Il ne le semble pas. Que ces notions, dont l'une apparaît, à l'analyse, comme nettement, logiquement antérieure à l'autre, soient plus faciles à comparer, quant à leur simplicité, c'est très probable. Mais de là à affirmer que l'on ne peut rien dire du tout de la simplicité relative de deux notions quelconques, il semble qu'il y ait un pas, que nous n'avons pas le droit de franchir sans nous appuyer sur une solide justification.

Or, outre que l'idée d'une telle justification ne nous serait nullement fournie, en absence de textes, par la plausibilité d'une interprétation de la pensée logistique d'après les tendances logiques que nous avons trouvées constamment en elle depuis le début de cette étude, il nous apparaîtra, si nous continuons notre enquête, qu'elle doit être exclue par les textes eux-mêmes.

Nous avons vu que les logisticiens appellent « simple », absolument, toute notion tout à fait indéfinissable et primitive, qui n'est point composée de relations (sans quoi, il serait possible de la définir par les caractères logiques de ces relations). Telle est, par exemple, la notion géométrique du « point ». Il semble évident que toute notion comportant une définition, — donc, pas absolument primitive, — doit être

considérée comme étant « moins simple » qu'une telle notion, et cela, même si, de cette notion primitive, et par conséquent parfaitement simple, il n'est aucunement question dans sa définition ; même si cette notion (la toute simple), n'est pas comprise en elle, impliquée par elle, « présupposée » par elle, aussi loin que l'on puisse pousser l'analyse ; en un mot, même si elle ne lui est pas « logiquement antérieure ». Et il s'agit bien, ici, de la comparaison, pour ce qui regarde leur simplicité, de deux notions mathématiques étrangères, extérieures l'une à l'autre. Cette comparaison n'a peut-être pas, en général, d'intérêt au point de vue proprement mathématique, mais enfin, logiquement, elle se soutient, et il s'agit bien d'après tout ce que nous avons vu jusqu'ici sur la nature de la simplicité mathématique, de la plus ou moins grande simplicité « mathématique » en effet, de ces deux notions, ayant entre elles un rapport si différent de celui qu'admettaient les notions dont la comparaison nous a, jusqu'ici servi d'exemple. Si, en effet, on appelle parfaitement simples, comme le font Russell, Couturat, etc., toutes les notions mathématiques absolument primitives du point de vue logique, il est tout naturel qu'on appelle aussi « simples » (moins simples, toutefois), toutes les notions comportant peu d'« éléments logiques », dans le sens où nous avons pris ce mot plus haut. C'est en raison de cela que les affirmations que nous venons de faire nous paraissent évidentes, et que nous croyons pouvoir déclarer que, selon un mathématicien qui entendrait sa science à la manière dont l'entendent ceux de l'école dont nous nous occupons, une notion mathématique est plus simple qu'une autre dès qu'elle comporte moins d'éléments logiques qu'elle, — quels que soient d'ailleurs les éléments logiques de chacune.

Mais on peut trouver, semble-t-il, dans les textes, comme nous le disions plus haut, des exemples qui justifient cette conception.

Il y a d'abord la question de l'espace projectif absolu. Couturat nous dit que « dix-huit postulats — (qu'il énumère, d'ailleurs), — suffisent à fonder la géométrie projective générale à n dimensions » mais que, s'il s'agit de géométrie à trois dimensions « il faut un postulat de plus » (32) (à savoir

(32) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 153.

qu'un plan et une droite ont toujours un point commun). Cela fait donc, en tout, dix-neuf. Mais plus loin le même auteur ajoute qu'« on peut définir progressivement un espace à n dimensions, en ajoutant aux dix-huit, le postulat : n étant un nombre entier plus grand que 0, si P est un hyperplan, du n^e ordre, il existe un point hors de P » (33).

Pour l'espace projectif absolu il existe des points hors de P quel que soit n. Et « comme ce postulat remplace les postulats XIe et XIIIe — deux postulats (peu nous importe leur énoncé), de la liste des dix-huit qui fondent la géométrie projective, — cela fait en tout dix-sept postulats pour définir l'espace projectif absolu, et dix-neuf pour définir l'espace projectif à trois dimensions, de sorte qu'on peut dire qu'au point de vue logique, celui-ci est moins simple que celui-là » (34). On dira que ceci semble en contradiction avec ce que nous avons relevé plus haut, concernant la simplicité des ensembles à plusieurs dimensions, simplicité qui, nous l'avons vu, va, de l'aveu de Couturat, en diminuant à mesure que le nombre de dimensions augmente, c'est-à-dire, à mesure que les relations qui logiquement constituent la notion de chaque ensemble, deviennent plus nombreuses, et que leur réseau, par suite de la multiplication de leurs interdépendances, devient plus enchevêtré. Et peut-être pensera-t-on qu'ici, la simplicité, plus ou moins grande, n'est pas, à proprement parler, celle des espaces eux-mêmes — car les espaces sont des ensembles à plusieurs dimensions comme ceux entrevus plus haut, en somme, — mais seulement aux systèmes d'axiomes sur lesquels s'édifient deux types de géométrie projective : la géométrie projective qui admet un espace à trois dimensions et celle qui admet l'« espace projectif absolu ». A ce compte là, sans doute, cette comparaison des simplicités de chacun, aurait été citée avec plus d'à-propos, alors qu'il s'agissait pour nous d'examiner la simplicité des théories mathématiques, basées sur des systèmes d'axiomes. Elle justifie d'ailleurs pleinement les conclusions que nous avions tirées, alors, en ce qui concerne la nature de cette simplicité.

Mais ne sont-ce bien que les systèmes d'axiomes qui sont mis en parallèle ici ? Couturat parle de postulats qui définissent l'espace projectif absolu, ou l'espace à trois dimensions,

---

(33) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 157.
(34) **L. Couturat.** Idem, p. 157.

Cela semble déjà nous montrer que c'est bien de deux notions d'espace qu'il s'agit. Et, si nous en doutions, le fait qu nous est nettement dit que, logiquement l'espace projectif absolu, est plus simple que l'espace à trois dimensions, écarterait, apparemment, nos hésitations. Ici, nous avons, semble-t-il, en réalité, bien affaire à la « notion » d'espace, — et en ce sens la comparaison trouve sa place à cet endroit — quoique, d'après notre citation précédente, cette notion soit peut-être construite différemment, ou, si l'on veut envisagée différemment, l'espace y étant traité comme « ensemble ordonné ». Si l'on préfère, nous avons affaire, ici, logiquement, à une autre notion d'espace. Et nous voyons que cette notion, ici considérée comme constituée par l'affirmation simultanée d'un certain nombre de postulats dont la totalité la définit, est d'autant plus simple que ces postulats — regardés comme ses « éléments logiques », — sont moins nombreux, quels qu'ils soient d'ailleurs ; que l'espace projectif absolu est déclaré plus simple que l'espace à trois dimensions, non qu'il lui soit à proprement parler, logiquement « antérieur », non qu'il admette comme éléments logiques quelques-uns seulement de ceux qu'admet ce dernier, et aucun autre, mais pour la seule raisin, que le nombre de ses éléments logiques, à lui, est inférieur au nombre des éléments logiques de la notion d'espace qui lui est comparée. En effet, d'après ce que nous avons cité il y a un instant, deux postulats, qui n'entrent pas dans la « définition » de l'espace projectif absolu, entrent, dans celle de l'espace à trois dimensions, et un postulat qui fait partie de la définition de l'espace projectif absolu, ne fait pas partie de celle de l'espace à trois dimensions (35).

Et on peut dire, en un certain sens, que les systèmes d'axiomes, que nous avons examinés précédemment du point de vue de leur plus ou moins grande simplicité, « définissent », eux aussi, « fixent » des notions mathématiques, et que, du moment que logiquement, la notion se confond avec sa définition, il n'y a rien d'étonnant à ce que nous retombions, ici, en cherchant à caractériser la simplicité des notions, dans les conclusions mêmes auxquelles nous avions abouti en parlant de la simplicité des systèmes d'axiomes,

(35) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 157.

confondue, dans les textes, avec celle des théories dont ces systèmes forment la base. Ces « théories » sont, en somme, le développement du sens complet d'une notion : notion de nombre cardinal, de nombre ordinal, de grandeur, etc. Ceci établit, entre les précédentes remarques et celles que nous avions faites plus haut un lien de continuité « par le dedans », si l'on peut dire, en notant l'identité qui, au fond, existe entre leurs objets. Il est naturel que les comparaisons que nous avons relevé dans les textes, au sujet de la simplicité des « espaces », soient aussi bien à leur place dans la présente étude que dans l'étude concernant les « théories mathématiques », car ce sont, ici et là, à la fois les « systèmes d'axiomes » et les « notions » mathématiques, qui sont mis en parallèle.

On est amené à des conclusions analogues en ce qui concerne la simplicité des notions si on relève la comparaison que fait Couturat des définitions projective et descriptive du plan, dont la seconde est déclarée par lui « moins simple » que l'autre. Pour comprendre cette comparaison, il est bon, semble-t-il, de remonter un peu plus avant dans les développements qui amènent ces définitions, sans quoi, le sens même des mots que l'auteur emploie pour les construire ne serait pas clair. Soit donc, d'abord, la définition projective du plan. L'auteur commence par énumérer les dix postulats qui fondent, en géométrie projective, la théorie du point et celle de la droite ; sur quoi, il précise ce qu'il entend par « points collinéaires » : « Trois points sont collinéaires s'ils appartiennent à la même droite » (36). Un onzième postulat est nécessaire pour « sortir de la droite » : « a et b étant des points distincts, il existe au moins un point appartenant à la droite ab » (37). Pour arriver à la notion de plan, il faut encore un postulat : « a, b et c étant trois points non collinéaires, a' un point de bc, autre que b et c, b' un point de ac autre que a et c, les droites aa' et bb' se rencontrent » (38). C'est un postulat d'existence : « il existe un point commun aux droites aa' et bb'. Ce postulat aura pour conséquence que deux droites d'un même plan se rencontreront toujours. Si, de plus, « on désigne par a, b et c, l'ensemble des points

(36) **L. Couturat.** Idem, p. 144.
(37) **L. Couturat.** Idem, p. 145.
(38) **L. Couturat.** Idem, p. 145.

situés sur quelque droite passant par a et un point de bc, on peut démontrer au moyen du postulat précédent, les identités suivantes :

$$abc = acb = bac = bca = cab = cba$$

La figure (ensemble des points) ainsi déterminée, sera, par définition le plan abc (l'ordre de ces trois lettres étant indifférent). Si d, e, f sont trois points non collinéaires d'un plan abc, celui-ci coïncidera avec le plan def. Autrement dit, un plan est déterminé par trois de ses points non collinéaires. Il en résulte immédiatement qu'un plan contient toute droite dont il contient deux points. Ainsi se trouve démontrée la propriété dont on se sert ordinairement pour définir le plan » (39).

Soit maintenant à définir descriptivement le plan. Il faut, logiquement, pour comprendre notre construction, remonter dans les développements de l'auteur, plus haut que la définition elle-même — comme nous venons de le faire pour ce qui est du plan projectif. A noter d'abord la notion de « segment », fondamentale — et indéfinissable —, en géométrie descriptive, de même que celle de point. Elle « équivaut à la relation d'entre. Au lieu de dire « c est un point du segment ab », on peut dire « c est entre a et b » « c ∈ ab » (40). Après avoir employé onze postulats à fonder la géométrie du point et de la droite, on « sort de la droite », ici, par un douzième postulat « r étant une droite quelconque, il existe au moins un point hors de r ». « Pour définir le plan, on a en outre besoin du postulat XIII : « a. b, c étant des points non collinéaires, si d est entre b et c, et c entre a et d, le prolongement de bc rencontre ac », c'est-à-dire qu'il existe un point f tel que f est entre a et c, et c entre b et f.

De ce postulat on déduit que a (bc) ↄ b(ac), d'où, réciproquement, b(ac) ↄ a(bc) et, par conséquent : a(bc) = b(ac). Ainsi la jonction (41) de a et bc, coïncide avec la jonction de b et ac, et par suite, avec la jonction de c et de ab. Cette figure unique s'appellera triangle abc. En outre, si d est un point quelconque du segment bc, et f un point quelconque du segment ac, le segment df est contenu dans le triangle abc. Dans la même hypothèse (c'est-à-dire si

(39) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 145.
(40) **L. Couturat.** Idem, p. 159.
(41) **L. Couturat.** Idem, p. 162.

a, b, c, sont non collinéaires), si p est un point du triangle abc, celui-ci se compose du point p, des trois segments pa, pb, pc, et des trois triangles pab, pbc, pca. Si p et q, sont deux points distincts du triangle abc, le rayon pq rencontre le contour du triangle, le rayon pq' également, de sorte que la droite pq, rencontre le contour du triangle en deux points, situés respectivement sur les deux prolongements du segment pq. Cela posé, on peut définir le plan abc, comme l'ensemble des trois points abc, des trois segments ab, bc, cd, de leurs six prolongements, du triangle abc, des trois figures a'bc (42), b'ca, c'ab. et des trois angles a'b'c, b'c'a et c'a'b » (43). C'est cette définition descriptive du plan, qui est déclarée par Couturat, « beaucoup moins simple et moins unitaire que celle du plan projectif » (44).

On voit que ce jugement vient à l'appui de la thèse que nous esquissions plus haut, à l'occasion de la notion d'espace projectif absolu, et d'espace à trois dimensions. En effet, il ne s'agit pas ici, pour celle des deux notions que le logisticien reconnaît être « plus simple » que l'autre, de lui être logiquement antérieure. Ce sont deux notions qui, pour porter le même nom de « plan » n'en sont pas moins, logiquement et mathématiquement, fort différentes l'une de l'autre, relevant d'ailleurs de deux sortes de géométrie qui, à leur base, admettent des relations fondamentales différentes (45). et qui, par conséquent, ne sauraient réellement s'interpéné-

---

(42) **L. Couturat.** Idem, note de la p. 165 : « La figure a' bc est la projection de bc depuis a, c'est-à-dire la partie du plan comprise entre le segment bc et les rayons ba' et ca'. La figure a' b' c est en effet, la projection de b' c depuis a (ou de a' c depuis b), c'est-à-dire l'angle compris entre les deux rayons c a' et c b'.

(43) **L. Couturat.** Idem, p. 165.

(44) **L. Couturat.** Idem, p. 165.

(45) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 159. « Les notions premières de la géométrie descriptive sont le point et le segment... Elle diffère de la projective en ce qu'elle admet pour base la droite finie, comprise entre deux points, et non la droite infinie. En géométrie projective la droite est une ligne fermée. On ne peut définir l'ordre de ses points qu'au moyen d'une relation entre quatre points (relation de séparation, relation harmonique). Dans la descriptive il y aura entre les points de la droite une relation d'« entre » (à trois éléments).

trer. Nous ne reprendrons pas pour les comparer, chaque notion dans le détail. Ce serait long, fastidieux, et ce travail restera toujours possible à ceux qui voudront s'y livrer, car nous avons cité chacune des définitions, avec un contexte assez détaillé pour que l'on puisse remonter, par l'analyse, du texte même de la définition à ses « éléments logiques », de proche en proche. On trouverait — cela d'ailleurs apparaît, sans qu'on pousse l'analyse bien loin, — que, si l'une des notions (celle de plan projectif), est dite plus simple que l'autre (celle de plan descriptif), ce n'est pas que la seconde soit construite à l'aide de tous les éléments logiques de la première et de quelques autres encore, comme cela arrive, avons-nous vu, dans d'autres cas, mais c'est qu'il y entre seulement un plus grand nombre d'« élément logiques ». Et il ne faudrait pas penser que ces éléments, ce sont les douze postulats qu'il faut dans le premier cas, ou les treize postulats qu'il faut dans le second pour arriver à la notion de plan projectif ou descriptif. Ce sont bien toutes les relations qui entrent dans la construction de chacune de ces deux notions de plan. En effet, dans le second cas, la notion du plan ne découle pas directement du postulat qui permet de l'amorcer, mais nécessite, pour prendre corps, après la démonstration de certaines identités, la mise en jeu de notions nouvelles, (celle du triangle, tel qu'il est défini plus haut, par exemple), elles-mêmes construites à l'aide de notions déjà connues et précédemment définies (celle de « jonction », par exemple). C'est parce que les relatios qui entrent nécessairement dans la constitution de la notion de plan descriptif, sont plus nombreuses que celles qui composent la notion de plan projectif, et quelques-unes plus compliquées — (ce qui revient toujours à dire que les éléments logiques de celle-là sont plus nombreux que ceux de celle-ci) — que cette notion est moins simple que celle de plan projectif. Et le fait qu'ici sont comparées, dans les textes mêmes, deux notions appartenant à deux branches distinctes, quoi qu'il en soit, des mathématiques, n'en rend la comparaison que plus instructive, et la thèse que nous avons soutenue, que plus vraisemblablement conforme aux vues de l'école dont nous examinons la conception du simple.

Nous avons dit, plus haut, que les notions mathématiques étaient ce que les faisaient leurs définitions, et que, changer la définition d'une notion, c'était comme si on parlait, logi-

quement, d'une « autre » notion, qui peut être plus simple ou plus complexe que la première. Ce qui ne veut pas dire qu'elle ne puisse pas se substituer entièrement à elle, pratiquement, dans tout raisonnement mathématique. (« Il est, par exemple, dit Couturat, plus simple de définir le nombre irrationnel, comme limite supérieure d'une classe inférieure, que de le concevoir comme limite commune de deux classes, supérieure et inférieure » (47). Cela n'empêche pas, bien entendu, que dans un cas comme dans l'autre, le nombre irrationnel ait le même rôle en mathématiques).

Si nous examinons une définition, dite « simple », indépendamment de toute comparaison, nous retomberons encore dans des remarques qui justifient ce que nous avons cru pouvoir avancer, jusqu'ici, touchant la simplicité. Nous verrons aussi que, bien que, logiquement, la notion soit ce que la fait sa définition, on peut donner une « définition simple », d'une notion qui ne l'est pas.

Ne sont, nous l'avons vu, parfaitement simples, que les notions tout à fait primitives, et, par suite, impossibles à définir, et si nous considérons une notion, « très simple », nous voyons qu'elle mérite ce nom à cause du petit nombre d'« éléments logiques » qui entrent dans sa construction. Mais une notion qui, en soi, est complexe, peut-être « définie simplement », c'est-à-dire que, certains de ses nombreux « éléments logiques », ayant déjà été préalablement organisés, édifiés en notions, connues (complexes), on peut simplement, c'est-à-dire au moyen de très peu d'opérations logiques, passer de ces notions à celle que l'on considère. Ce sont ces opérations qui sont, ici, les véritables éléments logiques, non de la notion elle-même, mais de l'acte qui consiste, à « passer à elle », d'une base donnée ; non de la définition prise avec tout ce qu'elle rassemble, mais de la définition à partir de la base donnée. C'est le mot « définition » qui est envisagé ici sous un jour différent de celui sous lequel nous le regardions plus haut, mais la conception, de la simplicité, reste la même, nous allons le voir dans un instant. Considérons en effet la « définition très simple du demi-plan descriptif » (47), que Couturat nous donne. « Soit r, dit-il, une droite, et a un point extérieur à cette droite. La figure a'r,

(46) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 87.
(47) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 165.

sera, dans le plan déterminé par a et r, le demi-plan qui ne contient pas a. L'autre demi-plan, qui contient a, sera r'ra projection de ra depuis r) » (49). Comme on le voit, il entre dans cette définition, l'idée du plan (descriptif) déterminé par la droite r et le point a, notion pas simple du tout, comme vient de le montrer Couturat lui-même. La notion de demi-plan descriptif, ne peut donc, en soi, être que complexe, puisqu'elle suppose déjà celle de plan. Mais la définition est dite « simple ». C'est que, à l'idée complexe de ce plan déterminé par a et r, elle n'ajoute rien autre que la relation qui caractérise, par rapport à r et a, les points du plan situés dans une région du plan que cette relation suffit à déterminer : la région qui ne contient pas le point a. La définition est ici considérée comme « simple », non parce qu'elle fait entrer, en tout, peu d'éléments logiques dans la notion qu'elle crée, mais parce que, pour former cette notion nouvelle, elle n'ajoute aux notions, déjà définies qui y entrent, que très peu d'éléments logiques. En d'autres termes, la « définition » est considérée, ici, non comme la construction complète de la notion, depuis l'indéfinissable « simple » jusqu'auquel l'analyse remonte, mais comme l'achèvement d'une construction déjà faite jusqu'à un certain point, bien précis. Elle est « simple », parce que cette construction est achevée directement, au moyen du plus petit nombre possible d'éléments logiques, donc, au prix de la plus petite dépense possible de pensée (logiquement parlant, cela s'entend, ce qui ne veut pas dire forcément, qu'elle soit la plus petite, psychologiquement). L'idée de la simplicité que nous trouvons ici, est donc, on le voit, toujours la même.

Nous avons vu (49), que ce qui, en dernière analyse, semble constituer les « éléments logiques » des notions mathématiques, ce sont des relations logiques. Mais, dira-t-on, les relations, peuvent, elles aussi, être plus ou moins simples. Il resterait donc à examiner ce qui fait leur simplicité. Les textes, là-dessus, semblent nous fournir de quoi soutenir, en ce qui les concerne, une thèse toute pareille à celle que nous venons d'exposer : à savoir qu'une relation quelconque est d'autant plus simple qu'elle présuppose moins de relations simples — à définir à leur tour. Donnons un exemple. Dans

(48) **L. Couturat.** Idem, p. 165.
(49) Voir plus haut.

l'ouvrage que nous avons tant de fois cité, B. Russell écrit, entre autres « La priorité logique — l'antériorité, pourrait-on dire — n'est pas une relation simple. L'implication est, elle, une relation simple ; mais la priorité logique de A par rapport à B, nécessite, non seulement que « B implique A », mais aussi que « A n'implique pas B » (50). Qu'est-ce à dire, sinon que la relation de priorité logique n'est pas simple, parce qu'elle est comme l'expression de deux autres relations, nécessaires toutes les deux à poser, pour qu'elle soit posée, relations sans l'une desquelles elle n'existe pas, et que nous pourrions appeler ses « éléments logiques », à elle ? — qui résultent des opérations logiques primitives qu'elle présuppose et résume, en quelques sorte.

Mais qu'est-ce qui fait qu'une relation peut être considérée comme primitive ? C'est, vraisemblablement, une relation qui n'en présuppose aucune autre. Russell nous dit que « l'implication est une relation simple ». Les Logisticiens en font la relation fondamentale entre deux propositions (51), définissant même la proposition comme « ce qui s'implique soi-même ». Et nous savons que la Logique Symbolique, dont c'est là l'une des affirmations, constitue un effort pour remonter à ce qu'il y a d'élémentaire — et de simple, selon ce qui semble, d'après tout ce que nous avons déjà vu des idées des Logisticiens, — dans la logique, et par conséquent dans les mathématiques qui en procèdent directement, et uniquement, ne l'oublions pas.

Une relation lie au moins deux termes, considérés, séparément, comme des « individus absolus ». (Même alors qu'on parle, parfois, de relation d'un terme à lui-même — quand on dit, par exemple qu'un proposition est ce qui « s'implique soi-même », — on considère « deux » termes, car le « même » terme, pris deux fois, est malgré tout « deux »). Mais il peut arriver qu'une relation ne puisse se concevoir qu'entre trois, quatre... n termes : la relation qui sert à définir l'ordre des points d'une ligne fermée existe entre quatre points, celle qui sert à définir l'*ordre* des points d'une ligne ouverte existe entre trois points seulement, etc. Le nom-

(50) **B. Russell.** « Principles of Mathematics », p. 138.

(51) **L. Couturat.** « Principes des Mathématiques ». (Voir le chap. sur le calcul des propositions.) — **B. Russell**, ouvrage cité. **Idem.**

bre minimum de termes qui, nécessairement, doivent se trouver unis par une certaine relation, a-t-il à voir avec la simplicité de celle-ci ? Il semble que oui si l'on en croit Couturat alors qu'il déclare que la droite projective, ensemble de points déterminés par deux points, pourrait être définie comme une relation mais que cette relation serait « très complexe, ayant deux antécédents et un nombre infini de conséquents » (52).

Il va sans dire qu'une relation entre deux termes seulement peut être complexe. Nous l'avons vu pour ce qui est de l'antériorité (ou priorité) logique, qui suppose entre ses deux termes deux relations « simples » d'implication et de non-implication. Il ne suffit donc pas du tout que les termes d'une relation soient peu nombreux pour que celle-ci soit « simple ». Mais cela est, apparemment, nécessaire. D'après ce que nous venons de citer, la simplicité plus ou moins grande d'une relation entre plusieurs termes, tient à ce que le nombre de ces termes est plus ou moins petit, puisque, une relation comprenant un nombre extrêmement grand de termes est dite à cause de cela « extrêmement complexe ». Il ne s'en suit pas, naturellement, que le nombre seul des termes de la relation, donne comme une « mesure » exacte de sa simplicité, que celle-ci ne dépende que de lui, et qu'il n'y ait pas une interprétation à chercher, du texte dernièrement cité, qui le fasse cadrer avec tout ce que nous avons vu précédemment.

Et d'abord, il va sans dire que les « termes » dont il s'agit ici, ne sont pas tous ceux qui composent le champ, très vaste, le plus souvent indéfini, de la relation, mais uniquement quelques-uns, — peu importe lesquels, — ceux qu'il est absolument nécessaire de prendre pour que la relation existe, et qui sont suffisants pour qu'elle existe (c'est-à-dire qu'elle se conçoive logiquement). Les Logisticiens font très souvent appel à des exemples de relations de parenté pour éclairer leur pensée. Faisons comme eux, et considérons la relation de père à fils. On ne saurait dire qu'elle a un nombre extrêmement grand de termes parce qu'elle a pour champ tous les pères et tous les fils. Cela paraît évident, car il suffit, en même temps qu'il faut pour la concevoir, deux termes seulement : un « père » — n'importe lequel — et son fils

(52) **L. Couturat.** « Principes des Mathématiques », p. 157.

(n'importe lequel de ses fils, s'il en a plusieurs). De même, une relation comme celle, si communément rencontrée d'implication, ne nécessite que deux termes seulement : ce qui implique, et ce qui est impliqué — et, comme, en dehors de cela, elle ne présuppose aucune autre relation, elle est dite « simple ».

Ceci dit, notre remarque au sujet de l'importance du nombre des termes d'une relation dans l'appréciation de sa simplicité, modifie-t-elle la conception que nous nous étions faite de la simplicité des relations comme dépendant du petit nombre de leurs « éléments logiques », c'est-à-dire du petit nombre de relations simples qu'elles supposent ? Il ne semble pas ; car on peut dire que si, justement, les relations qui ne peuvent se concevoir qu'entre plusieurs termes ne sont pas simples, c'est qu'elles sont susceptibles, en droit sinon toujours pratiquement, de se décomposer, en quelque sorte, en un plus ou moins grand nombre de relations, liant, chacune, uniquement « deux » termes, et, à leur tour, chacune plus ou moins simple, c'est-à-dire, présupposant plus ou moins de relations de deux termes qui, elles, n'en présupposent aucune. Pour ce qui est, par exemple, de la relation d'ordre entre les points d'une suite ouverte (relation entre trois termes), Couturat nous dit nettement qu'elle peut se ramener, par l'analyse, à un ensemble de deux relations entre deux termes (53). Il fait une remarque analogue pour ce qui est de la relation d'ordre entre les points d'une suite fermée, qui, elle, est à quatre termes. Et il semble que l'on puisse dire, sans craindre de déformer la pensée de Couturat et des Logisticiens en général, que, du point de vue auquel ils se sont placés dans la question de la simplicité des relations, une relation comprenant un nombre infini de termes est « très complexe », parce que, en réalité, elle est l'expression d'un nombre infini de relations simultanées (elles-mêmes plus ou moins simples), entre deux termes, c'est-à-dire, en dernière analyse, d'un nombre infini de relations simples — ses « éléments logiques ». Et ceci nous ramène, en somme, à ce que nous disions plus haut. En sorte que, pour résumer ce que l'étude de la simplicité des notions mathématiques nous a appris, on peut dire que

(53) **L. Couturat.** Même ouvrage, p. 73.

1° Une notion parfaitement « simple » est une notion, logiquement, absolument primitive, c'est-à-dire qui n'en présuppose aucune autre et qui ne saurait par conséquent se définir — car au moyen de quoi la définirait-on ? C'est dans ce sens que Russell parle des « constituants simples » d'une unité, comme pouvant être définis seulement comme constituants qui eux-mêmes n'ont pas de constituants (54), et qu'il dit que, par exemple « chaque grandeur est un concept simple et indéfinissable » (56). C'est dans ce sens que Couturat parle du point, « élément simple de tout système de géométrie » (56).

2° D'une notion d'une si complète simplicité on ne peut rien dire. C'est un « individu absolu », qui à cause de sa simplicité même, échappe, logiquement, à toute emprise de la pensée. Pratiquement, de telles notions sont, semble-t-il, grossièrement représentées à l'esprit par des images (image d'un « point » par exemple). Mais il est inutile de dire que, du point de vue de la Logistique, si rigoureuse à bannir des mathématiques toute espèce d'intuition sensible, et, en général, du point de vue des mathématiciens, ces représentations n'ont aucune valeur. Elles n'aident en rien à « concevoir » la notion en question, du moment qu'elles s'adressent à l'imagination sensible et non à la « pensée » proprement mathémathématique. Les notions dont nous venons de parler n'intéressent pas le mathématicien, en elles-mêmes. Ce qui fait l'objet de son étude, ce sont, à proprement parler, les relations que de tels « individus absolus », peuvent admettre entre eux. Certaines de ces relations, particulièrement intéressantes, sur lesquelles il peut s'en greffer d'autres, et d'autres encore, sont, comme on pourrait dire, concentrées, ramassées dans des notions, qui, elles, sont définissables, (notions de nombre, d'ordre, de droite, de plan, etc., d'espace), et qui, quelle que puisse être leur « simplicité » sont toujours moins simples que celles qui, logiquement, ne sauraient être définies. Une relation d'ailleurs, quelle que soit sa simplicité, présuppose toujours les « individus absolus » entre lesquels, en dernière analyse, elle constitue un lien. On pourrait dire, considérant cela, qu'elle est toujours « moins simple » qu'elle.

(54) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 145.
(55) **B. Russell.** Idem, p. 164.
(56) **L. Couturat.** Ouvrage cité, p. 126.

Mais il semble que l'on ne doive pas même les comparer tant ce sont, par nature, deux choses différentes que la relation d'une part, les termes de la relation, de l'autre. Quoi qu'il en soit, toute notion définissable, et analysable, suppose un certain nombre de relations, se résolvant à leur tour, en d'autres relations, le plus souvent, jusqu'à ce que, de proche en proche, on en arrive à considérer les relations « simples » — unissant deux termes et ne présupposant aucune autre relation — que l'on peut appeler « éléments logiques » de la notion. On trouve qu'une notion est comme « composée » d'éléments logiques d'autant plus nombreux, qu'elle englobe dans sa définition un plus grand nombre de notions, elle-mêmes comprenant, chacune, en fin de compte, davantage de ces dits éléments. — nécessitant davantage d'opérations logiques simples (c'est-à-dire qui n'en présupposent pas d'autres), peut-on dire, en se souvenant bien qu'il s'agit là d'opérations logiques en droit, pas forcément « en fait », d'opérations que, psychologiquement, on ne saisit en général pas, mais qui seules peuvent expliquer la genèse des notions.

3° Présupposer une notion c'est contenir tous les éléments logiques qui la constituent, et d'autres encore, par surcroît.

De deux notions dont l'une présuppose l'autre, c'est la présupposée par l'autre qui est la plus simple. C'est ce que Russell exprime en disant que « le plus simple est toujours impliqué dans le plus complexe, et, pour ce, on ne peut rien dire de vrai concernant le plus complexe, à moins qu'on ne connaisse la vérité concernant le plus simple » (57). La notion ne contient qu'une partie des éléments logiques de cette autre, sans en contenir d'étrangers.

4° De deux notions telles que l'une ne présuppose pas l'autre — telles qu'elles sont constituées, chacune, d'éléments logiques, en nombre inégal, mais, au moins en partie sinon en totalité, différents, on peut dire que la plus simple est celle qui a le moins d'éléments logiques.

5° D'une façon générale, la simplicité d'une notion mathématique, tient, semble-t-il, pour les Logisticiens, et pour tous ceux qui envisagent les mathématiques sous le même angle qu'eux, au petit nombre d'éléments logiques qui la constituent, c'est-à-dire, en somme, au petit nombre d'opérations

(57) **B. Russell.** Ouvrage cité, p. 147.

logiques qu'il faudrait faire, de relations simples qu'il faudrait concevoir, si, à partir des relations simples qu'elle présuppose, on voulait la reconstituer, la recomposer telle qu'elle est, sans rien omettre, c'est-à-dire, sans rien laisser échapper de sa signification logique, et, par suite, mathématique.

On pourrait seulement se demander pourquoi, dans tout ce qui précède, nous n'avons pas envisagé d'être mathématiques, parmi ceux que l'arithmétique ou la géométrie élémentaire nous offrent de plus familiers : notions de fractions plus ou moins simples, par exemple, de triangle, de polygone, de cercle, etc. Cela nous a semblé inutile, pour la raison que ces « êtres », sont en réalité des notions présupposant telles ou telles de celles dont nous nous sommes occupés (notions de nombre, ou de plan, de ligne fermée, etc.), et comprenant par conséquent, outre leurs éléments, d'autres éléments logiques. D'après ce que nous avons pu voir, ce sont des notions, plus complexes du point de vue des Logisticiens que celles que, en suivant les textes qui nous ont paru les plus nets et les plus significatifs, nous avons envisagées. D'autre part, les auteurs ne s'occupent pas d'elles dans leur effort de critique mathématique, préoccupés qu'ils sont par la recherche de ce qu'il y a dans les mathématiques de plus logiquement fondamental et primitif, et qui n'est pas à chercher parmi les « êtres » de l'arithmétique ou de la géométrie qui nous sont le plus familiers, vu que, comme Russell le remarque bien, le familier, en cette circonstance n'est ni ce qu'il y a de plus complexe, ni non plus ce qu'il y a de plus primitif et de plus simple (58). Nous avons pensé que nous ne pourrions aborder les « êtres mathématiques » en question qu'à la condition de nous écarter des textes et de parler d'eux en nous contentant d'être aussi fidèles que possible à l'« esprit » des Logisticiens. Et, puisque la question de la notion « simple » en mathématiques, est une question, qui, fût-ce à propos d'autres notions, peut-être un peu moins familière apparemment, est envisagée, discutée, traitée, en somme, dans d'assez nombreux textes de critique logistique, nous avons préféré ne pas nous écarter de ces textes. Puis, comme nous le disions, des notions, en apparence toute simples telles que celles de triangle ou de cercle, sont, certaine-

(58) **B. Russell**, « Introduction à la philosophie mathématique »,

ment, pour les Logisticiens, moins « simples », logiquement, donc, mathématiquement, que celles que nous avons rencontrées, dans leurs exposés mêmes, comme notions parmi les plus primitives des mathématiques. Il nous a semblé qu'il était plus sage de chercher à saisir la nature de la simplicité mathématique des « notions », dans les notions les plus simples qui nous soient données. Et, d'après ce que nous avons vu en suivant d'aussi près que possible les auteurs, il ne nous paraît pas qu'une étude ultérieure, faite sur ces « êtres mathématiques » familiers, figures géométriques ou notions arithmétiques, — suivant l'esprit de ces auteurs, il s'entend, — nous apporterait quelque chose de nouveau concernant la manière dont la philosophie logistique conçoit la simplicité mathématique des « notions », en général.

CHAPITRE IX

CE QU'EST, EN GENERAL, LA SIMPLICITE MATHEMATIQUE POUR LES LOGISTICIENS

Nous avons conclu (1), après avoir examiné les « théories », démonstrations, raisonnements mathématiques — les « enchaînements » mathématiques en général, — à la lumière des textes et d'une réflexion que nous nous sommes efforcés d'exercer autant que possible dans l'esprit des textes, que leur simplicité tenait, pour les Logisticiens à leur caractère d'être « *directs* », c'est-à-dire, au petit nombre d'opérations logiques véritablement constituantes, d'« éléments logiques », à propement parler, que ces enchaînements comportent.

Après notre étude des « notions » mathématiques, que les textes, plus nombreux ici, nous ont permis d'appuyer beaucoup plus constamment sur l'expression immédiate de la pensée logistique, nous venons de voir que la simplicité de ces « notions », est due, également, à leur petit nombre d'« éléments logiques », à leur caractère de notions, peut-on dire, *directes* — le mot « *directes* » ayant ici le sens de « logiquement primitives ».

Il va sans dire que ces « éléments logiques » ne sont pas les mêmes dans les deux cas, une « notion » mathématique (qui est un certain concept), étant, logiquement, d'une autre nature qu'une démonstration ou qu'un raisonnement. Ce sont, pourtant, toujours les opérations logiques dernières, les derniers actes logiques indivisibles (ou groupes d'actes, formant

(1) Voir plus haut, pp. 189 et 190.

un tout indivisible, comme la réduction d'une proposition A à une proposition intermédiaire A', dans une démonstration tendant à prouver que A est la même que la proposition B), qui donnent à la théorie, démonstration, notion, etc., son sens à la fois logique et mathématique. Ce sont toujours ses véritables « parties constituantes », si l'on peut employer une image grossière, ses « mailles » si on la compare à un réseau, ses « chaînons » si on la compare à une chaîne. Et, à propos de la simplicité des notions comme de celle des démonstrations, nous pouvons répéter que le petit nombre d'éléments, et le caractère direct, ne se conçoivent pas l'un sans l'autre ; que « direct », veut dire, ici, uniquement, « logiquement direct », et que « élément » veut dire : élément logique. La manière dont les « éléments » forment le tout ne compte pas, Si leur nombre reste le même, le tout qu'ils forment — qui peut devenir ainsi plus ou moins facile à concevoir, et plus ou moins aisé à manier dans les raisonnements où on voudra le faire entrer ultérieurement, — restera, en soi, aussi « simple ».

On se demandera : la simplicité mathématique n'est-elle pour les Logisticiens, rien autre que cela ? Il ne semble pas que l'on puisse, à la seule lueur de leurs textes et d'une réflexion qui s'efforce autant qu'elle le peut de respecter de leur esprit et de se l'assimiler, affirmer qu'elle soit aussi autre chose. Partout, là où, dans sa critique mathématique, un Logisticien parle de simplicité d'une notion comme d'une démonstration, d'une théorie comme d'un raisonnement, il n'apparaît nullement qu'il entende, par ce mot, autre chose que le caractère par excellence de ce qui est *direct*.

La manière même dont il entend les opérations constituantes — ce que nous avons appelé les « éléments logiques » — de l'enchaînement ou de la notion mathématique, ne fait que renforcer cette affirmation.

Au fond, en effet, qu'est-ce que ces opérations constituantes ? Ce sont des opérations logiques, c'est entendu. Mais tout ce que, jusqu'ici, nous avons dit de la conception logisticienne des mathématiques, tend, semble-t-il, abondamment à montrer que, dans la pensée de nos philosophes, il est impossible de séparer « opérations logiques », et « opérations d'*écriture* ». La Logique symbolique sur laquelle ils ont, — quelques-uns surtout, — tant insisté, est, pour eux, plus qu'une méthode parfaitement adéquate d'expression, d'une pensée

absolument claire, absolument libre de toute intuition mystérieuse, de toute couleur subjective, comme c'est, selon eux, le cas en logique pure ainsi que dans les mathématiques qui en sont le prolongement. Elle met en évidence la nature intime des seuls objets auxquels, en dernier ressort, les mathématiciens aient affaire : les relations logiques ou combinaisons de relations, les propositions, les classes. Et l'adéquation qui, en elle, existe entre l'exprimé et l'expression, confine à l'identité. Qu'il s'agisse d'une notion, comme celle du nombre 1 ou du nombre transfini ω, équivalente à la définition qu'on en donne, ou, comme celle d'espace, équivalente au système d'axiomes sur lequel elle est assise, ou qu'il s'agisse d'un enchaînement (théorie ou démonstration) il est toujours, aux yeux du Logisticien identique à la formule complète (ou à l'ensemble complet de formules), qui l'exprime. Car ces opérations logiques, dont il est fait, ces « éléments », correspondent chacun, exactement, à une opération d'écriture, et, vice-versa, toute opération d'écriture, dans la langue parfaite qu'emploient les Péano, les Burali-Forti, etc., représente, bien plus, « *est* », une opération logique. La pensée, supposée, d'ailleurs, tout à fait impersonnelle, ne se distingue plus de ce qu'il est ordinairement convenu d'appeler son « vêtement ». Le langage est, à ce degré de perfection, la pensée impersonnelle elle-même, le jeu des relations logiques pures, rendu accessible. Et le petit nombre d'éléments logiques, en lequel consiste, comme nous venons de le voir, la simplicité, tant des objets ou notions que les enchaînements mathématique, pour les Logisticiens, est, en fait, un petit nombre d'éléments d'écriture, sans aucun doute. La notion la plus simple est, celle dont la définition complète — dans le langage parfait de la Logique Symbolique, il s'entend, — est la plus brève. L'enchaînement le plus simple, est, lui aussi, celui dont tous les éléments logiques véritables, c'est-à dire toutes les opérations qui, traduites dans le langage de la Logique Symbolique, permettent de concevoir l'enchaînement avec sa pleine signification, sont le moins nombreux. C'est encore, comme on le voit, celui qui comporte l'écriture la plus brève ; qui correspond à la formule complète, ou au système complet de formules, comportant le moins d'éléments d'écriture.

On n'a aucune peine à voir que cette précision nous ramène sans difficultés à la notion de rectitude, à laquelle nous

faisions appel plus haut ; que c'est-là l'aboutissant de tout ce que nous avons dit.

Si l'on traite la pensée mathématique comme quelque chose de tout à fait objectif, impersonnel, comme le font les Logisticiens, c'est-à-dire, si l'on tient les notions, et les enchaînements mathématiques eux-mêmes pour des « *choses* », il est tout naturel qu'on soit amené à en chercher toute la réalité dans la formule à laquelle ils correspondent. Et la simplicité, en tant que qualité de cette réalité, on la cherchera là, elle aussi. En effet, où trouvera-t-on un support adéquat, une existence quelconque à une pensée « impersonnelle », si ce n'est dans un langage parfait, aux règles absolument rigoureuses, également impersonnel ? Mais dans cette identification parfaite de la chose mathématique et de la formule — à laquelle, semble-t-il, conduit forcément la philosophie que nous venons d'étudier, — il est aussi certain que la chose mathématique qui comporte le moins d'opérations constituantes, le moins d'« éléments logiques », celle dont la formule est la plus brève, c'est celle qui se manifeste *le plus directement ;* bien plus, c'est celle qui, objectivement parlant, « *est* », *la plus directe.*

Ceci est vrai dans tous les cas, mais particulièrement sensible dans celui des « enchaînements » mathématiques, dans lesquels, comme nous l'avons vu, le passage d'une proposition à l'autre, constitue une progression. Le petit nombre des « opérations constituantes », des « éléments logiques », d'un enchaînement qui, d'après les logisticiens mériterait la qualification de « simple » ; d'un enchaînement dont l'ensemble complet et adéquat de l'énoncé serait forcément bref, n'est, semble-t-il, pas autre chose qu'*un signe de cette progression directe.*

En effet, soit un raisonnement simple, — à la fois court et complet dans son expression (sinon il y aurait lieu de penser que des appels à l'intuition y sont faits, pour le compléter dans la pensée du mathématicien). Il y a, en lui, comme nous le remarquions (2), peu de démarches logiques réelles, — peu d'opérations logiques dont chacune est exprimée en langage symbolique adéquat, — entre les données universelles de la Logique et sa conclusion singulière. Ou, ce qui revient au même, il y a peu de *signes symboliques,* en

(2) Voir plus haut, p. 189.

lui (car chaque signe, ou ensemble déterminé de signes, indique une opération logique constituante ; pratiquement, se confond avec elle ; constitue, comme nous le disions, un élément de l'enchaînement).

Mais pourquoi y a-t-il peu de signes ? — C'est que chaque signe ou groupe de signes a été choisi de telle sorte qu'il n'y en ait pas besoin de davantage. C'est que, parmi plusieurs enchaînements, logiquement équivalents, il s'agit ici d'un enchaînement *court* quant à son écriture dans laquelle se reflète toute sa réalité de « chose », aux yeux du Logisticien. (L'écriture et la réalité logique se tiennent, dans les enchaînements comme dans les notions ou « êtres » mathématiques).

Pourquoi y a-t-il peu de démarches logiques réelles, entre les données générales de la logique symbolique — point de départ, — et la conclusion du raisonnement ? C'est que chaque démarche a une valeur ou, si l'on veut, une importance telle, est, en un mot, d'une telle qualité, que ce nombre suffit ; alors que, sans nul doute, si chacune était autre, il en faudrait davantage — et évidemment, aussi, davantage de signes d'écriture pour arriver à la même conclusion. C'est, en d'autres termes, que l'enchaînement en question est objectivement plus direct qu'un autre.

Les Logisticiens peuvent bien nier la part de l'intuition dans tout enchaînement mathématique considéré dans son essence propre, quel que soit l'acte d'invention qui l'ait amorcée, acte qui, de leur point de vue est bien plutôt une découverte. Ils ne la nient pas, en fait, dans l'opération psychologique qui, chez les mathématiciens, se trouve à la base de cette « découverte ». Mais, par le fait seul qu'il s'agit, pour eux, de découverte, que l'enchaînement mathématique, comme d'ailleurs l'« être » ou notion a, à leurs yeux, une réalité objective, transcendante en quelque sorte (3), ils ne peuvent admettre

---

(3) **H. Poincaré.** « Les autres (c'est-à-dire les Logisticiens), pensent au contraire que les objets existent dans une sorte de grand magasin, indépendamment de toute humanité ou de toute divinité qui pourrait en parler ou y penser ; que dans ce magasin nous pouvons faire notre choix, que, sans doute, nous n'avons pas assez d'appétit ou assez d'argent pour tout acheter ; mais que l'inventaire du magasin est indépendant des ressources des acheteurs. »

Dernières pensées, p. 147.

une relation *de nature* entre un acte d'intuition et lui. Cela ne change rien à ce sur quoi il nous semble bon d'insister ici. Quelle que soit et quelle que puisse être la cause du choix des opérations constituantes, dont le petit nombre assure à un enchaînement la simplicité mathématique, un fait est indéniable. C'est que, à point de départ identique, on arrive beaucoup plus *directement* à la conclusion par un petit nombre de ces opérations que par un nombre plus grand. Bien plus, c'est *parce qu'on* y arrive plus directement, que le nombre des opérations constituantes, — à la fois opérations logiques pures et opérations d'écriture, éléments véritables du dit enchaînement, est plus petit. Tout raisonnement mathématique est un processus de progression logique (dans une démonstration, nous l'avons vu, il s'agit, pour Couturat de réduire progressivement la conclusion à une proposition connue). Le raisonnement simple, la démonstration simple, est avant tout une progression *directe* et c'est *pour cela* que les « éléments logiques » — comme nous les avons appelés, — les « opérations constituantes » y sont en petit nombre. Une progression directe, toute intuition, toute impression subjective mise à part, n'a pas d'autre signification qu'une progression *qui ne traîne pas,* par conséquent, qu'une progression qui arrive à son terme, sinon d'un bond, du moins au moyen du moins grand nombre possible d'intermédiaires, en un mot, qui est la plus brève possible.

Les remarques qui viennent ici d'être faites, s'appliquent tout aussi bien à une théorie, comme celle de la grandeur ou de l'espace, ou à une notion mathématique, qu'à un raisonnement ou à une démonstration, avec la différence toutefois, que, dans le cas du raisonnement (ou de la démonstration), qui reste un enchaînement orienté vers un but, (alors que la théorie forme comme un tout plus statique, participant, dans une certaine mesure, à la nature de la notion), le caractère primordial de rectitude, est, grâce à nos habitudes d'esprit, plus aisément saisissable.

Sans doute, l'idée même de progression semble-t-elle, au premier abord, en contradiction avec l'attitude des Logisticiens, consistant à envisager les mathématiques sous un aspect plutôt statique. Mais Couturat lui-même parle de réduction progressive des propositions les unes aux autres. L'aspect statique, sous lequel les Logisticiens paraissent considérer les mathématiques vient, lui, plutôt, de ce que nous sommes

habitués à associer dans notre esprit progrès et inventivité, dynamisme et création. Au lieu de dire que Russell et Couturat et les autres de mêmes tendances, se placent à un point de vue statique, nous devrions nons contenter de dire qu'ils se placent à un point de vue strictement « *objectif* » — objectif étant, pour eux, ce qui existe en soi, indépendamment du temps. Mais le caractère transcendant du monde logique (et mathématique), n'empêche pas que le progrès puisse s'y rencontrer, ni, par conséquent, que la rectitude, caractère intrinsèque de ces « progressions » que sont les enchaînements mathématiques, y ait tant d'importance. Il s'agit seulement de s'entendre. Cette *rectitude*, c'est une rectitude *objective*, comparable à celle d'un chemin tracé qui est droit en tant que chose, indépendamment de l'impression qu'on peut éprouver en le parcourant. Et, de même que le petit nombre de pas qu'on y fait (comparativement à celui qu'on devrait faire ailleurs), en marchant devant soi, sans biaiser à droite ni à gauche, est le signe de sa rectitude, le petit nombre d'opérations logiques que suppose un raisonnement, le petit nombre d'éléments d'écriture nécessaires à le formuler complètement, et d'une manière générale, le petit nombre d'opérations logiques constitutives d'un enchaînement mathématique (ou d'une notion) n'est que le signe dénotant le caractère objectivement, logiquement *direct* de cet enchaînement (ou de cette notion). Et c'est en ce dernier que réside, aux yeux des Logisticiens, sa simplicité mathématique.

Si l'on veut, on peut dire, — et ce n'est qu'une façon différente d'exprimer la même idée, — qu'un enchaînement mathématique est d'autant plus simple qu'il constitue un exemple de plus grand *progrès synthétique*.

Et que la notion de synthèse, ici évoquée, et qui semble tout au moins aussi inattendue dans un commentaire de la pensée des Logisticiens que le paraissait d'abord celle de progression, ne fasse pas illusion. Il ne s'agit nullement, là encore, d'un appel, plus ou moins déguisé, au subjectif, à l'intuition, à l'activité inventive personnelle du mathématicien. Une fois pour toutes, nous savons qu'avec les Logisticiens, nous sommes en plein réalisme mathématique ; les enchaînements, comme les notions, sont traités à la manière de « choses », et leur simplicité n'est pas dans l'esprit de celui qui les conçoit, mais, est *en eux*, elle constitue un caractère qui *leur*

est propre. Il s'agit, toutefois, d'un avancement *constructif*, fût-il conditionné par des réalités extérieures au mathématicien en quelque sorte, et s'imposant à lui. Il s'agit de la construction, plus ou moins directe (et toujours purement logique) des réalités mathématiques que les formules symboliques représentent d'une manière aussi adéquate que possible.

Pour montrer que cette construction des notions et aussi des enchaînements mathématiques, (où son caractère de synthèse est quelquefois encore plus marqué par le fait du choix des opérations intermédiaires), tout en étant « *synthétique* », n'en donne pas moins naissance à des objets qui ont, vis-à-vis du mathématicien, toute l'indépendance des réalités qui, semble-t-il, s'imposent le plus brutalement à nous, il suffit, sans doute, de rappeler la manière dont Russell entend la perception des objets extérieurs. « Russell se propose, partant des données indéniables de l'expérience qui sont, non pas des choses, mais des « *qualia* » sans cesse changeants, de construire, avec les lois logiques, la notion d'objets permanents. La croyance commune, c'est qu'il existe des objets dans un espace commun, et que ces qualia sont des apparences ou aspects que présentent les objets de mon point de vue, et qui doivent changer avec lui. Mais, pour M. Russell, la réalité, ce sont ces apparences elles-mêmes ; elles ne sont pas dans un espace commun, mais elles constituent mon monde privé et mon espace privé. *L'objet est une construction purement logique* qui ne fait pas appel à d'autres entités que les qualia, ni a aucune inférence à une réalité quelconque. Il est le *système* complet de toutes les apparences ; et M. Russell pense démontrer que le système a précisément les propriétés que le sens commun attribue aux objets. L'espace commun est construit logiquement à partir des espaces privés de chaque observateur. On voit comment, dans l'interprétation de M. Russell, la construction logique libre se substitue à la croyance spontanée » (4).

Cette « Construction logique » — tout à fait comparable à celle des réalités mathématiques — vaut la peine qu'on s'y arrête. Selon Russel, en effet, comme le montre tout ce passage, c'est l'idée de *système* de qualia qui est le principe mê-

(4) **Emile Bréhier.** « Histoire de la Philosophie », t. II-IV, p. 1103.

me de constitution des objets à constituer. Les qualia, « sans cesse changeants », n'ont pas de valeur par eux-mêmes. On est obligé de faire appel à eux comme matériaux, mais rien de plus. Ce sont les lois logiques, transcendantes et immuables, grâce auxquelles ils s'organisent les uns par rapport aux autres, qui font que l'objet « système complet de toutes les apparences » est tout de même une « réalité » qui s'impose du dehors, de façon permanente. Les lois logiques, sont, pour l'auteur, les lois mêmes de l'existence « objective », et les lois de la perception qui s'en saisit, pour cette raison que ce sont les lois de formation du *système* des apparences, et que les apparences ne sont elles-mêmes la réalité que parce qu'elles forment un *système* — qu'elles supportent, en quelque sorte (pour parler un langage qui peut sembler inattendu, mais qui, semble-t-il, est naturellement amené par ce qui précède) une certaine *forme*.

S'il en est ainsi des objets extérieurs, à plus forte raison en est-il de même des objets mathématiques, et des enchaînements dont nous venons, plus haut, de parler.

Si l'espace commun, par exemple, est « construit logiquement à partir des espaces privés de chaque observateur », et doit sa permanence à la systématisation des apparences que les éternelles lois logiques introduisent, à plus forte raison l'espace mathématique, ensemble d'axiomes fixant une fois pour toutes l'interdépendance de certaines relations « purement logiques », est-il, lui aussi, réel de la réalité d'un sys-système, — et *simple*, à la façon dont un système peut l'être, c'est-à-dire grâce au caractère de *rectitude* qui lui est inhérent. Et tous les enchaînements mathématiques (théories, raisonnements, démonstrations) en sont là. Et, de même, les notions.

C'est dans cette *rectitude* de leur nature, qui est celle d'un système, qu'il faut chercher pourquoi les opérations logiques réelles qui composent certains d'entre eux (qui sont leurs articulations même en tant que systèmes), et que matérialisent les opérations d'écriture, se trouvent être en petit nombre ; et pourquoi, par suite, nous avons pu, avec justesse, semble-t-il, dire que, pour les Logisticiens, la simplicité mathématique réside dans le *petit nombre* des « éléments logiques » des enchaînements ou des notions qu'ils qualifient de simples.

Il nous reste, maintenant, à examiner comment des philosophes également mathématiciens, et critique de leur science, mais qui, de par le point de vue qu'ils adoptent dans la critique, et de par la tendance générale de leur esprit, se placent dans une position très différente de celle des Logisticiens en face des mêmes problèmes, envisagent, à leur tour, le problème de la simplicité mathématique, objet de notre étude.

TROISIEME PARTIE

Théories subjectivistes de la simplicité en mathématiques

CHAPITRE X

LA DOCTRINE DE HENRI POINCARE

La philosophie qui semble s'opposer le plus nettement à celle des Logisticiens est celle de Henri Poincaré. Au grand mathématicien-philosophe — qui se rattache lui-même nettement à Cournot, de bien des manières, — on peut rattacher un certain nombre de philosophes des mathématiques, et, en général, des sciences, tels que M. Ed. Goblot, Rignano, Ph. Chaslin, dont la manière d'envisager les problèmes mathématiques est plus ou moins la même que la sienne (dussent leurs affirmations, parfois, différer dans le détail) et dont plus d'un apparamment a subi son influence (1).

Avant d'aborder l'examen de ce que la « simplicité mathématique » signifie pour ces théoriciens de la science — car il semble que, pour eux tous, elle signifie sensiblement la même chose, — il est bon, il est même nécessaire, que nous examinions rapidement leur doctrine en ce qui concerne les mathématiques, afin de mettre, si possible, en évidence, ce qui en fait l'originalité par rapport à la doctrine précédemment étudiée (*en quoi* consiste, justement, leur *opposition*), et puis, ce qui, du seul point de vue du problème de la nature de la simplicité mathématique, la rend particulièrement intéressante.

---

(1) **M. Ed. Goblot,** dont j'ai eu l'honneur de suivre les cours à la Faculté de Lyon, de 1924 à 1927, ne manquait pas une occasion d'insister sur le caractère conventionnel des axiomes de la géométrie (et, ajoutait-il, même des principes de la pensée), et de rappeler la célèbre théorie de H. Poincaré pour lequel il professait la plus grande admiration.

Il semble que ce soit avant tout, dans les critiques adressées par H. Poincaré aux Logisticiens, qu'il faille aller chercher l'expression la plus nette de ce qui distingue sa doctrine de la leur. Que leur reproche-t-il donc, en somme ? D'aboutir, à des contradictions, à des « antinomies » (2), c'est entendu, mais surtout, de mutiler la pensée mathématique, d'édifier des théories, ingénieuses sans doute, mais insuffisantes à rendre compte d'elle ; des théories, même, qui ne puisent rien dans ce qui fait son essence véritable. « En réduisant, écrit-il, la pensée mathématique à une forme vide, il est certain qu'on la mutile. Admettons nous-même que l'on ait établi que tous les théorèmes peuvent se déduire par des procédés purement analytiques, par de simples combinaisons logiques, d'un nombre fini d'axiomes, et que ces axiomes ne soient que des conventions. Le philosophe conserverait le droit de rechercher quelle est l'origine de ces conventions, de voir pourquoi elles ont été jugées préférables aux conventions contraires. Et puis, la correction logique des raisonnements qui mènent des axiomes aux théorèmes *n'est pas la seule chose dont nous devrions nous préoccuper*. Les règles de la parfaire logique *sont-elles toute la mathématique* (3) ? Autant dire que l'art du joueur d'échecs se réduit aux règles de la marche des pièces. Parmi toutes les constructions que l'on peut combiner avec les matériaux fournis par la logique, il faut un choix ; le vrai géomètre fait ce choix parce qu'il est guidé par un sûr instinct, ou par quelque vague conscience de je ne sais quelle géométrie plus profonde et plus cachée, qui *seule, fait le prix de l'édifice construit* » (4).

Mais on pourrait observer que la doctrine des Logisticiens ne concerne pas l'invention mathématique, à proprement parler. Couturat n'écrit-il pas que « tout autre procédé de raisonnement — que ceux employés en logique — considéré comme illégitime comme moyen de démonstration, ne peut servir tout au plus que de moyen d'invention » (5) ? Les Logisticiens, comme nous l'avons vu, se placent du point de vue des mathématiques achevées, et non de celles qui « se

(2) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », pp. 201 à 207.
(3) C'est nous qui soulignons les passages en italique.
(4) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 158.
(5) **L. Couturat.** « Principes des Mathématiques », p. 35. Déjà cité.

font ». Poincaré essaye donc de se placer sur un terrain plus propice à la discussion. « Ce que je veux rechercher, dit-il, c'est, s'il est vrai qu'une fois admis les principes de la logique, on peut, je ne dis pas découvrir, mais démontrer toutes les vérités mathématiques, sans faire de nouveau appel à l'intuition » (6). Et il conteste que, même là, l'intuition soit absente, et qu'on puisse légitimement en faire abstraction.

Tout le monde connaît la célèbre théorie que H. Poincaré a exposée dans « Science et Hypothèse », et selon laquelle « le procédé qui est uniforme et qu'on retrouve à chaque pas » dans les mathématiques « est la démonstration par récurrence » (7). « A chaque pas, écrit-il plus loin, si on y regarde bien, on retrouve ce mode de raisonnement, soit sous la forme simple que nous venons de lui donner, — (il vient en effet de montrer comment on peut s'en servir pour démontrer les règles de l'addition et de la multiplication, c'est-à-dire, celles du calcul algébrique) — soit sous une forme plus ou moins modifiée. C'est donc bien là *le raisonnement mathématique par excellence* » (8). Or, examinant la nature de ce raisonnement, le mathématicien-philosophe, en arrive à cette conclusion, à laquelle, dit-il « on ne peut se soustraire » (9), que « la règle du raisonnement par récurrence est irréductible au principe de contradiction » (10), qu'elle « ne peut non plus nous venir de l'expérience » (11), et que « inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, cette règle est le véritable type du jugement synthétique à priori. On ne saurait d'autre part songer à y voir une convention, comme pour quelques-uns des postulats de la géométrie » (12). Et, si ce jugement s'impose à nous avec une irrésistible évidence, c'est qu'« il n'est autre que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe, et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience » (13).

(6) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 158.
(7) **H. Poincaré.** « La Science et l'Hypothèse », p. 19.
(8) **H. Poincaré.** Même ouvrage, p. 19.
(9) **H. Poincaré.** Idem, p. 23.
(10) **H. Poincaré.** Idem, p. 23.
(11) **H. Poincaré.** Idem, p. 23.
(12) **H. Poincaré.** Idem, p. 23.
(13) **H. Poincaré.** Idem, pp. 23 et 24.

Le principe du raisonnement par récurrence, ou principe d'induction complète apparaît donc à H. Poincaré comme, à la fois « nécessaire au mathématicien et irréductible à la logique » (14), et, en examinant les raisonnements mathématiques d'un peu près on y verrait, dit-il, appliqués « beaucoup d'autres principes analogues présentant les mêmes caractères essentiels », — c'est-à-dire, sans doute, d'être, à la fois indispensables au mathématicien et irréductibles à la logique, d'être des « jugements synthétiques à priori ». — Dans cette catégorie de principes, celui de l'induction complète est seulement le plus simple de tous, et c'est pour cela que je l'ai choisi pour type » (15).

De ce fait, H. Poincaré se pose nettement en adversaire de la théorie des Logisticiens selon laquelle, nous l'avons vu, toutes les mathématiques ne sont pas autre chose que le prolongement de la logique ; selon laquelle, le « principe d'induction », si important, est, dit-il, tenu pour une « définition déguisée du nombre entier, c'est-à-dire, une simple convention » (16), quelque chose d'analogue à ce que le postulat d'Euclide représente pour lui-même (17).

Il n'est peut-être pas aussi superflu qu'on pourrait, de prime abord, le croire, d'examiner les raisons qu'il donne pour mieux asseoir sa position et mettre les Logisticiens en échec. Elles risquent de jeter un certain jour sur son point de vue propre, en critique mathématique, et c'est là ce que nous cherchons à savoir. Pour avoir, dit-il, le droit de ne pas tenir le principe d'induction complète pour un jugement synthétique à priori, mais seulement pour l'expression d'un acte décisoire de l'esprit, une convention, il faudrait que les Logisticiens remplissent deux conditions essentielles (18) : qu'ils montrent que cette définition du nombre entier, que constitue le principe en question, ne comporte pas de contradiction, et puis, qu'ils puissent, après avoir, par son moyen « défini » le nombre entier, « affirmer, de l'objet représenté par ce mot, le postulat qui a servi à le définir », c'est-à-dire, « ne

(14) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 159.
(15) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 160.
(16) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 160.
(17) **H. Poincaré.** Même ouvrage, p. 161.
(18) **H. Poincaré.** Idem, de la page 161 à la page 165.

pas attribuer au mot, implicitement, un sens différent » (19) de celui que la définition, explicitement énoncée, lui donne. Et il s'attache à démontrer que « les Logisticiens n'ont pas mieux rempli la seconde condition que la première » (20). En effet, pour qu'ils satisfassent à la première, il leur faudrait envisager toutes les propositions que l'on peut déduire du dit principe ou postulat, considéré comme prémisse, « et montrer que, parmi ces propositions il n'y en a pas deux dont l'une soit la contradictoire de l'autre. Si ces propositions sont en nombre fini, une vérification directe est possible. Ce cas est peu fréquent, et d'ailleurs peu intéressant. Si ces propositions sont en nombre infini » — et c'est, semble-t-il, le cas, dès qu'il s'agit d'une définition du nombre entier, qui est, pour ainsi dire à la base de toutes les mathématiques « arithmétisées », — « on ne peut plus faire cette vérification directe ; il faut recourir à des procédés de démonstration où, en général, on sera forcé d'invoquer ce principe d'induction complète qu'il s'agit, précisément, de vérifier » (21). Pour qu'ils satisfassent à la seconde, il faudrait que les définitions que les divers auteurs de leur école donnent du nombre ne renferment pas de pétition de principes. Or ce n'est pas le cas selon H. Poincaré, qui met en évidence que toutes ces définitions présupposent l'idée — intuitive apparemment — de nombre, ou de 1, ou de 0, etc. « Qu'est-ce que zéro ? dit-il, pour Couturat. C'est le nombre des éléments de la classe nulle ; et qu'est-ce que la classe nulle ? C'est celle qui ne contient aucun élément » (22). Et il ajoute : « Définir zéro par nul, et nul par aucun, c'est vraiment abuser de la richesse de la langue française ; aussi M. Couturat a-t-il introduit un perfectionnement dans sa définition en écrivant :

$$0 = \iota\Lambda : \varphi x = \Lambda . \supset . \Lambda = (\forall \varphi, x)$$

ce qui veut dire, en français : zéro est le nombre des objets qui satisfont à une condition qui n'est jamais remplie. Mais comme « jamais », signifie en aucun cas, je ne vois pas que le progrès soit considérable » (23).

---

(19) **H. Poincaré.** Idem, p. 164.
(20) **H. Poincaré.** Idem, p. 165.
(21) **H. Poincaré.** Idem, p. 163.
(22) **H. Poincaré.** Idem, p. 169.
(23) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 169.

Il en est de même de la définition logisticienne du nombre 1, d'après Couturat, le nombre des éléments d'une classe dont deux éléments quelconques sont identiques. « Elle est plus satisfaisante, dit H. Poincaré, que la précédente, en ce sens que, pour définir 1 il ne se sert pas du mot « un » : en revanche, il se sert du mot « deux ». Et j'ai peur qui si on demandait à M. Couturat ce que c'est que deux, il ne soit obligé de se servir du mot un » (24). La même remarque s'applique à David Hilbert, pour qui « l'objet 1 » ne doit être considéré que comme un pur symbole sans signification, de manière à ce qu'aucune idée préconçue du nombre ne s'introduise dans la suite, et qui, néanmoins introduit la notion de nombre, en écrivant : « Les groupes formés avec cet objet, deux, trois, ou plusieurs fois répété... » (25).

On voit, dans tout ceci que H. Poincaré soutient que l'idée de nombre (de même que, sans doute d'autres idées également fondamentales en mathématiques), est *intuitive*, qu'elle préexiste à toute définition logique. Cela, les Logisticiens, du moins certains Logisticiens, l'eussent sans doute admis aussi, en présentant la chose comme une vérité psychologique, qui n'a rien à voir dans leur domaine à eux, le domaine logique ; et cela ne les aurait pas empêchés de s'attacher à en chercher une définition purement logique, une définition telle qu'elle existerait forcément si nous n'avions du nombre, aucune intuition et si nous devions tout de même nous occuper de mathématiques. H. Poincaré, lui, considère cela comme impossible. Pour lui, non seulement les notions absolument fondamentales telles que le nombre préexistent à toute définition logique, mais encore elles échappent à toute définition logique, à moins de pétitions de principes plus ou moins bien dissimulés en celles-ci. La remarque ironique qu'il fait sur cette définition de 1, de Burali-Forti :

$$1 = \iota T'\{Ko \frown (u,h) \varepsilon (\upsilon \varepsilon Un)\}$$

en l'appelant : « définition éminemment propre à donner une idée du nombre 1 aux personnes qui n'en auraient jamais entendu parler » (26), le confirme. Et non seulement il n'est besoin de donner à personne une idée du nombre 1, mais cette définition savante, comme toutes les autres, contient une péti-

(24) **H. Poincaré.** Idem, p. 170.
(25) **H. Poincaré.** Idem, p. 180.
(26) **H. Poincaré.** Idem, p. 168.

tion de principe, détermine la nature logique de 1 en se servant du mot « un ». Derrière les définitions du nombre entier, ou des premiers nombres entiers, c'est ici le grand principe de l'induction complète lui-même qui est en cause. C'est lui que les adversaires de H. Poincaré ont tenu pour une « définition » par postulat du nombre entier, et lui, que H. Poincaré retrouve dans tout raisonnement mathématique quelqu'il soit et qu'on ne saurait fonder sur autre chose que sur une intuition à priori. Et l'auteur démontre, que l'on a beau faire entrer ce principe parmi les axiomes indémontrables que tous les Logisticiens admettent à la base des mathématiques, suivant ainsi l'exemple de Péano et de Padoa, qu'on a beau en faire un « postulat », servant à la définition des premières notions — soi-disant non intuitives — que l'on déterminera, il faudra toujours, pour légitimer cette attitude, prouver qu'une telle définition n'implique pas contradiction, et, pour cela, recourir à un raisonnement où, tôt ou tard, le principe de l'induction complète intervient, où il est supposé (27). Hilbert, qui a essayé autant que n'importe quel autre mathématicien de l'école logistique à se libérer de l'intuition, pour lequel « les vrais mathématiciens n'ont à combiner que de purs symboles, et raisonner sur eux sans se préoccuper de leur sens » (28), lui aussi « au moment de démontrer que la définition du nombre entier par l'axiome d'induction complète n'implique pas contradiction, se dérobe, comme se sont dérobés MM. Russell et Couturat parce que la difficulté est trop grande » (29), ou, aurait pu dire H. Poincaré, encore plus fidèlement à l'esprit de tout son contexte : parce qu'il est impossible de résoudre cette difficulté.

Et c'est pour cela — par le fait que le principe d'induction complète est au fond de tout raisonnement mathématique, qu'il faut, en somme, toujours s'appuyer sur lui, même pour démontrer ce théorème fondamental de la géométrie, à savoir que les axiomes de la géométrie n'impliquent pas contradiction (30), — que, contrairement à ce que soutiennent les logisticiens, après les appels à l'intuition qu'exigent les quelques

(27) **H. Poincaré.** Même ouvrage, pp. 177-178-179.
(28) **H. Poincaré.** Idem, p. 183...
(29) **H. Poincaré.** Idem, p. 184...
(30) **H. Poincaré.** Idem, p. 185.

axiomes premiers, indémontrables, de la Logique Symbolique, et les quelques notions premières (appels qu'ils admettent tous), il y en aura constamment, et à chaque pas, de nouveaux, et qu'aucun domaine des mathématiques n'échappe à cette nécessité. Toute intervention de l'idée de nombre, soit sous une forme directe, soit sous la forme d'emploi d'adjectifs numéraux, en constitue un, même au sein de la Logique Symbolique la plus abstraite, et, remarque H. Poincaré « cet inconvénient, qui quelquefois, ne serait pas impossible à éviter, quelquefois aussi, est essentiel. Une relation est incompréhensible sans deux termes ; il est impossible d'avoir l'intuition de la relation, sans avoir, en même temps, celle de ses deux termes, et sans remarquer qu'ils sont *deux*, car, pour que la relation soit concevable, il faut qu'ils soient deux et deux seulement » (31). Et toutes les fois que l'intuition intervient, évidemment, le dogme fondamental de l'école logistique est mis en cause.

H. Poincaré s'attache à montrer que l'extension, très intéressante, entreprise par Russell de la Logique, bien au-delà des limites que lui assignait la vieille syllogistique classique, n'entame en rien les affirmations précédentes. Les nouvelles notions « indéfinissables » que le Logisticien introduit parmi les notions premières, à la base de chaque nouveau chapitre de mathématique pure, sont intuitives. Les principes indémontrables dont il parle, et « que nous regardions comme intuitifs quand nous les rencontrions, plus ou moins explicitement énoncés, dans les traités de mathématiques » (32), sont de véritables jugements synthétiques à priori. L'élargissement de la notion même de la Logique, ne les a pas fait changer de nature — il n'a pas, donc, éliminé des mathématiques tout ce qui, en elles, jusque-là, échappait à la logique pure, — il les a fait seulement « changer de place » (33).

En définitive, ce qui distingue la conception mathématique de Poincaré de celle des Logisticiens, c'est que, contrairement aux affirmations, si souvent répétées, de ces derniers, elle se refuse d'admettre que les mathématiques ne soient rien autre qu'un prolongement de la Logique, rien autre qu'un jeu combinatoire de symboles, en eux-mêmes vides de

(31) **H. Poincaré.** Idem, p. 177.
(32) **H. Poincaré.** Idem, p. 175.
(33) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 175.

contenu, et d'où la finalité serait exclue et l'intuition rigoureusement bannie. Selon elle, au contraire, non seulement le rôle de l'intuition est certain, et absolument primordial dans l'invention mathématique, comme d'ailleurs dans toute sorte d'invention (chose que Couturat lui-même ne nie pas) (34), mais encore la mathématique toute faite qu'on étudie après-coup, ne saurait livrer au philosophe le secret de sa véritable nature en tant que science, non seulement « en fait », dans la pratique, mais encore « *en droit* ». La démonstration ne saurait s'expliquer, se comprendre, sans l'intuition, car c'est en elle qu'il faut aller chercher le principe de son unité interne, c'est-à-dire, de ce qu'il y a en elle, comme en tout enchaînement, quelle que soit la prise qu'il offre à l'analyse pure et simple, — de plus important et de plus original. Comparant le « tout » que forme un ensemble agencé de propositions mathématiques — un édifice « purement logique », comme diraient ses adversaires, — à celui que constitue un être vivant, Poincaré, dit notamment : « La façon dont les cellules sont agencées et d'où résulte l'unité de l'individu, n'est-elle pas aussi une réalité, beaucoup plus intéressante que celle des éléments isolés, et un naturaliste qui n'aurait jamais étudié l'éléphant qu'au microscope, croirait-il connaître suffisamment cet animal ? Eh ! bien, en mathématiques il y a quelque chose d'analogue. Le Logicien décompose pour ainsi dire chaque démonstration en un très grand nombre d'opérations élémentaires ; quand on aura examiné ces opérations les unes après les autres et qu'on aura constaté que chacune d'elles est correcte, croira-t-on avoir compris le véritable sens de la démonstration ? L'aura-t-on compris, quand, par un effort de mémoire on sera devenu capable de répéter cette démonstration en reproduisant toutes ces opérations élémentaires dans l'ordre même où les avait rangées l'inventeur ? Evidemment, non, nous ne posséderons pas encore la réalité tout entière, *ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration,* nous échappera complètement. L'analyse pure met à notre disposition une foule de procédés dont elle nous garantit l'infaillibilité ; elle nous ouvre mille chemins différents où nous pouvons nous engager en toute confiance ; nous sommes sûrs de n'y pas rencontrer d'obstacles ;

---

(34) **L. Couturat.** « Les principes des Mathématiques », p. 35.

mais de tous ces chemins, quel est celui qui nous mènera le plus promptement au but ? *Qui nous dira lequel il faut choisir ? Il nous faut une faculté qui nous fasse voir le but de loin, et, cette faculté, c'est l'intuition* » (35). Plus loin. Poincaré compare le lecteur d'un livre de mathématique, qui n'est que logicien, au spectateur d'une partie d'échecs qui se contenterait de savoir quelles sont les règles du jeu, et de reconnaître que chaque coup a été joué conformément à ces règles. « Comprendre la partie, dit-il, c'est tout autre chose ; c'est savoir pourquoi le joueur avance telle pièce plutôt que telle autre qu'il aurait pu faire mouvoir sans violer les règles du jeu. C'est apercevoir la raison intime qui fait de cette série de coups successifs une sorte de tout organisé » (36). Une image sensible primitive nous sert souvent, au départ, d'« occasion » pour construire un « système compliqué d'inégalités », un enchaînement mathématique, disons-nous, logiquement parfait. Une fois la construction terminée on l'a considérée en elle-même, indépendamment de toute image sensible, et indépendamment de toute idée directrice, comme un édifice existant en soi. « Et cependant, si l'image primitive avait totalement disparu de notre souvenir, comment devinerions-nous par quel caprice toutes ces inégalités se sont échafaudées de cette façon les unes aux autres ? » (37). Et cela reste vrai même quand l'« image primitive » n'a pratiquement pas existé dans notre « souvenir » ; « les anciennes notions intuitives de nos pères même lorsque nous les avons abandonnées, impriment encore leur forme aux échafaudages logiques que nous avons mis à leur place » (38).

Qu'est-ce à dire sinon que, tout au long de sa critique mathématique, H. Poincaré se place à un point de vue nettement *psychologique* ; que, ce qu'il considère, ce n'est pas une mathématique existante en soi, tel un « tout » logique pensable, indépendant des processus réels de la pensée discursive desquels il a bien fallu partir pour le concevoir, ou, si l'on préfère, pour le « découvrir » peu à peu ; indépendant de la conscience qui est arrivée à le saisir, par un effort

---

(35) **H. Poincaré.** « La valeur de la Science », pp. 26-27.
(36) **H. Poincaré.** « La valeur de la Science », p. 27.
(37) **H. Poincaré.** Même ouvrage, p. 28.
(38) **H. Poincaré.** Idem, p. 29.

continuel d'abstraction ; mais bien la mathématique *vivante*, telle que l'expérience de la définition, du raisonnement, de la démonstration, nous la présente, telle que l'esprit la crée tout en la contemplant. D'ailleurs, pour lui, une telle mathématique séparée de l'esprit chercheur et raisonnant, dût-elle n'être que le prolongement d'une logique toute symbolique, est inconcevable car « il n'y a pas de logique et d'épistémologie indépendantes de la psychologie » (39). Les Pragmatistes, dit-il encore — et c'est parmi ces derniers qu'il se range dans sa distinction entre « Pragmatistes » et « Cantoriens », sur laquelle il insiste, — considèrent qu'un objet n'existe, que quand il est pensé, et qu'on ne saurait connaître un objet pensé indépendamment d'un sujet pensant » (40). C'est là à coup sûr de l'idéalisme, comme Poincaré le dit lui-même, et c'est par là qu'il s'oppose profondément — ainsi que tous ceux qui partagent son point de vue, — aux philosophes mathématiciens dont nous avons jusqu'ici examiné la doctrine. Et l'on peut admettre, croyons-nous, — d'ailleurs nous y reviendrons, — que de là vient toute la différence de sens que prendront les mêmes mots employés, soit par les uns, soit par les autres. En parlant des Logisticiens, nous avons insisté sur ce fait que la « pensée », de leur point de vue, — (alors, par exemple, qu'il s'agissait d'« économie de pensée », de « somme de pensée », etc...) — voulait dire, une pensée logique pure telle qu'on « devrait » pouvoir idéalement la reconstituer, telle qu'elle serait « *en droit* », indépendamment du mécanisme de nos esprits lents à abstraire.

Ici, au contraire, « pensée » voudra dire « pensée *en fait*, telle que la pratique de tout esprit sain en révèle le mécanisme, telle qu'elle se présente à nous dans ses spéculations les plus abstraites chargée de son inséparable part d'intuition, avec sa finalité unifiante, sa discursivité naturelle, où « l'opération » sous-entendue, n'a pas la même valeur, ne se trouve pas sur le même plan, que l'opération réellement effectuée que, logiquement, elle conditionne.

« La logique reste stérile, dit H. Poincaré, à moins d'être fécondée par l'intuition » (41). C'est par l'intuition qu'inconsciemment, le mathématicien procède au choix des éléments

(39) **H. Poincaré.** « Dernières pensées », p. 139.
(40) **H. Poincaré.** « Dernières pensées », p. 158.
(41) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 211.

que la logique n'a plus qu'à utiliser selon ses règles. Mais quelle est la nature cette intuition ? « Nous en avons de plusieurs sortes : d'abord, l'appel aux sens et à l'imagination, ensuite, la généralisation par induction, calquée, pour ainsi dire, sur les procédés des sciences expérimentales : nous avons, enfin, l'intuition du nombre pur, qui peut engendrer le véritable raisonnement mathématique. Les deux premières ne peuvent donner la certitude... » (42), et cela, bien que l'« intuition sensible est — en fait, — en mathématique, l'instrument le plus ordinaire de l'invention » (43).

Mais c'est, sans conteste, la troisième qui est, pour H. Poincaré, l'essentielle. Douter d'elle, dit-il, ce serait douter de l'arithmétique (44). C'est elle qui donne, sans le secours des sens ni de l'imagination, à ceux qui sont le moins portés à chercher à se représenter concrètement l'abstrait, à ceux que H. Poincaré appelle des « Analystes » par opposition aux « Intuitifs » (terme qu'il emploie faute de mieux), le « sentiment direct de ce qui fait l'unité d'un raisonnement » (45), c'est-à-dire, si nous avons compris la pensée de l'auteur, le sentiment de ce lien, non pas seulement logique, mais en quelque sorte actuel, organique, profondément structurel entre ses différentes parties ; la certitude de son unité interne de construction.

D'ailleurs quelle que soit exactement cette intuition, en réalité assez délicate à déterminer brièvement du fait qu'il y a en elle un fond esthétique (sur lequel nous aurons l'occasion de revenir), le peu que, jusqu'ici, nous avons pu dire suffit, semble-t-il, à montrer combien l'opposition entre H. Poincaré et les Péano, Russell, Couturat et autres philosophes de la même école, est tranchée. Il est plus que probable que la conception que H. Poincaré a de la nature de la simplicité mathématique, et qu'il s'agit à présent pour nous de dégager et d'exposer, se ressent profondément de cette opposition fondamentale de vues. Elle s'en ressent, sans doute, d'autant plus, que loin de constituer un accident dans sa philosophie, ou un point secondaire, elle y tient une place tout à fait importante.

---

(43) **H. Poincaré.** « La valeur de la Science », p. 34.
(42) **H. Poincaré.** « La valeur de la Science », p. 22.
(44) **H. Poincaré.** Même ouvrage, p. 22.
(45) **H. Poincaré.** Idem, p. 32.

CHAPITRE XI

QU'EST-CE, POUR H. POINCARE, QUE LA SIMPLICITE DES « ENCHAINEMENTS » MATHEMATIQUES

Nous ne reviendrons pas sur la distinction entre ce que, dans la partie précédente de cette étude, nous avons appelé, d'une part, les « enchaînements », de l'autre, les « notions », ou « êtres », ou « objets » mathématiques. Nous gardons à ce classement commode, et, nous semble-t-il, rationnel, le même sens. Qu'il nous suffise seulement de rappeler que, dans la première catégorie nous avons fait entrer, et les « théories » mathématiques, systèmes d'axiomes posés ensemble, et formant, avec les conséquences qu'on en peut déduire, un « tout » organisé, et, ce qui est assez différent, les démonstrations, et, en général, les raisonnements, suites de propositions liées les unes aux autres plus ou moins linéairement, en vue de la mise en évidence d'une vérité. — c'est-à-dire, dirons-nous ici dans l'esprit de H. Poincaré. — non pas simplement en vue de la réduction logique progressive d'une proposition à une autre, mais en vue de la construction d'une proposition, d'un jugement, à partir d'un autre déjà accepté.

C'est de l'étude surtout des « enchaînements » mathématiques que se dégage la conception de la simplicité selon H. Poincaré. Celui-ci, en effet, s'est tout particulièrement occupé des raisons que nous avons de préférer certaines « théories » à d'autres ; entre autres, de préférer les géométries qui admettent le postulat d'Euclide à celles qui ne l'admettent pas ; et, parmi celles qui l'admettent, des raisons que nous avons de choisir la métrique qui donne à l'espace *trois* dimensions — la métrique, qui, c'est-à-dire, adopte le point (plutôt que la ligne droite ou tout autre figure), comme élé-

ment de l'espace (1). Or, parmi ces raisons, au tout premier plan, il nous indique la simplicité *en soi*, c'est-à-dire, la simplicité mathématiquement parlant, de la géométrie euclidienne à trois dimensions.

Répéterons-nous ici la citation bien connue, si souvent rappelée ? « Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre, elle ne peut être que plus commode. Or, la géométrie euclidienne est, et reste la plus commode parce que 1° *elle est la plus simple.* Elle ne l'est pas seulement par suite de nos habitudes d'esprit ou de je ne sais quelle intuition directe que nous aurions de l'espace euclidien ; *elle est la plus simple en soi, de même qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré* » (2).

Or, une géométrie est bien quelque chose qui répond à l'idée que nous nous sommes fait d'une « théorie » mathématique : c'est un certain nombre de postulats posés ensemble, comme nous venons de dire, et constituant un « tout » organisé avec les propositions qu'on en peut déduire. Si donc nous arrivons à nous rendre compte de ce que H. Poincaré veut dire quand il parle d'une géométrie plus simple « *en soi* » qu'une autre, — c'est-à-dire, mathématiquement plus simple, et non pas seulement plus facile, pour nous, à saisir ou à appliquer, — nous aurons une idée de ce en quoi, pour lui, consiste la simplicité d'une théorie mathématique.

Et pour cela, essayons d'abord de comprendre ce que représente, pour H. Poincaré, ce tout organisé, basé sur un certain nombre de postulats, posés ensemble, qu'est une géométrie. Pour H. Poincaré, une géométrie, c'est, avant tout, l'étude d'un « groupe » de transformations, c'est l'étude du

---

(1) « On ne peut rejeter le postulat d'Euclide sans modifier la structure du groupe métrique ; mais, on peut prendre d'autres éléments d'espace que le point, tout en conservant le même groupe. Les axiomes d'Helmoltz et de Lie, qui définissent la structure du groupe, doivent s'énoncer pour le cas indéterminé de n dimensions, avant d'introduire la condition : $n = 3$. Poincaré gourmande justement Lie pour avoir posé le nombre ternaire des dimensions « avant » d'avoir défini la structure des groupes métriques ». **L. Rougier.** « La philosophie géométrique de Henri Poincaré », p. 135.

(2) **H. Poincaré.** « Revue générale des Sciences » du 15 décembre 1891, p. 774.

« groupe » des déplacements. Nous ne parlerons pas ici des raisons qui font admettre que les déplacements forment un groupe, raisons que le grand géomètre a exposées, et que M. L. Rougier a, à sa suite, reprises, dans l'étude qu'il a donnée de sa philosophie (3). Mais quelques définitions sont bonnes à rappeler, en particulier, celle du « groupe ». « Etant donné un ensemble de transformations appliquées à des éléments quelconques, on dit que cet ensemble forme un « groupe », si le produit de deux transformations quelconques de cet ensemble, et la transformation inverse de chacune d'elles, font encore partie de cet ensemble » (4). Or, ce qu'on entend ici par « transformation », c'est une opération de correspondance. « Si, par une loi quelconque, à chaque élément d'un ensemble E correspond un élément d'un ensemble E', on substitue E' à E, ou bien, on transforme E en E' » (5). Soit maintenant une transformation T, qui fait correspondre l'ensemble F' à F. On dira que F' est le transformé de F par rapport à T. Soit S une autre transformation qui fait correspondre F" à F'. Quand F est donné, F" est alors déterminé par une certaine transformation qui est dite le produit de T par S. On démontre qu'un « groupe » renferme les produits de puissances quelconques des transformations qui y figurent. On voit alors que « lorsque les transformations effectuées sur les éléments d'un ensemble forment un « groupe », il existe, entre les éléments de cet ensemble, déclarés alors « homologues », une relation symétrique et transitive, c'est-à-dire un ou plusieurs éléments communs dont on peut former le concept abstrait. Ces éléments communs s'appellent les « invariants » d'une figure par rapport au groupe de transformations considéré. Ce sont les propriétés et les relations d'une figure non-altérées par les transformations du groupe » (6). Or, tout groupe est caractérisé par ses invariants. « On peut alors envisager un groupe comme formé de toutes les opérations, combinées entre elles

---

L. Rougier : « La philosophie géométrique de H. Poincaré », p. 65. et suivantes.

(4) **Louis Rougier.** « La philosophie géométrique d'Henri Poincaré », p. 65.

(5) **L. Rougier.** Même ouvrage, p. 62.

(6) **L. Rougier.** Idem, p. 65

de toutes les manières possible, qui respectent certaines propriétés ou relations des objets auxquels on les applique. La loi de composition des opérations du groupe est ce qu'on appelle sa « structure » (7).

Cela dit, dire qu'il y a plusieurs géométries possibles, plus exactement, plusieurs « métriques » possibles, c'est dire qu'il existe plusieurs « groupes » possibles, de structure différente, formant chacun un tout, aussi cohérent les uns que les autres. On peut se proposer de poser les axiomes qui servent à caractériser en commun ces différents groupes. C'est ce qu'a fait Sophus Lie. Les axiomes en question sont au nombre de quatre. Ils expriment les propriétés communes aux « groupes métriques », aussi bien à la métrique ordinaire, celle d'Euclide, qu'à celles de Riemann et de Lobatchewski. Mais « ces propriétés ne suffisent pas à caractériser la structure des groupes métriques. Il faut, pour chacun un axiome supplémentaire » (8). Or, si on prend, comme axiome supplémentaire celui qui revient à dire que « le groupe des translations est un sous-groupe invariant du groupe des déplacements » (9), c'est-à-dire que le groupe des translations comprend une partie des transformations de celui, plus vaste, des déplacements, et qu'il est transformé en lui-même par chacune des transformations de ce groupe, alors, on choisit la métrique euclidienne, de préférence aux deux autres. (Il a été montré que, si l'on admet les quatre axiomes fondamentaux de la « géométrie générale », c'est-à-dire les axiomes qui déterminent « tous les types possibles de déplacements cinématiques » (10), ces trois métriques, — auxquelles correspondent trois groupes distincts suivant la façon dont on définit la distance de deux points, — sont les seules possibles).

Mais ces trois métriques ne sont pas en contradiction l'une avec l'autre ; loin de là. Il existe, des métriques non-euclidiennes, des interprétations euclidiennes différentes, et équivalentes. On peut « définir à partir de la géométrie ordinaire,

(7) **L. Rougier.** Idem, p. 67.
(8) **Louis Rougier.** « La philosophie géométrique de Henri Poincaré », p. 71.
(9) **Louis Rougier.** Même ouvrage, p. 73.
(10) **Louis Rougier.** Idem, p. 68.

certains groupes de transformations (groupe conservant les angles et une sphère fixe, groupe conservant les droites et une sphère fixe...), et montrer que, grâce à un changement de vocabulaire approprié, ces groupes sont isomorphes aux groupes non-euclidiens » (11) — c'est-à-dire, qu'ils ont même structure. Ces trois métriques sont, au point de vue logique, également cohérentes. Ce ne sont que des raisons extra-logiques qui peuvent donc, nous décider en faveur de l'une plutôt que de l'autre. « La géométrie, écrit Henri Poincaré, n'est autre chose que l'étude d'un groupe, et, en ce sens, on pourrait dire que la vérité géométrique d'Euclide n'est pas incompatible avec celle de la géométrie de Lobatchewski, puisque l'existence d'un groupe n'est pas incompatible avec celle d'un autre groupe. Nous avons choisi, parmi tous les groupes possibles, un groupe particulier pour y rapporter les phénomènes physiques, comme nous choisissons trois axes de coordonnées pour y rapporter une figure géométrique » (12). Parmi ces raisons extra logiques, déterminantes de notre choix, la toute première est la « simplicité du groupe choisi » (13).

Mais qu'est-ce qui fait cette simplicité ? C'est justement le fait que, pour caractériser ce groupe particulier, nous avons, aux propriétés qu'il a en commun avec les deux autres groupes métriques de Riemann et de Lobatchewski, ajouté celle d'avoir « un sous-groupe invariant dont tous les changements sont interchangeables, et qui est formé de toutes les translation » (14), ce qui, pour les groupes métriques non euclidiens n'est pas vrai. Or, nous avons vu qu'un certain groupe est formé de toutes les opérations qui respectent certaines propriétés et relations des objets auxquels on les applique » (15), et que le sous-groupe d'un groupe, est un groupe qui comprend une partie de ses transformations (16). Dans ces condi-

(11) **Louis Rougier.** Idem, p. 103.

(12) **Henri Poincaré.** « Bulletin de la Société Mathématique de France », 2 novembre 1887, pp. 214-215.

(13) **Louis Rougier.** « La philosophie mathématique de Henri Poincaré », p. 118.

(14) **Louis Rougier.** Même ouvrage, p. 174.

(15) **Louis Rougier.** « La philosophie géométrique de Henri Poincaré », p. 72.

(16) **Louis Rougier.** Même ouvrage, p. 72.

tions, posséder un sous-groupe dont tous les changements sont interchangeables, c'est-à-dire, dont toutes les transformations, toutes les opérations, — puisque, toute transformation est, comme nous l'avons vu, une opération de correspondance, — sont équivalentes, cela revient, en définitive, pour un groupe, à comprendre *moins d'opérations différentes* qu'un autre groupe, auquel la possession d'un tel sous-groupe ferait défaut. Or, quand Henri Poincaré parle de la géométrie d'Euclide, avons-nous dit, et qu'il la déclare plus simple qu'une autre, il n'envisage nullement des axiomes fondamentaux considérés, soit seuls, soit solidairement aux principes logiques qu'ils pourraient présupposer, mais le tout organique constitué par le groupe que ces axiomes définissent, c'est-à-dire, un certain réseau de transformations, un certain ensemble d'opérations de correspondance, — opérations abstraites, certes, mais représentatives, tout de même, d'opérations que l'on pourrait réellement exécuter, — dont chacune, en tant qu'elle est différente des autres, compte pour « une », est, « un élément » du tout. Cette « théorie » mathématique, qu'est la métrique d'Euclide, telle que, jusqu'à maintenant, elle nous est apparue, est la plus simple, parce que, entre les théories possibles, de même nature, pouvant, scientifiquement servir au même usage, elle est celle qui comporte le moins d'éléments. Nous aurons à revenir là-dessus.

Passons maintenant à la justification que H. Poincaré fournit de notre préférence accordée au nombre 3, comme nombre des dimensions à attribuer à l'espace, c'est-à-dire, au « point » comme élément de l'espace.

On comprend, en général, sous le nom de géométrie euclidienne, la « théorie » du groupe dont il vient d'être parlé quant à sa structure, alors, justement que l'élément désigné de l'espace est le point. Nous séparons volontairement la question du nombre de dimensions à attribuer à l'espace, de celle de la structure du groupe métrique, parce qu'elles sont de nature différente, que leur réunion peut prêter à des confusions, et, qu'enfin, H. Poincaré les a séparées, comme on peut le voir dans les études où il traite, soit de l'une, soit de l'autre, et comme M. Louis Rougier, dans son commentaire si clair, l'a mis en évidence. En effet, « le postulat d'Euclide se rapporte à la forme du groupe euclidien, c'est-à-

dire, à sa structure. L'axiome des trois dimensions se rapporte à sa matière. Adopter le postulat d'Euclide, c'est adopter un certain groupe qui permet de définir les mots vides de sens : « égalité de deux distances », déplacements sans changement de forme, droites, plans. Adopter l'axiome des trois dimensions c'est choisir la matière du groupe dont la structure a été ainsi définie » (17). Or, « pour Poincaré, la forme préexiste à la matière » (18).

Dire que l'espace a trois dimensions, c'est, avons-nous déjà dit, choisir le point comme élément spatial. Si nous choisissions la droite, l'espace aurait quatre dimensions, « car il faut quatre quantités pour définir les deux projections d'une droite sur deux plans de coordonnées » (19). Tous les faits géométriques seraient également bien systématisés dans une géométrie à 4, 5... n dimensions, et Henri Poincaré a montré qu'il en serait de même des faits physiques. Les lois physiques seraient alors exactement les mêmes lois, mais elles seraient exprimées par d'autres équations. Il a insisté sur le fait que le nombre de dimensions attribuées à l'espace n'est pas une qualité « physique » de ce dernier (20). D'abord, il n'y a pas de confusion possible entre l'espace physique, sensoriel, — ou, si l'on préfère « les » espaces sensoriels ; espace tactile, espace visuel, etc., — et l'espace des mathématiciens, construit à l'occasion de nos sensations tactiles, visuelles, etc. ; ensuite, il n'est pas vrai, selon H. Poincaré, que l'on ne puisse pas se représenter intuitivement un espace à plus de trois dimensions. Il y a une Analysis situs à plus de trois dimensions et « on ne saurait la cultiver avec fruit sans de continuels appels à l'intuition. Il y a donc bien une intuition des continus à plus de trois dimensions, et si elle exige une attention plus soutenue que l'intuition géométrique ordinaire, c'est sans doute une affaire d'habitude... » (21). Mais, selon lui, l'espace à trois dimensions est le plus simple de ceux

(17) **Louis Rougier.** Idem, p. 135.
(18) **Louis Rougier.** Idem, p. 135.
(19) **Louis Rougier.** « La philosophie géométrique de Henri Poincaré », p. 98.
(20) **H. Poincaré.** Articles de « The Monist ». Dernières pensées.
(21) **H. Poincaré.** « Dernières pensées », p. 96.

que nous pourrions construire, étant donnée notre expérience, occasion d'une telle construction. Ce sont les raisons de cette simplicité qu'il s'agit maintenant d'examiner.

Pour cela, rappelons ce que dit H. Poincaré de la genèse de la notion d'espace à partir de l'élémentaire distinction, parmi les changements dont nous sommes témoins (22), de certains d'entre eux, que nous appelons des « déplacements », c'est-à-dire, des « changements externes pouvant être corrigés par des changements internes compensateurs » (23). Toutefois, au moment où l'esprit s'est rendu compte que les « déplacements » occupent une place spéciale dans l'expérience, où il a conscience de ce que sont des déplacements différents, puis, de ce que c'est que la résultante de deux déplacements consécutifs, il « ne sait pas encore la géométrie, il ne sait pas que l'espace a trois dimensions, il ne sait pas que la position d'un corps est déterminée par six quantités. Mais il commence à étudier, expérimentalement les lois suivant lesquelles se composent les déplacements. L'expérience lui apprend qu'ils se comportent à peu près comme les substitutions d'un groupe d'ordre 6 » (24). (Ce n'est pas elle qui nous donne l'idée même de groupe, qui, elle, préexiste dans l'esprit). Or l'ordre d'un groupe de transformations, soit, de permutations d'objets, est le nombre de permutations, c'est-à-dire le nombre d'opérations possibles qui sont comprises dans le groupe. C'est un élément formel du groupe. Le degré du groupe au contraire, en est un élément « matériel ». C'est le nombre d'objets permutés (25).

L'expérience suggère l'ordre du groupe des déplacements *avant* que l'esprit sache le nombre des dimensions de l'espace, parce que, c'est là une caractéristique matérielle du groupe des déplacements, et que, comme nous le rappelions,

---

(22) **H. Poincaré.** Réponse à quelques objections (dans la « Revue de Métaphysique et de Morale de 1897, p. 64).

(23) **Louis Rougier.** Ouvrage cité, p. 160. — « On appelle changements externes ceux qui ne dépendent pas de nous, et changements internes ceux qui sont volontaires et s'accompagnent de sensations musculaires ».

(24) **H. Poincaré.** Réponse à quelques objections, p. 64. (Déjà cité).

(25) **L. Rougier.** Ouvrage cité, p. 170.

« pour Henri Poincaré la forme passe avant la matière » (26). Entre les groupes de même ordre, c'est-à-dire, isomorphes, que nous pouvons construire, groupes qui seraient susceptibles de servir de base à l'étude des mêmes lois des déplacements, nous en choisirons un, en raison des qualités matérielles qu'il présente. C'est en cela que consiste la détermination du nombre de dimensions de l'espace.

Mais cette idée de degré, caractère « matériel » du groupe, par opposition à sa « forme », représentée par son « ordre » n'est pas claire. Pour nous la préciser dans le cas dont il s'agit, il faut nous rappeler que le groupe des déplacements est un groupe continu (27), et que « l'objet des opérations de ces groupes, — des groupes « continus », c'est-à-dire, — est un ensemble de variables continues x_1, x_2, x_3, x , appelées coordonnées. Toute opération effectuée sur les variables peut être considérée comme faisant partie d'un lacet (28) analogue au lacet rotatif, et comme un multiple, d'un ordre très élevé, d'une opération infinitésimale appartenant à ce lacet. Chaque opération infinitésimale du groupe peut alors être décomposée en K autres opérations élémentaires appartenant à K lacets donnés. Le nombre n des coordonnées est le degré ; le nombre K des composantes d'une opération infinitésimale est l'ordre d'un groupe continu » (29). Nous avons vu que l'ordre du groupe des déplacements est, pour des raisons qui, selon Henri Poincaré, tiennent à l'expérience qui nous suggère l'expression de notre pensée géométrique, six, — c'est-à-dire que « un déplacement infinitésimal peut

---

(26) **Louis Rougier.** « La philosophie géométrique de Henri Poincaré », p. 135.

(27) **Louis Rougier.** Même ouvrage, p. 68.

(28) **Louis Rougier.** Idem, p. 165 : « La première propriété du groupe des déplacements est d'être continu. Un déplacement A peut être répété 1, 2, 3... n fois. On a ainsi différents déplacements qui peuvent être considérés comme multiples du premier. Les multiples du même déplacement A forment un groupe, car la succession de deux de ces multiples est encore un multiple de A. Tous ces multiples sont interchangeables, ce qui veut dire qu'il est indifférent que nous répétions A, 1° 3 fois, et 2° 4 fois, ou vice-versa. C'est ce que les mathématiciens traduisent en disant que le groupe formé par les multiples de A est un lacet. Ce groupe des multiples de A est un sous-groupe du groupe total des déplacements ».

(29) **Louis Rougier.** Idem, p. 171.

être décomposé en 6 mouvements indépendants » (30). C'est en déterminant le *degré* de ce groupe, — c'est-à-dire le nombre n des coordonnées, objets des opérations de ce groupe, — que nous touchons à la question des dimensions de l'espace. En effet, « considérons les différentes transformations du même sous-groupe. Elles sont infinies en nombre et peuvent former une simple, double, triple... infinité continue. A chacune de ces transformations correspondra schématiquement un certain élément. Nous obtiendrons ainsi une simple, double, triple... infinité d'éléments, et le degré de notre groupe sera 1, 2, 3... Supposons que nous choisissions les différentes transformations d'un sous-groupe rotatif (31). La matière de notre groupe sera constituée par une triple infinité d'éléments et son degré sera 3. Nous aurons ainsi choisi le point comme élément de l'espace et donné trois dimensions à l'espace. Supposons que nous choisissons les différentes transformations d'un sous-groupe hélicoïdal. La matière de notre groupe sera composée d'une quadruple infinité d'éléments, et nous aurons donné à l'espace quatre dimensions. Supposons enfin que nous choisissons les différentes transformations d'un lacet rotatif. Le degré de notre groupe sera 5. Nous aurons choisi comme élément de l'espace la figure formée par une ligne droite et un point sur cette droite, et nous aurons donné cinq dimensions à l'espace » (32). Les raisons que nous avons de choisir la première de ces conventions sont, d'abord, — entre autres, — qu'elle est « mathématiquement la plus simple puisqu'elle consiste à attribuer à l'espace le *moins grand nombre de dimensions* » (33).

C'est ce qu'expose lui-même Henri Poincaré, en termes un peu différents, — et plus longuement, — dans les articles que nous avons cités (34). Et, dit-il, « on choisit G_n — (c'est

---

(30) **Louis Rougier.** Idem, p. 171.

(31) **Louis Rougier.** Idem, p. 169 : « Parmi les déplacements nous sommes conduits à distinguer ceux qui conservent un certain groupe de sensations fixes (rotations autour d'un point fixe). Ils forment un sous-groupe que l'on appelle sous-groupe rotatif. »

(32) **Louis Rougier.** « La Philosophie géométrique de H. Poincaré », p. 173.

(33) **Louis Rougier.** Même ouvrage, p. 173.

(34) **Henri Poincaré.** « Revue de Métaphysique et de Morale », 1897. Réponse à quelques critiques.

ainsi qu'il dénomme le groupe qui correspond à la premiere convention dont nous venons de parler), — comme groupe normal, parce qu'on trouve cela plus commode et cela pour deux sortes de raisons » (35) : pour des raisons d'ordre expérimental, — dans lesquelles nous n'avons pas ici à entrer, — mais, en tout premier lieu, « pour des raisons d'ordre rationnel, et, par exemple, parce que, de tous les groupes isomorphes à G, — (c'est-à-dire, de tous les groupes formellement équivalents, de même ordre, entre lesquels nous pouvons choisir sans renoncer à la « structure » à laquelle, plus haut, nous nous sommes arrêtés), — c'est le groupe G_1 qui donne à l'espace le moins grand nombre de dimensions » (36). Et H. Poincaré d'ajouter : « C'est *donc* G_1 qui est *le plus simple* ».

Nous avons dit que la question du nombre de dimensions de l'espace regarde la matière du groupe des déplacements, l'objet des opérations de ce groupe et non pas ces opérations elles-mêmes. Or, par quoi est constitué l'objet de ces opérations ? Par « certaines variables continues x_1, x_2, x_3, x_n, appelées coordonnées », dont le nombre est le degré du groupe (37), par une certaine infinité, simple, double, triple, etc... d'éléments, (simple, double, triple..., suivant le nombre des « coordonnées » sus-dites), qui correspond à l'infinité des transformations du groupe. Et nous voyons que le maximum de simplicité a été réalisé là où le nombre des coordonnées est le plus petit, là où l'infinité continue des éléments est répartie suivant le schéma où se dessine le plus petit nombre de directions. Ce sont, en réalité ces directions, — qui font que le continu est simple, double, triple..., n...iple, — ces « coordonnées », objets des opérations du groupe, que l'on doit considérer comme les « éléments » de la texture matérielle de celui-ci. Et, ici, comme dans la discussion précédente qui portait, elle, sur la «forme» du groupe, nous voyons que, pour Henri Poincaré, le groupe mathématiquement le plus simple, n'est autre que le groupe qui admet le *moins d'éléments*. Certes, ici, il s'agit d'éléments matériels, de don-

(35) **Henri Poincaré.** « Revue de Métaphysique et de Morale », 1897. Réponses à quelques critiques, p. 67.

(36) **Henri Poincaré.** Idem, p. 67.

(37) **Louis Rougier.** Ouvrage cité, p. 175.

nées sur lesquelles s'exercent les opérations qui constituent le groupe même, et non d'éléments « formels », non de ces opérations, mais n'oublions pas, aussi, qu'il s'agit du groupe le plus simple quant à sa matière, parmi les groupes isomorphes, c'est-à-dire, de même forme.

Les deux questions ont été séparées, mais dans les deux cas, le même principe de reconnaissance de la simplicité mathématique a été, semble-t-il, appliqué. Et ce principe consiste à juger la plus simple, la théorie qui comporte le moins d'éléments, — formels, matériels, quels qu'ils soient, — une fois qu'on sait à quel point de vue on se place pour étudier cette théorie, et ce qu'on veut dire en parlant de ses « éléments », du point de vue duquel on veut la juger. C'est — qu'on nous permette la comparaison, — comme si nous avions à préciser la notion du « plus ou moins nombreux ». Le nombre s'applique à tout ce qui se peut dénombrer, c'est-à-dire, à des choses fort diverses, abstraites aussi bien que concrètes. Néanmoins la « notion de nombre », et par suite du « plus ou moins nombreux », est la même, quelle que soit la nature des choses dénombrées.

Nous ne passerons pas en revue d'autres théories mathématiques, pour la raison que Henri Poincaré a étayé sa philosophie des mathématiques, sa doctrine du caractère libre et décisoire de ces dernières basé sur la préférence accordée naturellement aux théories « les plus simples » (en même temps que les plus commodes), sur ces deux seules, que nous venons de rappeler : celle qu'évoque le postulat d'Euclide, (ou, plutôt, comme l'a dit Louis Rougier, qu'entraîne l'acceptation d'un certain nombre d'axiomes euclidiens, posés en même temps), et qui concerne la structure, la « forme » du groupe des déplacements dont l'étude constitue la géométrie métrique tout entière, et celle qui a à sa base l'affirmation d'un espace à trois dimensions, c'est-à-dire, celle qui concerne la matière du dit groupe. Ce sont ces deux théories superposées que l'on a d'ordinaire en vue quand on parle de la « géométrie » d'Euclide, c'est-à-dire de la théorie du groupe métrique mathématiquement le plus simple (de celui qui comprend le moins d'éléments-opérations), qui a pour objet la « matière » mathématiquement la plus simple (celle qui comporte le moins d'« éléments » possibles, au second sens que nous avons donné à ce mot).

Et H. Poincaré a, semble-t-il, exposé son point de vue de façon à laisser entendre ce qu'il veut dire par « simplicité » suffisamment bien, pour que l'on soit autorisé à penser que, s'il avait examiné de près, et justifié quelqu'autre théorie mathématique — au nom des mêmes principes, car, pour lui ces principes de la préférence du plus simple jouent dans toute la science, — il aurait, à propos d'elle, conçu cette précieuse simplicité de la même manière ; à penser que, dans tous les cas, c'est, en fin de compte à un petit nombre d'éléments (formels ou matériels, opératoires ou objectifs, peu importe), qu'il l'aurait fait tenir.

Il nous reste donc maintenant à examiner ce qu'il entend par simplicité dans les démonstrations et les raisonnements. C'est, en effet, d'autant plus intéressant à savoir que (le fait que démonstrations et raisonnements font partie de ce que nous avons appelé les « enchaînements mathématiques » étant mis à part), ce rôle de facteur primordial de sélection que la simplicité joue, comme nous venons de le voir, dans le choix spontané des théories mathématiques qui sont d'un usage le plus vaste et le plus commun dans la science, se poursuit dans le choix des démonstrations les plus propres à mettre en évidence une même vérité mathématique, un même théorème, et des raisonnements en général, les plus propres à nous conduire d'un ensemble de données à un certain ensemble de conclusions, en un mot, à constituer le corps de la résolution d'un problème. « Les mathématiciens attachent une grande importance à l'élégance de leurs méthodes et de leurs résultats, dit Henri Poincaré ; ce n'est pas là du pur dilettantisme » (38).

C'est, en effet, que l'élégance des démonstrations, comme il le montrera plus loin (39), et ailleurs, dans différentes de ses études, est étroitement liée à leur simplicité, « la satisfaction esthétique que le mathématicien en tire est liée à l'économie de pensée » (40), et, en choisissant d'instinct la démonstration la plus élégante, en n'étant pleinement tranquille que lorsqu'il sent qu'il n'existe pas de démonstration possible qui le conduise plus harmonieusement et plus rapide-

(38) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 25.
(39) **H. Poincaré.** Même ouvrage, p. 26.
(40) **H. Poincaré.** Idem, p. 26.

ment à l'évidence logique d'une nouvelle vérité mathématique, il est — comme précédemment, dans le choix de la meilleure théorie mathématique — guidé par un idéal de simplicité. Il est probable — il est même certain — qu'il n'a jamais cherché, lui, à analyser ce qu'il entend par « simple ». Henri Poincaré, lui-même, n'a examiné aucune démonstration avec l'insistance avec laquelle il est revenu, constamment, sur les « théories » précédemment passées en revue, pour nous dire qu'elle est plus ou moins simple que telle autre. La question n'en garde pas moins tout son intérêt pour le logicien et le psychologue, et sa difficulté, qui résulte du manque, chez H. Poincaré, d'une discussion suivie et systématique, n'entame en rien (au contraire !) son importance, tant au point de vue de la compréhension dela pensée du géomètre-philosophe, qu'à celui d'une contribution à apporter à la philosophie des mathématiques, en général.

Pour comprendre ce que c'est, pour H. Poincaré, qu'une démonstration mathématique « simple », il faut, semble-t-il, essayer d'abord de s'assurer de ce que c'est, pour lui, qu'une démonstration mathématique, en tant que telle, en général. Nous avions dit, dans la partie précédente de notre étude, que pour L. Couturat, c'est la réduction progressive d'une proposition inconnue (ou acceptée jusqu'alors arbitrairement) à la proposition connue de laquelle on part. Et nous avons, sur cette base, tâché d'édifier l'idée que se fait le logisticien de la démonstration « simple », en tenant compte de ce qu'il entend probablement par réduction progressive, étant données ses idées sur la nature des mathématiques. Ici, une définition de la démonstration, aussi précise et aussi évocative que celle de Couturat, fait défaut. Mais il paraît certain que H. Poincaré n'accepterait pas de ne voir dans la démonstration mathématique qu'une « réduction » d'une proposition (quelle qu'elle soit) à une proposition connue. Il insiste trop sur le fait que dans les conclusions d'un raisonnement on retrouve autre chose que les axiomes qui ont servi à l'asseoir et à le mener à bien ; la généralisation d'une proposition, en laquelle tant et tant de démonstrations mathématiques consistent (41), lui apparaît trop comme une création véritable,

(41) **H. Poincaré.** « La Science et l'Hypothèse », p. 11.

pour que l'on puisse songer à admettre que la définition de L. Couturat pourrait bien, au fond, être la sienne, même à la condition qu'elle soit interprétée — cela s'entend — par lui, d'une manière totalement différente de celle des Logisticiens.

Mais, si une démonstration n'est pas une simple réduction d'une proposition à une autre, qu'est-elle ? Si elle est une « création », quel élément nouveau ajoute-t-elle aux données anciennes sur lesquelles elle s'édifie ? Là, est la question.

H. Poincaré s'est volontairement arrêté à l'analyse des démonstrations les plus élémentaires — si élémentaires, qu'en général, les traités d'arithmétique les passent sous silence, — pour essayer, par elles, de saisir la nature intime, typique, du raisonnement mathématique, le « procédé », toujours le même, qui doit, selon lui, les caractériser toutes, en tant que démonstrations. Et l'on sait la conclusion à laquelle il a abouti : « Le procédé, dit-il, est uniforme, et on le retrouve à chaque pas. Ce procédé est la démonstration par récurrence. On établit d'abord un théorème pour $n = 1$; on montre ensuite que, s'il est vrai de $n - 1$, il est vrai de n, et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers »... « A chaque pas, si l'on y regarde bien, on retrouve ce mode de raisonnement, soit sous la forme simple que nous lui avons donnée, soit sous une forme plus ou moins modifiée » (42). C'est ce raisonnement que Poincaré appelle « le raisonnement mathématique par excellence. » Sa caractéristique est de contenir, « condensés, pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes » (43), disposés, comme dit l'auteur en termes pittoresques, « en cascade », la conclusion de chacun d'eux, servant de mineure au suivant, et toutes les majeures pouvant être ramenées à ce principe : si le théorème est vrai pour $n - 1$, il l'est pour n.

Cette conception de l'essence du raisonnement mathématique peut paraître, dans une certaine mesure, en contradiction avec cette volonté de H. Poincaré de montrer que les mathématiques sont autre chose qu'une discipline purement analytique ; avec son effort, très marqué pourtant, de séparer syllogistique de déduction. Car il semble que le nombre infini des syllogismes auxquels il est fait allusion, n'empêche

(42) **H. Poincaré.** Même ouvrage, p. 19.
(43) **H. Poincaré.** Même ouvrage, p. 20.

pas que le raisonnement ne soit, en fin de compte, qu'une cascade « de syllogismes », et que, par là, la théorie de H. Poincaré se montre peu neuve. C'est ce que semble penser M. E. Goblot qui n'admet pas que le fameux raisonnement par récurrence soit autre chose qu'« une manière spéciale de construire la conséquence avec l'hypothèse » (44), toute démonstration étant, pour lui, — celles qui s'appuient sur le raisonnement par récurrence, et les autres (car il y en a d'autres, selon lui, en mathématiques, et de vraies) — la construction de la conséquence d'un jugement hypothétique — en l'occurence de la conséquence de la « proposition » ou plutôt, du « jugement » à démontrer, qui est toujours un jugement hypothétique, — à partir de son hypothèse (45)). Mais ce n'est pas le lieu de nous occuper des difficultés que peut entraîner, au point de vue logique, la théorie de la démonstration ramenée au raisonnement par récurrence seul, ramené lui-même à une infinité de syllogismes, telle qu'elle est exposée chez Henri Poincaré. Qu'il nous suffise de retenir que, pour lui, comme pour M. E. Goblot, « l'essence de la démonstration consiste à étendre à une série infinie de cas, ce qui se vérifie pour un seul cas singulier » (46). Cela resterait vrai, même si le raisonnement par récurrence n'était pas le raisonnement mathématique par excellence, car la proposition à démontrer, s'applique forcément, du moment qu'elle exprime un jugement hypothétique, à une infinité de cas.

Construction d'une conséquence à partir d'une hypothèse, extension à une infinité de cas de ce qui est vrai dans un cas ; telle serait donc l'essentiel de la nature d'une démonstration mathématique. Mais comment se fait-elle, cette construction ? — nous ne disons plus cette « réduction » d'une proposition à une autre, de la conséquence susdite à l'hypothèse. Elle se fait, certes, par étapes. Il n'y a qu'à examiner n'importe quelle démonstration pour s'en rendre compte. La pensée mathématique qui s'efforce d'établir la vérité d'une proposition nouvelle sur la base de ce qu'elle connaît déjà, opère forcément discursivement. Chaque « étape » est constitué par l'application d'une règle. C'est ce que H. Poincaré semble ad-

(44) **E. Goblot.** « Traité de Logique », p. 276.
(45) **E. Goblot.** « Traité de Logique », p. 272.
(46) **E. Goblot.** « Traité de Logique », p. 258.

mettre. « Examinons, dit-il, la chose d'un peu plus près » — dans son intention, qu'il vient d'exprimer, de montrer le parallélisme du raisonnement mathématique, constructif, généralisateur, avec le raisonnement inductif propre aux sciences de la nature ; — « pour démontrer l'égalité :

$$a + 2 = 2 + a \qquad (1)$$

il nous suffit d'appliquer deux fois la règle

$$a + 1 = 1 + a$$

et d'écrire

$$a + 2 = a + 1 + 1 = 1 + a + 1 = 1 + 1 + a = 2 + a \qquad (2)$$

L'égalité (2) ainsi déduite par voie purement analytique de l'égalité (1) n'en est pas, cependant un simple cas particulier : elle est autre chose. On ne peut donc même pas dire que, dans la partie réellement analytique et déductive des raisonnements mathématiques, on procède du général au particulier, au sens ordinaire du mot (47). Les deux membres de l'égalité (2) sont simplement des combinaisons plus compliquées que les membres de l'égalité (1) et l'analyse ne sert qu'à séparer les éléments qui entrent dans ces combinaisons et à en étudier les rapports. Les mathématiciens procèdent donc par construction. Ils construisent des combinaisons, de *plus en plus compliquées*. Revenant ensuite par l'analyse de ces combinaisons, de ces ensembles, pour ainsi dire, à leurs éléments primitifs, ils aperçoivent les rapports de ces éléments et en déduisent les rapports des ensembles eux-mêmes. C'est là une marche purement analytique, mais ce n'est pourtant pas une marche du général au particulier, car les ensembles ne sauraient, évidemment, être regardés comme plus particuliers que leurs éléments » (48).

Dans la démonstration type, par récurrence, qui établit qu'une certaine propriété est vraie pour tous les nombres, par l'application, de proche en proche, de la règle du syllogisme, il y aurait, apparemment, une infinité d'étapes — en effet, il y a là, logiquement, une infinité d'opérations (sous-entendues). Est-ce bien ainsi que H. Poincaré envisage la question ? Si oui, son point de vue différerait, en somme, assez peu, de celui de Couturat, quelque paradoxal que cela pa-

(47) M. E. Goblot aurait dit : « du général au « singulier ».
(48) **H. Poincaré.** « La Science et l'Hypothèse », pp. 25-26.

raisse. Mais n'essayons pas, pour le moment, d'éclaircir cette question, et passons à ce que l'auteur de « La Science et l'Hypothèse », entend par une démonstration « simple ». Peut-être ceci jettera-t-il un certain jour sur cela, en attendant qu'un retour à l'examen de ce que disent M. E. Goblot et les autres théoriciens que nous avons appelé, par commodité, du nom général de « pragmatistes », nous aide à formuler sur la question un jugement dont la probabilité de justesse sera un peu plus grande.

H. Poincaré ne s'est, nulle part, arrêté à analyser l'idée de simplicité d'une démonstration, mais il en a plus d'une fois vanté les avantages. Il a toujours laissé clairement comprendre, quand il ne l'a pas dit carrément, que le mathématicien préfère d'instinct les démonstrations simples, comme il préfère les théories simples et les définitions simples. « C'est à l'économie de pensée que l'on doit viser » (49), dit-il. Mais de quelle pensée s'agit-il ? De cette pensée logique, impersonnelle et sous-entendue, de cette sorte de pensée en soi dont nous avons parlé dans la partie précédente, à propos des théories logistiques ? ou de la pensée vivante, comme tout ce que nous avons dit plus haut de la manière « pragmatiste » de concevoir les mathématiques, nous inciterait plutôt à le croire ? Une notion, — extrêmement importante pour H. Poincaré lui-même, si, chez les philosophes que nous avons rangés à ses côtés elle joue un rôle moindre, — peut, et doit, semble-t-il, nous servir de guide, dans l'examen de ce problème. C'est la notion d'élégance, de beauté d'une démonstration, qui est liée intimément, dans l'esprit du grand géomètre, à celle de « simplicité », et qui a, même, pour ainsi dire le pas sur elle. Car, ce n'est pas parce qu'elles entraînent une « économie de pensée », parce qu'elles nous paraissent plus simples, que nous recherchons, en mathématique (comme dans les autres sciences où l'esprit créateur, artistique au sens fort du mot, garde une grande place), les démonstrations les plus harmonieuses, les plus visiblement ordonnées, les plus belles, en un mot : c'est au contraire « parce que la simplicité est belle »(50) que nous recherchons de préférence, instinctivement — et cela d'autant plus que nous nous rap-

(49) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 28.
(50) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 16.

prochons davantage du vrai « mathématicien » — et les « faits » et les « combinaisons » simples ; cette économie d'effort, qui est d'après Mach la tendance constante de la science, est une source de beauté en même temps qu'un avantage pratique. Les édifices que nous admirons le plus sont — (au sens figuré comme au sens propre) — ceux où l'architecte a su proportionner les moyens au but, et où les colonnes «semblent porter sans effort et allègrement le poids qu'on leur a imposé, comme les gracieuses cariatides de l'Erechthéion » (51). Si donc, la simplicité mathématique est, pour H. Poincaré (comme toute simplicité, semble-t-il), liée, subordonnée à l'élégance de ce qui est « simple », une question se pose d'elle-même : qu'est-ce, pour lui, que l'élégance en mathématique ? L'élégance, dira-t-on, est une notion esthétique et par conséquent très difficile à définir. C'est le nom par lequel on caractérise une certaine impression de beauté, quelque chose, semble-t-il donc, de subjectif, essentiellement. On peut se demander si la même démonstration paraîtra aussi « élégante » à tous les esprits, alors que tous sont d'accord pour la déclarer logiquement irréprochable. Mais là n'est pas la question. H. Poincaré, avons-nous dit déjà, se place contrairement aux Logisticiens sur le terrain psychologique. C'est une certaine « sensibilité » spéciale, qui guide le mathématicien, nous dit-il, dans sa recherche (52), qui lui fait entrevoir les constructions les plus avantageuses qui sont à la fois les plus simples et les plus belles — les plus simples parce que les plus belles, ou vice-versa, peu importe. Ce qui, dès lors, nous intéresse, c'est de connaître ce qui nous donne le sentiment de l'élégance, dans une solution, dans une démonstration, dans un raisonnement en général. Et si nous parvenons à analyser la pensée de l'auteur sur ce point, nous risquerons de mieux comprendre ce qu'est, pour lui, une démonstration « simple ».

Ce qui nous donne le sentiment de l'élégance, dit H. Poincaré, « c'est l'harmonie des diverses parties — (de la démonstration) — leur symétrie, leur heureux balancement : c'est, en un mot, tout ce qui y met de l'ordre, tout ce qui leur donne de l'unité, ce qui nous permet, par conséquent

(51) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 16.
(52) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 57.

d'y voir clair, et d'en comprendre l'ensemble en même temps que les détails » (53). Et, un peu plus loin : « le sentiment de l'élégance mathématique n'est autre chose que la satisfaction due à je ne sais quelle adaptation entre la solution que l'on vient de découvrir et les besoins de notre esprit, et c'est à cause de cette adaptation même que cette solution peut être pour nous un instrument. Cette satisfaction esthétique est par suite liée à l'économie de pensée » (54) — cette dernière étant l'une des exigences les plus impérieuses de l'esprit, et surtout de l'esprit scientifique.

Essayons donc de comprendre. Qu'est-ce, d'abord, que H. Poincaré appelle « les diverses parties » d'une démonstration ? Sont-ce ces opérations dont nous parlions plus haut, ces « étapes » dans l'exercice de l'activité créatrice de l'esprit, à chacune desquelles l'application rigoureuse d'une règle est, non pas sous-entendue, mais enregistrée par le raisonneur lui-même comme un point acquis, comme un progrès ? Est-ce, plutôt, certains groupes de telles opérations, constituant, chacun, comme une articulation dans la chaîne continue, coupée de gros anneaux, qui mène de la proposition de laquelle on part, à celle à laquelle on aboutit ; comme un tournant brusque, ou, si l'on veut, un arrêt, sur le chemin continu suivi par l'esprit, arrêt où il prendrait conscience du travail accompli ; ou encore, peut-être plus exactement, comme une des pièces maîtresses de cette « construction » logique et intuitive qu'est une démonstration, pièce indispensable qui figurerait, seule avec celles qui sont aussi importante qu'elle et au même titre, dans le schéma de la démonstration ; ensemble formant un bloc au sein duquel les détails — en l'espèce, ces opérations élémentaires individuelles que nous évoquions tout à l'heure — disparaîtraient, non seulement aux yeux de celui qui considère la démonstration du dehors (à la manière du profane qui considère une œuvre d'art) mais encore aux yeux de celui qui en pourrait pénétrer l'intime logique, pour ainsi dire organique ?

Pour répondre à cette question, il nous faut, semble-t-il, ne pas perdre de vue le « pragmatisme » de H. Poincaré, cette

(53) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 26
(54) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 27.

attitude qui l'oppose si nettement à tous les mathématiciens qui se rattachent à l'école envisagée dans la partie précédente de notre étude, et que l'on peut évoquer, sinon caractériser, par le rappel du fait que, selon lui, « il n'y a pas d'épistémologie indépendante de la psychologie ». Cela étant, ce n'est pas dans un effort vers une logique autant que possible impersonnelle, mais dans un essai de saisir la psychologie de la démonstration, que nous pouvons espérer nous rendre compte de ce que sont ces « parties » dont la symétrie et l'heureux balancement caractérisent, pour lui, une démonstration « simple ».

Nous pouvons être tentés de penser qu'il y a des démonstrations si courtes que, pour elles, la question de la signification des « parties » ne se pose pas. Si une démonstration ne comporte que trois ou quatre actes de la pensée raisonnante par lesquels une règle est appliqués, qu'avons-nous besoin de disputer sur ce qu'on entend par ses « parties », semble-t-il ? N'a-t-elle pas tout naturellement autant de parties qu'elle comporte d'étapes, et, est-il bien nécessaire, si l'on fait abstraction de toute logique impersonnelle comme la concevrait un Couturat, pour ne s'occuper que du raisonnement vivant tel qu'il se présente, de chercher à classer ces étapes en groupes différents, introduisant ainsi, sans doute, dans l'unité de la démonstration, des distinctions qui la brisent inutilement, et que, peut-être, le raisonneur déclarerait factices ? Mais il faut reconnaître que le nombre des étapes n'est pas toujours facile à déterminer, et que, quelquefois, celui que l'on serait hâtivement tenté d'assigner, ne correspond pas au nombre de « parties » que désignerait H. Poincaré, même quand il s'agit d'une démonstration courte. A titre d'exemple, essayons d'analyser la très courte démonstration, rappelée par H. Poincaré, que nous avons reproduite un peu plus haut (55). Cela nous éclairera sur l'ambiguïté de ces dites « parties » et contribuera à en préciser la notion chez notre auteur.

La dite démonstration consiste, on s'en rappelle, en la « construction » de l'égalité à démontrer ($a + 2 = 2 + a$), à l'aide de l'application, deux fois de suite, de l'égalité déjà connue ($a + 1 = 1 + a$), (prise comme règle, comme le dirait M. E. Goblot), et, de l'égalité sous-entendue : $2 = 1 + 1$,

(55) Voir plus haut, p. 259.

sur laquelle l'esprit ne s'appuie pas moins que sur la précédente. C'est grâce à cette dernière que l'on écrit :

$$a + 2 = (a + 1) + 1.$$

De là, applicant cette vérité que $a + 1 = 1 + a$, on passe à l'égalité suivante, qui constitue un pas de plus :

$$(a + 1) + 1 = 1 + (a + 1),$$

puis à la suivante, autre pas de plus,

$$1 + (a + 1) = 1 + (1 + a).$$

Mais, comme on sait que $1 + 1 = 2$, tout comme $2 = 1 + 1$, on comprend que, le dernier membre de la précédente égalité $1 + (1 + a)$, est équivalente à $2 + a$. Ce qui constitue encore un pas de plus, et un pas définitif, puisque, ainsi, on est enfin parvenu, par une série d'égalités, dont le passage de chacune à la suivante constitue, semble-t-il, une « étape » et par suite une « partie » de la démonstration, à montrer ce que l'on voulait mettre en évidence, à savoir que :

$$a + 2 = 2 + a.$$

Il y a là un si petit nombre d'actes de l'esprit appliquant une règle, actes dont chacun, comme nous venons de le voir, réalise un progrès réel dans la marche de la pensée, un nouveau bloc important apporté à la « construction », que, si, logiquement, il est possible de les grouper en deux catégories par exemple, et de dire qu'il y a : 1° une « partie » de la démonstration qui consiste à appliquer la vérité $2 = 1 + 1$ au cas singulier $a + 2$, et à dire que $a + 2 = a + 1 + 1$, par conséquent ; 2° une partie qui consiste à appliquer la règle $a + 1 = 1 + a$ (quel que soit a), une première fois pour passer de $a + 1 + 1$ à $1 + a + 1$, et une seconde fois pour passer de $1 + a + 1$ à $1 + 1 + a$; 3° enfin, une partie qui consiste, par l'application de la vérité $1 + 1 = 2$, à passer de $(1 + 1 + a)$ à $(2 + a)$; si, disons-nous, « logiquement », cela se défend, « psychologiquement », de telles subdivisions paraissent peu naturelles. Il y a là, semble-t-il, tout bonnement, quatre actes successifs de l'esprit discursif, donc quatre parties. Mais H. Poincaré est-il de cet avis ? Et sinon, pourquoi ? C'est cela qui est instructif pour qui veut saisir sa pensée.

Il ne semble, lui, d'après le texte qui accompagne et com-

mente cette courte démonstration, ne voir en celle-ci qu'une double appliquation de la règle

$$a + 1 = 1 + a$$

L'égalité $2=1+1$ n'entre-t-elle donc pas en jeu ? Son rôle dans la démonstration n'est-il pas important ? En toute rigueur, elle y est appliquée. Logiquement, son rôle est essentiel. Sans elle la démonstration ne pourrait ni se clore, ni même s'amorcer. Cela est évident. Pourtant, elle n'a, apparemment, pas retenu l'attention du mathématicien, logicien, mais avant tout psychologue. La rigueur, certes, est nécessaire en mathématique. H. Poincaré écrit quelque part qu'« elle n'est pas tout » mais que « sans elle, il n'y a rien ». Tout de même c'est l'intuition qui guide la mathématicien ; ce sont les fluctuations, peu définies, mais parfois très nettes de cette « sensibilité spéciale » dont parle ailleurs H. Poincaré, qui sous-tendent pour ainsi dire un raisonnement, long ou court, qui, pour celui qui se place du dedans pour examiner les choses, et non du dehors, en forment comme les pièces essentielles du squelette, pièces qui, fussent-elles seules, et dépouillées, suffiraient encore à le caractériser, alors que tout ce qui les entoure, et qui, de prime abord, se voit mieux qu'elles, sans elles, n'est rien. C'est, sans doute, en tenant compte de cela que H. Poincaré a parlé de la démonstration que nous rappelions.

Le mathématicien a l'impression qu'il a fait un pas, quand il a conscience d'avoir appliqué une règle, d'avoir fait usage d'une vérité connue pour l'avancement de sa preuve ; quand il a dit, ou plutôt quand il a senti : «puisque ceci est vrai, donc on peut écrire cela...», et que « cela » constitue pour lui, une pièce indispensable de l'édifice qu'il construit. Certes, il peut avancer, et (il avance souvent, en fait), sans cet acte de la pensée consciente, ou tout au moins du « sentiment » du pas accompli, de la position conquise ou de la « partie » ajoutée à l'édifice inachevé (on peut se servir de la comparaison que l'on voudra pour caractériser ce sentiment qui est une réalité peu saisissable à l'analyse strictement logique), dont nous parlons. Il applique comme règles des vérités déjà connues comme $1+1=2$, qui sont, pour lui, tellement élémentaires qu'il ne s'en rend même plus compte. Il faut qu'il les applique, sans quoi ses raisonnements seraient impossibles.

Entre les pièces principales de leur squelette, pour continuer notre métaphore, il manquerait alors de quoi les relier, et leur tout n'aurait plus de consistance. Mais il les applique *machinalement*. L'acte par lequel il exprime leur rapport avec sa démonstration n'arrête pas son attention comme un pas accompli, comme un élément nouveau de la preuve, et cela, même s'il l'exprime, sur le papier, par une égalité ou voire même par plusieurs égalités ou inégalités de plus. Il ne correspond pas à une fluctuation de cet obscur (et pourtant essentiel pour H. Poincaré, esthète et psychologue) — esthète parce que psychologue — « sentiment » d'unité organique, artistique, qui sous-tend toute démonstration satisfaisante (57). Il a donc beau faire partie de la démonstration, logiquement, (au même titre d'ailleurs que chacune des applications des principes les plus généraux et les plus « sous-entendus » de la pensée, qu'y ferait entrer un logisticien rigoriste) ; il n'en constitue pas, pour cela, aux yeux de H. Poincaré, semble-t-il, une « partie » — un « élément », comme nous dirons, pour conserver, en l'appliquant à autre chose, le mot qui nous a servi dans nos analyses de la partie précédente.

Il y a, pour H. Poincaré, dans la démonstration dont nous parlions, deux « parties » et deux seulement, parce que, celui qui la fait a l'impression très nette, le sentiment vivant d'avoir transformé deux fois l'expression a + 2 pour arriver, comme il le désirait, à l'expression 2 + a. En effet, l'expression a + 1 + 1, qui est déjà une transformation, une « combinaison nouvelle » de (a + 2), n'est, pour ainsi dire, pas saisi par l'intuition comme telle ; non plus que 2 + a n'est saisi comme une véritable transformation de (1 + 1 + a). Arrivé à 1 + 1 + a, le raisonnement pourrait très bien être regardé comme terminé. Il est terminé, psychologiquement, du point de vue du sentiment spécial qui le sous-tend et l'anime. De ce fait, les deux seuls actes créateurs, véritablement vivants, constitutifs, de la démonstration, sont pour H. Poincaré, semble-t-il, le passage de (a+1+1) à (1+a+1), puis le passage de (1+a+1) à (1+1+a), ce qui, à la fois, justifie le très court commentaire qu'il en donne (58), et jette sur sa pensée en général un jour plus clair, que viennent confirmer tous les passages où, au cours de ses diverses études.

(57) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », pp. 57-58.
(58) **H. Poincaré.** « La Science et l'Hypothèse », p. 25.

il est question de la part, en mathématique, d'une sensibilité particulière, mais que, sans doute ces mêmes passages n'auraient pas, à eux seuls, suffi à faire jaillir d'une manière aussi assurée.

Les « parties » d'une démonstration sont donc, pour lui, quelque chose qui relève bien plutôt de cette sensibilité spéciale au mathématicien, que d'une logique rigoureuse mais appliquée du dehors ; quelque chose qui, si l'on préfère, relève bien de la logique, mais d'une logique tout interne, d'une sorte de subtile logique de l'invention que le mathématicien, auteur de la démonstration, conçoit intuitivement, ainsi, d'ailleurs, que toute personne susceptible de refaire, en quelque sorte, le travail de l'inventeur en « suivant » son raisonnement, en un mot, de « comprendre la démonstration », au plein sens du terme. En conséquence, il est très difficile de dire si ces « parties » sont des actes individuels de l'esprit, sentis comme tels, — des applications successives de règles à un cas, constituant, chacune un progrès qu'on enregistre, — ou des groupes d'actes, logiquement distincts, mais formant un « tout », psychologiquement appréhendé dans son unité, par le mathématicien, grâce au fait que cette unité, déterminée par l'uniformité de l'effort intellectuel d'un acte à l'autre, au cours de tout le groupe, vers un seul but, en vue d'un seul « progrès » pressenti et désiré, correspond bien à une réalité. Cela est difficile à dire, parce que, semble-t-il, suivant les cas, elles sont l'un ou l'autre. Nous avions choisi à dessin une démonstration très courte dans laquelle, de ce fait même, au premier abord, il apparaissait que tous les actes de l'esprit constituant des progrès réels devaient aussi constituer des « parties ». Nous avons vu que H. Poincaré ne l'entend pas ainsi, qu'il ne retient pas ce que la démonstration comprend de raisonnement sous-entendu quoique logiquement indispensable. Chaque application (logiquement indispensable) de la règle $1+1=2$ est, nous venons de le dire, comprise, glissée dans l'une des deux parties assignées à la démonstration en question. Et nous avons vu que chacune de ces parties n'est pas, non plus, le résultat d'une classification logique des arguments utilisés, des syllogismes formulés, d'après les vérités mathématique qui leur servent d'appui ou d'après tout autre chose. Chacune n'est autre chose que le « tout » qui aboutit à une transformation inattendue et sug-

gestive pour le raisonneur, c'est-à-dire particulièrement féconde en vue du reste du raisonnement ; qui constitue, c'est-à-dire, vraiment, l'expression de l'une des intuitions qui guident peu à peu la pensée du mathématicien vers le but à atteindre.

Cette expression est ici très courte. Ailleurs, dans une autre démonstration, il pourrait arriver qu'elle fût très détaillée et articulée d'une manière complexe. Elle n'en resterait pas moins, alors, une « partie » de la démonstration, bien définie pour celui qui possède la sensibilité mathématique que H. Poincaré a mentionnée (ceux qui ne la possèdent pas ne sont pas en cause. Comment, d'après l'auteur, peuvent-ils parler d'élégance ou de simplicité dans ce domaine ?) Et, si cette démonstration comporte plusieurs parties telles que celle-là, c'est d'elles, nous est-il dit, de la qualité particulière de chacune par rapport aux autres, que dépend la plus ou moins grande élégance de l'ensemble qu'elles forment.

Mais, d'après tout ce qui a été dit jusqu'ici, il est naturel de penser que, lorsque ces parties, contrairement à celles de la démonstration précédente, sont longues, elles se subdivisent, à leur tour — toujours du point de vue de l'intuition mathématique créatrice, ou, si l'on veut, de la logique de l'invention,difficile à formuler mais directement sentie par celui qui fait ou « comprend » un raisonnement — en un plus ou moins grand nombre de parties, dont chacune desquelles peut se subdiviser en d'autres, et ainsi de suite... jusqu'à ce qu'on arrive enfin à l'acte de l'esprit consistant, semble-t-il, simplement dans le passage intuitivement sans aucun intermédiaire d'une vérité à une autre, d'une formule à une autre, par l'application d'un savoir acquis, conscient ou inconscient — comme, dans ce qui précède, le passage de la formule $(1 + a + 1)$, déjà identifiée à $(a + 2)$ à : $1 + 1 + a$ (c'est-à-dire $2 + a$). La démonstration serait comparable à une construction matérielle, dans laquelle sont d'abord à distinguer certains corps de bâtiments, dont chacun forme une des grandes subdivisions qui, par leur nombre et leur disposition, caractérisent le tout. Ces « pièces », ces « parties », sont, on le conçoit sans que l'on insiste là-dessus, les plus importantes de l'édifice. D'elles dépend d'abord et avant tout l'effet esthétique produit par l'ensemble, l'impression d'harmonie ou de dysharmonie qui s'en dégage. Mais chacune d'elles constitue,

prise individuellement, un ensemble nouveau, que l'on peut considérer à part, quoiqu'il n'ait toute sa signification que vu dans le tout de l'édifice, et dont le nombre et la disposition des parties crée, à son tour, l'unité plus ou moins grande et la beauté qui s'ensuit, tandis que, au sein même de chacune de ces parties, des détails de plus en plus fins, constituent, par leur plus ou moins heureux arrangement et par leur nombre, des « touts » de troisième, pour ainsi dire, de quatrière ordre, etc..., de moins en moins importants du point de vue de l'ensemble total de l'édifice, quelle que soit leur propre perfection.

L'édifice le plus beau, est celui dont l'harmonie de l'ensemble domine la perfection des détails ; où ceux-ci, de quelque « ordre » qu'ils soient, loin d'imposer leur individualité, quelqu'intéressante qu'elle puisse être, à ses dépends, contribuent, au contraire, chacun par la place qu'il occupe par rapport aux autres dans les « parties » de plus en plus vastes de l'édifice, à accentuer cette harmonie générale. Et cela se produira, non seulement quand la hiérarchie des parties sera respectée, mais encore quand la symétrie caractéristique des parties de l'ordre le plus immédiat, — nous voulons dire des « grands corps de bâtiments », — se retrouve dans les parties des autres ordres, chacune étant considérée avec ses détails constitutifs, de sorte que l'impression d'équilibre que donne le tout ne varie pas en son essence, ou, du moins, n'évolue qu'avec une lenteur qui, pratiquement, la laisse entière, à mesure, soit qu'on examine l'édifice de plus en plus près, soit qu'après être entré dans le détail, on le reconsidère, graduellement dans un éloignement de plus en plus grand, voir même, brusquement, dans toute son ampleur.

D'après ce que nous avons vu (59), l'élégance, la beauté d'une démonstration est conditionnée d'une manière analogue, car qu'est-ce donc que « l'harmonie des diverses parties, leur symétrie, leur heureux balancement » (60), si ce n'est cette disposition des pièces de la démonstration dans le sens

---

(59) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », en particulier le chapitre II : « L'Avenir des Mathématiques », et le chapitre III : « L'Invention mathématique ».

(60) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 25.

où nous les avons définies (61), depuis les plus larges subdivisions naturelles que le mathématicien y sent, jusqu'aux derniers chaînons de raisonnement qu'il puisse saisir au moment ou, peu à peu, il « construit » sa preuve, disposition dont il vient d'être question dans le cas d'une construction matérielle, et qui, en y introduisant le plus d'ordre, donne à l'ensemble le plus d'unité ? Et, puisqu'élégance et simplicité se tiennent pour H. Poincaré, puisque « la satisfaction esthétique est liée à l'économie de pensée » (62), la démonstration élégante par excellence, sera en même temps la démonstration simple par excellence. Toutes les « parties » de divers ordres que l'on peut donc distinguer dans une démonstration, et qui, nous l'avons dit, ne jouent pas toutes le même rôle par rapport à son harmonie générale, ne sont pas, non plus, d'une égale importance en ce qui concerne sa simplicité. Les plus essentielles, celles dont le nombre et la disposition comptent le plus sont les mêmes dans les deux cas : ce sont les grandes subdivisions qui constituent comme l'ossature de la démonstration, et que la sensibilité du mathématicien prévoit dès qu'elle l'a « mis sur la voie », — bien avant que les parties moins importantes et les détails de raisonnement n'aient encore été appréhendés par lui.

Un édifice peut être « simple » dans son ensemble, peut, esthétiquement parlant être d'une suprême élégance, malgré une extraordinaire abondance de détails, pourvu que les « grandes lignes » qui *caractérisent* son architecture, soient, elles, sobres — (et que les détails ne s'imposent pas de manière à nuire à cette sobriété) — ; pourvu que les pièces principales de son plan soient peu nombreuses et disposées de telle façon qu'il s'en dégage une impression dominante, très nette d'*unité*. Et il est à noter que les édifices les plus beaux, quelle que soit la richesse de leur décoration, possèdent au plus haut degré cette simplicité du plan, ce petit nombre de directions *générales* dans leurs lignes, d'où nait l'unité de leur tout. Exemple : le fameux temple d'Angkor. De même, semble-t-il, il n'est pas nécessaire qu'une démonstration soit courte, peu détaillée, par là même quelquefois peu rigoureuse,

(61) Voir plus haut, p. 262 et suivantes.
(62) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 26.

qu'elle comprenne peu de passages d'une vérité connue à une autre, pour qu'elle soit simple, c'est-à-dire, selon H. Poincaré, *belle*. Il faut, pour cela, *et il suffit* que le plan en soit harmonieux, que l'ensemble donne immédiatement à la sensibilité esthétique du mathématicien l'impression reposante d'unité, qu'elle attend. Il suffit, quelle que soit l'abondance des détails, que ceux-ci s'oublient, se fondent dans le sentiment d'un acte unique d'appréhension du sens de la démonstration, qu'on éprouve en présence de l'ensemble de celle-ci.

Car, c'est là le point essentiel, le point qui fait l'originalité et l'intérêt de la conception qu'a Henri Poincaré de la simplicité mathématique en gtnéral, — la démonstration mathématique *est*, pour lui, *une construction artistique*.

Elle en revêt tous les caractères si on l'étudie dans sa genèse, dans ce processus si obscur et si étonnant au premier abord de l'invention mathématique, où, semble-t-il, comme dans la création de beauté, le sens profond des analogies joue un si grand rôle (63). Même élaboration de l'édifice dans la fièvre d'une première inspiration puissante et tourmentée, quasi dyonisiaque (64) ; nous dirons, dans *l'enthousiasme*, en gardant à ce mot quelque chose de son sens étymologique.

Même alternative, chez l'artiste au sens ordinaire du mot, et chez le mathématicien, d'insurmontable impuissance, et de puissance créatrice (65) ; même soudaineté déconcertante de l'inspiration, brusque éclosion du fruit de tout un long tra-

---

(63) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 51.

(64) « Depuis quinze jours je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes ; j'étais alors fort ignorant ; tous les jours je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude. Je ne pus m'endormir : les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique ; je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures. » — **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 50-51.

(65) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », pp. 50-51-52-53.

vail inconscient, qui a lieu où et quand cela lui plaît, aussi bien sur le marche-pied d'un omnibus (66), qu'au cours d'une promenade sur la falaise (67), ou que pendant la traversée d'un boulevard (68) ; même netteté, enfin, dans le sentiment de l'« *essentiel* », autour duquel il convient de grouper les recherches de détail. Pas plus ici que là il ne s'agit de travail mécanique. « Il ne s'agit pas seulement d'appliquer des règles, de fabriquer le plus de combinaisons possibles d'après certaines lois fixes. Les combinaisons ainsi obtenues seraient extrêmement nombreuses, inutiles et encombrantes. Le véritable travail de l'inventeur consiste à choisir entre ces combinaisons de façon à éliminer celles qui sont inutiles, ou plutôt, à ne pas se donner la peine de les faire. Et les règles qui doivent guider ce choix sont extrêmement fines et délicates, il est à peu près impossible de les énoncer dans un langage précis ; elles se sentent plutôt qu'elles ne se formulent » (69). Ne devrait-on pas, en termes analogues, parler du choix inconscient opéré par le peintre comme par le musicien, par le poète comme par l'architecte, et, en général par tout artiste à quelque degré et dans quelque branche que ce soit,

---

(66) « ...au moment où je mettais le pied sur le marchepied l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes, étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification ; je n'aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. » — **H. Poincaré**, idem, p. 51.

(67) « Je me mis d'abord à étudier des questions d'arithmétique sans grand résultat apparent, et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allais passer quelques jours au bord de la mer, et je pensais à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies, étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. » — **H. Poincaré**, Idem, p. 52.

(68) « Un jour en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté, m'apparut tout à coup. » — **H. Poincaré**, Idem, p. 53.

(69) **H. Poincaré**, Idem, p. 55.

parmi les combinaisons possibles de couleurs et de lignes, ou de sons, ou d'images ?

Il est tout naturel que la démonstration achevée présente, également du point de vue de celui qui la lit, tous les caractères de l'œuvre d'art. Car, dans les conditions dans lesquelles elle a été construite, il ne suffit pas de savoir raisonner pour la *comprendre*, ni pour en apprécier la simplicité. En apprécier la simplicité, c'est déjà en saisir l'âme. Pour cela, il faut, en quelque sorte, entrer en communion avec le mystérieux génie qui en a tracé les nervures et fixé les détails, chacun à sa place ; sentir, sinon qu'on aurait soi-même été capable de l'avoir faite, du moins, qu'elle correspond, telle qu'elle est, non seulement aux exigences d'une stricte logique combinatoire, mais encore à des exigences plus profondes, plus secrètes, et, humainement, plus impérieuses encore, de la raison et de la sensibilité réunies ; sentir entre elle et soi cette adaptation heureuse, cet accord entier et sûr, qui met fin à tout besoin d'explications, et qui nous procure un sentiment spécial de jouissance dans le repos. Il faut, en un mot, saisir en elle une *perfection*, — car nous qualifions *parfaites* les choses qui nous donnent l'occasion d'expérimenter cette jouissance sereine.

Cette similitude entre l'édifice d'une démonstration mathématique, et ce qu'on appelle plus spécialement « l'œuvre d'art », si importante, répétons-le, chez H. Poincaré, nous aide à comprendre pourquoi la *nature*, la qualité des détails, et même celle des parties les plus saillantes, — des grandes pièces de l'édifice, — n'est pas indifférente à sa simplicité. Dans un monument, la qualité des parties, grandes et petites, principales ou « secondaires » (leur figure, leur couleur, leur style, les matériaux, parfois différents, dont elles sont faites), ne lui est pas, non plus, indifférente. C'est que, ici, dans un cas comme dans l'autre, cette qualité influe sur le *schéma* qui se dégage d'elles dans leur ensemble.

En effet, les « pièces », les « parties » qui, véritablement nous intéressent ici, ne sont pas des parties détachées, données en elles-mêmes, sans plus. Ce sont des parties données les unes par rapport aux autres et par rapport à leur ensemble. Ce ne sont pas des « éléments » impersonnels, que ceux-ci soient « logiques » ou « matériels », mais bien les articulations d'un tout, à sa manière, vivant. Leur nombre cardinal

n'a qu'une importance relative. Il ne s'agit pas de les compter. Sans doute, ne saurait-on pas affirmer que ce nombre n'a rien affaire avec la beauté et la simplicité de la démonstration (surtout s'il s'agit du nombre des grandes subdivisions fondamentales qui en tracent le plan). On ne saurait affirmer non plus que le nombre des grands éléments architecturaux d'un édifice (par exemple de ses dômes ou de ses ailes de bâtiment), n'entre pour rien dans son harmonie. Mais il n'intervient que dans la mesure où il a affaire avec le *schéma* de la construction. Et cela reste vrai quand il s'agit d'une construction mathématique, d'une démonstration, d'une théorie, d'un enchaînement en général.

Si on ne l'entendait pas ainsi, il ne saurait, contrairement à ce qu'affirme H. Poincaré (70), exister de simplicité *en soi*. Car une simplicité *en soi*, cela veut dire une simplicité qui, quoique de nature psychologique, quoique « subjective » sans nul doute, admet néanmoins un critère qui s'impose à tous ; qui, autrement dit, n'est pas purement une affaire de préférence « personnelle ». C'est, pour reprendre le parallélisme cher à H. Poincaré, quelque chose de comparable à la beauté en soi, qui relève, sans doute, de ce qu'on appelle le « goût », mais qui existe du seul fait qu'« il y a un bon et un mauvais goût ». Or, le *nombre* des parties d'une démonstration, d'un raisonnement mathématique, compris à la façon de H. Poincaré, est, on le sent, tout à fait arbitraire, et cela, de plus en plus à mesure que l'on considère de plus près le détail. Tout au plus peut-on dire que le nombre de ses grandes directions, des traits qui en forment comme l'ossature, est hors de conteste.

Mais il est certain qu'il ne suffit pas à en fonder la simplicité, cette simplicité esthétique que H. Poincaré a en vue, pas plus que le petit nombre de ses dômes, ou de ses ailes ne suffit à donner à un édifice l'élégance. Entre deux démonstrations, visiblement subdivisibles, chacune, en trois ou quatre parties, quelle différence n'arrive-t-on pas parfois à saisir, en ce qui concerne leur simplicité ! Autant l'une donne l'impression d'unité et d'harmonie, d'« heureux balancement des parties », dont nous avons vu l'importance essentielle, autant

(70) Voir plus haut, p. 244.

l'autre peut paraître embarrassée, gauche, détournée. (De même qu'entre deux édifices comportant chacun le même nombre cardinal de corps de bâtiment, la différence d'effet et de valeur artistique, peut-être, — chacun le conçoit, — au delà de toute mesure). Le nombre des parties peut *contribuer* à leur symétrie. Il ne la *crée* pas à lui seul. En dehors de lui, et dans une mesure autrement grande, intervient leur *disposition*, et celle des détails eux-mêmes à l'intérieur de chaque partie, disposition en dehors de laquelle, aucune harmonie n'est concevable.

Mais, *nombre et disposition des parties* ; voilà bien, semble-t-il, les éléments essentiels de la notion de *schéma*, ou d'une manière encore plus générale, de *forme*. C'est à elle que nous sommes ramenés.

En effet, ce qui nous a, chez H. Poincaré, paru caractériser avant tout une démonstration, un raisonnement *simple*, c'est l'harmonie qui se dégage de son ensemble grâce à l'« heureux balancement de ses parties », grâce, autrement dit, à sa symétrie profonde. (Il ne saurait, pour le mathématicien qui ne sépare pas épistémologie de psychologie, être question de ne considérer que la symétrie des phrases dans son exposé verbal). Or, ces idées un peu vagues d'« heureux balancement », d'harmonie, d'unité dans la plus belle ordonnance du multiple, se résolvent toutes dans l'idée générale de *forme*.

Et il semble même que ce ne soit que par elle qu'elles acquièrent leur pleine signification ; en particulier, qu'elles se laissent, en dépit de leur nature incontestablement subjective, traiter comme des notions précises, consistantes, exprimant autre chose que de nébuleuses impressions individuelles. L'idée de forme les contient et les explique.

Voir, dans la simplicité des démonstrations mathématiques l'indice de certaines formes, supportées par celles-ci, c'est donc, semble-t-il, après tout ce que nous venons de dire, rendre compte, à la fois, de toutes les expressions qu'emploie H. Poincaré pour en faire saisir la nature au profane, et du caractère de qualité *en soi* qu'il lui attribue. C'est expliquer, par une notion nette, la parenté foncière entre la mathématique et l'art, dont le géomètre-philosophe a fait la base de sa doctrine. C'est, répétons-le, mettre tout naturellement en évi-

dence, le caractère à la fois subjectif et absolu de la simplicité mathématique.

Et, apparemment, la simplicité des théories mathématiques est, elle aussi, l'indice d'une certaine forme. Sans doute H. Poincaré remarque-t-il que le groupe de transformations que définissent les axiomes fondamentaux de la géométrie d'Euclide, est celui qui comprend le moins d'opérations de correspondance, le moins d'éléments, comme nous avons dit (71). Mais ce groupe est aussi, — toujours du fait qu'il comporte le sous-groupe invariant des translations, aux opérations de correspondance interchangeables, — un tout organique plus complètement ordonné que les groupes non-euclidiens. Et la « sensibilité spéciale » du mathématicien n'est pas indifférente à cet ordre. Par tendance, c'est le groupe euclidien qu'elle choisit. Or, qui dit « *ordre* », dit autre chose que nombre seulement. Qui dit ordre, dit schéma, dit « *forme* ».

Il en va de même dans la détermination du nombre des dimensions de l'espace. On l'arrête à trois, non seulement parce que le nombre trois est en tant que tel, plus petit que quatre ou que cinq, mais parce que le « choix des différentes transformations du sous-groupe rotatif » (72), en faisant de la matière de notre groupe métrique une « triple infinité d'éléments »(73), construit en quelque sorte celui-ci selon un schéma plus élémentaire, une loi synthétique « *plus simple* ».

La théorie mathématique, en somme, qui met en jeu le moins d'éléments (74) n'est la plus simple — (d'après H. Poincaré, avons-nous vu, elle l'est en effet), — que parce que ce « petit nombre » est (comme l'est souvent le petit nombre des parties d'une démonstration), l'indice d'un schématisme plus élémentaire, d'une certaine « forme » qui satisfait mieux qu'une autre la sensibilité esthétique du mathématicien.

On ne saurait trop insister sur cette interprétation esthétique des mathématiques chez H. Poincaré, d'autant plus que celle-ci semble, depuis, être redevenue actuelle. Il suffit de mentionner des études comme celles de Lichtenstein ; ou de

(71) Voir plus haut, p. 253.
(72) Voir plus haut, p. 252.
(73) Voir plus haut, p. 252.
(74) Voir plus haut, pp. 252-253.

rappeler certaines affirmations récentes comme celles que formule M. F. Gonsett sur les axiomes de Péano, ou sur ceux qui fondent la théorie des ensembles. Ils forment (les premiers), « une description schématique de nos connaissances intuitives » (75) ; « ils donnent — (les seconds) — le dessin schématique de certaines opérations de la pensée » (76). C'est là, d'ailleurs, le rôle de tous les axiomes ; (77) et la mathématique en général, « dans son essence n'est qu'un ensemble de vues et de procédés schématiques de notre esprit, réplique consciente de l'activité inconsciente qui créé en nous une image du monde... » (78), conception que, semble-t-il, H. Poincaré n'eut pas désavouée et à la base de laquelle nous retrouvons la notion de forme dont nous venons d'entrevoir l'importance.

Il est certain que, chez H. Poincaré, la simplicité, avant tout artistique, des enchaînements mathématiques, ne se comprend pas en dehors de cette notion fondamentale.

(75) **F. Gonseth.** « Les Fondements des Mathématiques » (Paris, Librairie A. Blanchard, 1926), p. 236.
(76) **F. Gonseth.** Même ouvrage, p. 237.
(77) **F. Gonseth,** Idem, p. 239.
(78) **F. Gonseth,** Idem, p. 240.

CHAPITRE XII

DE LA CRITIQUE MATHEMATIQUE CHEZ QUELQUES PHILOSOPHES « SUBJECTIVISTES »

Il n'existe pas d'« école » de philosophie mathématique, se groupant autour de H. Poincaré. Ce dernier semble avoir été trop géomètre, et pas assez « philosophe » au sens étroit du mot, pour édifier une « théorie » critique *systématique* des mathématiques, et grouper autour de lui d'autres penseurs en leur demandant, à leur tour, une systématisation de leurs tendances scientifiques. Ses livres (d'ailleurs, pour la plus grande part, recueils d'articles détachés), représentent les libres réflexions d'un grand mathématicien, se plaisant à ses heures, à analyser ses procédés de travail et à rechercher la genèse des notions qui lui sont familières. Ils n'ont apparemment, pas d'autre prétention, et c'est en partie ce qui en fait le charme, en même temps que l'intérêt.

Mais, si H. Poincaré n'a pas laissé d'école, on peut, néanmoins, comme nous le disions au début (1), rapprocher de lui quelques philosophes, tels que M. Ed. Goblot, Ph. Chaslin, Rignano, auxquels leurs tendances auraient nettement valu, à ses yeux, d'être classés parmi les « pragmatistes » par opposition aux « cantoriens » (2), c'est-à-dire, parmi ceux pour qui le point de vue psychologique intervient dans la critique scientifique ; parmi ceux qui « considèrent qu'un objet n'existe que quand il est pensé » (3), par opposition à ceux pour qui les entités mathématiques elles-mêmes jouissent d'une existence indépendante (4).

M. Ed. Goblot se sépare de Henri Poincaré sur certains

(1) Voir plus haut, p. 231.
(2) **H. Poincaré.** « Dernières pensées » p. 146.
(3) **H. Poincaré,** Idem, p. 158.
(4) **H. Poincaré,** Idem, p. 159.

points, en particulier, en ce qui concerne le raisonnement par récurrence, auquel il n'attribue ni la même généralité d'emploi, en fait, ni la même place prééminente, en droit (5). Mais on retrouve chez lui cette conception selon laquelle la logique pure, — et cela, même si on ne réduit pas celle-ci à la seule syllogistique (6), — ne saurait rendre compte de la pensée mathématique ; selon laquelle, le raisonnement mathématique est une construction « non arbitraire », une suite d'opérations toutes « réglées », mais ne se réduisant pas forcément toutes à des opérations « logiques », et dans l'enchaînement desquelles l'intuition tient une place. Pas plus que H. Poincaré, il ne sépare le point de vue épistémologique du point de vue psychologique. C'est pourquoi, malgré leurs divergences, ces deux esprits se rapprochent l'un de l'autre, et l'étude de la nature de la simplicité mathématique selon le second, complète l'étude du même problème tel qu'il se présente chez le premier. Mais d'abord il s'agit de prendre contact avec la philosophie mathématique de M. Goblot, en général.

« Déduire, écrit M. Goblot, c'est construire ». C'est là un point essentiel. On ne démontre que des jugements hypothétiques. On démontre qu'une chose est conséquence d'une autre. Pour cela, on *construit* la conséquence avec l'hypothèse. La conclusion est nécessaire, bien qu'elle introduise *du nouveau*, pour la seule raison qu'elle est obtenue par des opérations réglées, c'est-à-dire, dont aucune n'est arbitraire.

Et quelles sont les règles de ces opérations ? Des règles de la logique formelle ? Nullement, mais des propositions antérieurement admises, soit en vertu de démonstrations précédentes, soit à titre de définitions et de postulats. Et l'application, de ces propositions aux opérations constructives, est précisément le rôle et la fonction du syllogisme dans le raisonnement » (7).

Or, par quoi sont choisies les règles, les propositions ad-

(5) **E. Goblot.** « Traité de Logique », p. 262 ; « Système des Sciences », pp. 51-52.

(6) M. Goblot insistait très souvent, dans ses cours, sur son opposition avec les Logisticiens d'une part, avec la logique traditionnelle de l'autre.

(7) **E. Goblot.** « Système des Sciences, pp. 50 et 51.

mises, qui, de préférence à d'autres, serviront à édifier la démonstration ? Par l'intuition de ce que la démonstration devra être. Et il semble que la part que lui donne M. Goblot soit même plus grande que chez H. Poincaré. Cela est très sensible dans les exemples que M. Goblot emprunte à la géométrie « intuitive », — les géomètres intuitifs étant, comme il le remarque « des mathématiciens tout de même » (8), qui raisonnent, et dont les raisonnements sont concluants. Soit, par exemple, à démontrer que, dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux : « on exfolie, pour ainsi dire, le triangle, on le détache de lui-même par la pensée, et on le réapplique, en le retournant sur la trace qu'on le suppose avoir laissée sur le tableau. On observe alors que l'angle compris entre les côtés égaux coïncide nécessairement avec sa propre trace, que chaque côté de cet angle coïncide avec la trace de l'autre côté qui lui est égal. La coïncidence du troisième côté résulte de ce principe que deux points ne peuvent être joints que par une seule ligne droite. On constate enfin que chacun des angles opposés aux côtés égaux coïncide avec la trace de l'autre. La démonstration a consisté, on le voit en une *opération*, et en la *constatation* du résultat obtenu. Il va sans dire qu'il ne s'agit pas d'une opération manuelle — du moins il n'est pas nécessaire qu'elle soit manuellement exécutée, — mais d'une opération mentale, et qu'il ne s'agit pas d'une constatation physique, telle qu'on pourrait la faire avec des instruments de mesure, mais d'une constation logique. Toutes les démonstrations géométriques (je ne parle pour le moment que de la géométrie intuitive), se font sur des exemples. C'est qu'on ne démontre qu'en opérant » (9). On peut ajouter : on opère dans le sens qu'indique comme étant le préférable, l'intuition de la suite même des opérations, car il y aurait, sans doute plusieurs moyens, plusieurs suites qui aboutiraient à la « construction de la même conclusion » pour reprendre les termes qu'emploierait l'auteur. Quant aux opérations en elles-mêmes, on voit, d'après ce qui vient d'être cité, que, si elles ne sont pas obligatoirement exécutées manuellement, si même, en général, elles ne le sont jamais, elles peuvent néanmoins très bien être imaginées intuitivement. En

(8) **E. Goblot.** « Traité de Logique », p. 261.
(9) **E. Goblot.** Même ouvrage, pp. 263 et 264.

tout cas, ce ne sont pas des opérations de logique pure telles que celles qui, la plupart du temps sous-entendues, constituaient le raisonnement mathématique d'après les Logisticiens, mais bien des opérations dans lesquelles la faculté de se représenter les choses entre plus ou moins.

Il est vrai que « la géométrie intuitive est à peine une science mathématique » (10), si elle en est une. Mais M. Goblot s'efforce de montrer que sa théorie s'applique exactement « à toutes les démonstrations de l'arithmétique, de l'algèbre et de l'analyse infinitésimale » et qu'elle « est nécessaire pour rendre compte du raisonnement par récurrence lui-même » (11).

En algèbre, la démonstration consiste à construire une forme nouvelle en partant d'une autre forme et « il n'y a pas une proposition d'arithmétique ou d'algèbre qui ne se démontre au moyen d'une opération ou d'une série d'opérations (12). Et, sur la nature de ces opérations constructives, aussi bien en arithmétique et en algèbre qu'en géométrie élémentaire, M. Goblot insiste. Sa conception, est, comme nous venons de le dire, bien éloignée de celle avec laquelle les Logisticiens nous avaient familiarisés. « Les opérations constructives ne sont pas des opérations de l'esprit, mais des opérations exécutées mentalement. En leur essence, elles sont des actions externes, par exemple des mouvements. On ne fera aucune difficulté de l'admettre en général s'il est prouvé qu'il en est ainsi dans les plus abstraits et les moins empiriques de tous les raisonnements. Les opérations arithmétiques se firent,

---

(10) **E. Goblot.** Idem, p. 268.

(11) **E. Goblot.** Idem, pp. 268.

(12) **E. Goblot.** « Traité de Logique », p. 269.

« Pour démontrer que le carré de la somme de deux quantités est égal à la somme des carrés de chacune d'elles — dit E Goblot à la même page — plus leur double produit, on effectue l'opération $(a + b)^2$; on constate la forme du résultat ; et comme on a pris pour règle, en faisant l'opération, la forme de l'expression $(a + b)$, et nullement la valeur ou la nature des 2 quantités a et b, on sait que, quelles que soient ces 2 quantités, numériques ou non, connues ou inconnues, commensurables ou incommensurables, de quelque manière qu'elles soient composées, on obtiendra toujours un résultat de même forme. La démonstration arithmétique, algébrique ou analytique, est donc de même nature que le raisonnement géométrique. »

jusqu'à l'invention de la numération écrite décimale, au moyen de jetons, ou, comme l'indique encore le mot « calcul », de petites pierres. Les abaques et autres moyens de calcul tout faits, les règles à calculer, sont des perfectionnements qui permettent d'abréger ces opérations manuelles, et sont encore des opérations manuelles. Additionner, c'est, primitivement, réunir plusieurs tas en un seul et compter ce tas unique. Pour que des objets puissent être soumis au calcul, il faut définir, relativement à ces objets, l'unité et l'addition. Or, définir l'unité et l'addition, relativement à une catégorie d'objets, c'est définir *la technique opératoire, le dispositif expérimental, la manœuvre, la manipulation* qui permettent, relativement à ces objets, la constatation empirique de l'identité et de la somme. Ce qui caractérise le raisonnement, c'est que ces opérations ne sont exécutées que *mentalement,* et la constatation empirique y est remplacée par la constatation logique du résultat. En géométrie, l'importance des constructions graphiques n'a échappé à personne, mais les logiciens sont enclins à n'y voir que des opérations auxiliaires ou préparatoires du raisonnement. Elles sont le raisonnement lui-même. Il en est de même de toutes les opérations de plume qui interviennent dans les raisonnements de l'algèbre. Les opérations du raisonnement géométrique ne consistent pas seulement à tracer des lignes nouvelles, mais aussi en des translations, superpositions, rotations, déformations, etc..., de figures, enfin en des mesures ; or, toute mesure indirecte doit pouvoir se ramener à des mesures directes, c'est-à-dire empiriques. Ces opérations, manuellement exécutables, et manuellement exécutées dans les applications techniques, sont exécutées mentalement dans le raisonnement géométrique » (13).

Cette citation, un peu longue, nous a parue utile à la mise en lumière de ce qu'il y a d'essentiel dans l'idée que M. E. Goblot se fait de la nature des mathématiques, science la plus abstraite, sans doute, la plus loin du réel, car arrivée à un stade avancé de son évolution, mais ne différant des sciences en général, en somme, que, justement, par son degré d'évolution, et non pas par son essence ; plongeant, comme chacune d'elles, profondément, ses racines dans le réel, dans le concret, et gardant la marque de l'empirisme de ses opé-

(13) **E. Goblot.** « Traité de Logique », pp. 272 et 273.

rations, — non, évidemment, de sa « méthode » — jusque dans ses spéculation les plus lointaines. Cette idée découle, disions-nous, d'une association étroite du point de vue épistémologique au point de vue psychologique, sinon d'une réduction du premier au second, et range l'auteur nettement parmi les « Pragmatistes » que H. Poincaré, dans l'exposé de ses motifs profonds de non-entente avec Bertrand Russell, oppose avec tant de raison, semble-t-il, à ceux qu'il appelle les « Cantoriens ». Il serait même, d'après ce passage — et l'on pourrait en citer d'autres, si celui-ci n'était déjà trop long — plus « pragmatiste » que H. Poincaré lui-même. En tout cas, pour ce qui nous intéresse surtout, — en ce qui, c'est-à-dire, concerne le problème de la nature de la simplicité mathématique, — il semble que l'opinion que l'on peut lui attribuer là-dessus d'après ce qu'il a dit des mathématiques, ne doive pas tellement différer de celle du grand géomètre, qu'elles ne s'éclairent mutuellement, et ne soient à regarder comme expressions d'un même point de vue.

Ce même point de vue paraît être aussi celui de Ph. Chaslin, de E. Mach, de E. Rignano. Chaslin revient sur cette idée que, pour lui, la mathématique est avant tout, une « science opératoire », et que, en dernière analyse, ses opérations constituantes se réduisent à de celles que M. Goblot dirait « exécutables manuellement », bien qu'exécutées, en fait, par la pensée. « L'idée de nombre, dit par exemple Chaslin, passe du concret à l'état abstrait » (14), mais on ne saurait dire que cet « état abstrait », même atteint, corresponde à autre chose qu'à la *transposition* du résultat d'un *geste*. «On sait que, passé 5 ou 6, il faut compter les objets un à un. C'est donc, finalement, une opération qui est le point de départ de l'idée de nombre, la numération est la première opération mathématique » (15). On se rappelle que, pour Couturat, la numération supposait l'idée de nombre, qui lui est, disait-il, logiquement antérieure, et qui, si elle doit être regardée comme le résultat d'une opération, elle doit l'être d'une opération non seulement mentale, mais purement logique, extérieure, en

(14) **Ph. Chaslin.**
(15) **Ph. Chaslin.** Même ouvrage, p. 14.

quelque sorte, au concret. *Ici, c'est exactement le contraire.* L'« antérieur » envisagé, est le psychologiquement antérieur, parce que le point de vue adopté, est celui de la psychologie et de l'action, un point de vue, nous l'avons dit, « pragmatiste ».

Plus loin, parlant des propriétés des nombres, Chaslin dit encore qu'elles « ne sont pas autre chose que les possibilités qu'ils offrent à nos opérations. Et ces possibilités sont des données naturelles, de fait » (16). L'arithmétique élémentaire et supérieure ajoute-t-il, « n'est pas tout à fait une science d'observations : il n'y a pas de phénomènes à observer, il y a un état de fait par la limitation des multiplicités données qui rend possible ou impossible telle ou telle opération sur telle multiplicité devenue collection par la numération. Ce n'est pas une science descriptive, car l'objet n'en est pas complexe. Ce n'est pas une science expérimentale, car il n'y a pas de conditions d'existence de l'objet à modifier. C'est d'abord la science des modifications que nous pouvons apporter à la distribution numérique des choses, à la composition ou à la décomposition des collections. Nous verrons que la mathématique (pure) tout entière n'est que cela ; mais il faudra joindre à la distribution numérique les opérations de rangement et de correspondance dont l'importance est considérable et qui sont déjà présentes dans la numération » (17).

Ces citations sont suffisantes pour montrer quel est, selon lui, le caractère essentiel des mathématiques. Pour lui, non moins que pour H. Poincaré ou E. Goblot, l'intuition joue un rôle très important dans le choix des opérations auxquelles on procédera, parmi les opérations possibles. La nécessité, par exemple, dans la résolution des équations du second degré, et de degré supérieur (jusqu'au quatrième inclus), de l'adjonction, à l'équation en question de « certaines fonctions des coefficients *habilement choisis* » (18), adjonction assimilée par l'auteur à un « *truc habile* » (19), en est une preuve. Le caractère nettement concret, « expérimental », des

(16) **Ph. Chaslin.** Même ouvrage, p. 30.
(17) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 31.
(18) **Ph. Chaslin.** Idem, p. 144.
(19) **Ph. Chaslin.** Idem, p. 145.

opérations constructives des mathématiques, non seulement à leur origine, mais encore dans leur signification véritable, qui se cache sous l'abstraction de plus en plus grande du symbolisme qui les exprime, se déduit aussi très bien de ce que nous venons de dire, ainsi que de l'ensemble du livre de Ph. Chaslin.

Quant à E. Mach, dont l'idée originale de l'importance de l'« économie de pensée », en sciences en général, — et en particulier en mathématiques, — nous rappelle les vues de H. Poincaré, et est si intéressante vis-à-vis du sujet de la présente étude, sa conception du rapport des mathématiques et de cette « logique pure », extérieure à toute intuition, est celle des auteurs que nous avons déjà rencontrés dans ce chapitre. C'est, pour lui, le réel qui sert de base à toute pensée vivante. « Les formes de la logique ont été acquises en partant d'exemples scientifiques réels » (20). Pas plus que les autres, les opérations mathématiques, ne sont à détacher de leur sens profond qui est, comme le disait M. E. Goblot, d'être l'équivalent mental d'opérations matériellement exécutables, et la connaissance de la logique « pure » ne peut remplacer l'intuition d'un abstrait riche de valeur représentative. « La pensée ne procède pas de formes vides ; il lui faut un contenu représenté d'une façon vivante, immédiatement ou par concepts. Dans une déduction géométrique, la droite intervient tantôt par sa situation, tantôt par sa longueur, tantôt comme tangente, tantôt comme perpendiculaire au rayon, tantôt comme élément d'une figure symétrique ; dans le parallélogramme, il faut considérer tantôt la surface, tantôt le rapport des côtés ou des diagonales et tantôt les angles. Celui à qui toutes ces relations *intuitives* et abstraites, ne seraient pas familières, celui qui ne saurait les transposer, celui dont l'intérêt ne serait pas dirigé dans la bonne voie vers la relation présumée, ne pourrait certainement pas trouver de proposition géométrique nouvelle. Les formes logiques vides ne peuvent remplacer la connaissance des choses » (21).

Enfin, chez Rignano, nous retrouvons à la fois cette idée que la mathématique ne saurait nullement être assimilée à

(20) **Ernst Mach.** « La connaissance et l'erreur », p. 194.
(21) **Ernst Mach.** Même ouvrage, p. 194.

une certaine particularisation de la logique pure, soi-disant pur jeu de symboles où l'intuition n'a aucune part, mais qu'au contraire l'intuition y joue, en fait et en droit, un rôle essentiel, et, en second lieu, que c'est, avant tout, une science opératoire, dans laquelle les opérations, de plus en plus toutes « mentales », ne cessent jamais de représenter des opérations réelles.

Pour lui, « le raisonnement ne consiste, en substance, qu'en opérations ou expériences que nous nous bornons à exécuter par l'imagination, car nous connaissons déjà le résultat de chacune d'elles » (22) ; et cela s'applique au raisonnement mathématique aussi bien qu'à tout autre. « Les démonstrations géométriques, en effet, dit E. Rignano, sont de véritables démonstrations expérimentales, de véritables chaînes d'expérience, dans lesquelles, si la plupart de ces dernières sont simplement pensées, d'autres sont, cependant, effectivement exécutées » (23). Et si, laissant là la géométrie, on passe à l'algèbre, et à l'algèbre supérieur, considérant un symbolisme de plus en plus abstrait, on voit que, au fond, malgré tout, le caractère du raisonnement mathématique reste le même. Il est vrai que les opérations sont toutes purement pensées ; des groupes d'opérations ayant une certaine unité d'un certain point de vue, des « situations algébriques » données, même très complexes, « deviennent ainsi susceptibles d'être considérées dans leur ensemble indépendamment de leurs éléments constitutifs, et d'être, conséquemment, représentées par de nouveaux symboles particuliers » (24). Mais il ne faudrait pas se méprendre sur la vraie nature de la science, exprimée par ce symbolisme dont on a vite fait d'oublier le contenu. « A ceux qui ne réussissent pas à « voir », derrière ces symboles supérieurs, l'ensemble des symboles inférieurs, et derrière les symboles inférieurs l'ensemble des opérations réelles, d'ordre général, représentées par ces derniers, les mathématiques peuvent alors sembler vraiment s'être tout à fait émancipées de ces antiques opérations de calcul matérielles, d'abord effectivement exécutées, et puis, pensées, d'où elles ont pris leur vol hardi. Toutefois il est

(22) **E. Rignano.** « Psychologie du Raisonnement », p. 193.
(23) **E. Rignano.** Même ouvrage, p. 196.
(24) **E. Rignano.** Idem, p. 208.

clair... que ces anciennes opérations ou expériences matérielles, continuent, au contraire, à en constituer toujours l'entier et unique substractum » (25).

Même les notions qui, au premier abord semblent le plus nées du pur jeu logique, le plus loin de toute expérience matérielle réalisable, comme celles de nombre imaginaire, même ces expressions algébriques dites « complexes », possèdent un tel substractum. Il s'y attache une signification géométrique concrète. Rignano y voit la représentation d'opérations géométrico-cinétiques « non moins tangibles que celles de simple glissement le long d'un unique et même axe » (26).

Enfin, « l'opération mathématique de passage à la limite, n'altère en rien la nature fondamentale du raisonnement comme série d'opérations ou d'expériences simplement pensées » (27). si bien que, dans le domaine mathématique extrêmement vaste où cette opération se fait couramment. le raisonnement reste, foncièrement, ce qu'il est dans les autres, c'est-à-dire « une combinaison mentale d'opérations ou d'expériences matériellement tangibles » (28).

Il ne saurait donc être question d'assimiler la mathématique à un jeu de purs symboles sans contenu, et d'où toute intuition serait bannie, selon le rêve des Logisticiens. Mais E. Rignano va plus loin. Arriverait-on même. selon lui, à démontrer que la mathématique n'est qu'une branche de la Logistique, que cela ne changerait rien à son caractère tel qu'il vient d'être défini, et. par conséquent, ne servirait en rien la thèse des Logisticiens ; car les lois de la logique la plus abstraite ne sont. elles-mêmes, que « de simples constatations empiriques, seulement d'ordre plus général encore » (29) que les axiomes de la géométrie, et le raisonnement ne cesse pas un seul instant, même dans cette logique la plus pure et la plus formelle, d'être une suite d'actes d'intuition, en tant qu'il représente toujours une suite d'opérations, lesquelles sont, il est vrai, d'ordre très général. mais qui sont

(25) **E. Rignano.** Idem, p. 209.
(26) **E. Rignano. Idem,** p. 222.
(27) **E. Rignano.** Idem, p. 232.
(28) **E. Rignano.** Idem, p. 256.
(29) **E. Rignano.** « Psychologie du raisonnement », p. 269.

toujours cependant bien « tangibles » (30). Essayer de bannir l'intuition, cela équivaudrait, dit-il, encore, plus loin, à « croire que l'on peut renoncer précisément à cette activité psychologique qui, seule, nous permet de déduire des conséquences ou d'établir des « relations logiques » nouvelles, des prémisses admises » (31).

En somme, qu'il s'agisse de M. Ed. Goblot, de E. Mach, de Ph. Chaslin ou de E. Rignano, en général de qui que ce soit parmi ceux qu'à la suite de H. Poincaré on pourrait appeler, pour ce qui est de leur conception des mathématiques, des « Pragmatistes », nous sommes en présence des mêmes idées fondamentales à savoir :

1° Que le travail du mathématicien ne consiste pas à découvrir des entités indépendantes et des édifices logiques rigides existant à l'avance, mais à *construire* les uns et les autres. Cette idée de construction active est essentielle chez tous ceux que nous venons rapidement de passer en revue.

2° Que c'est, en dernier lieu, à des opérations représentatives d'opérations *matériellement exécutables*, que ce travail se ramène, et que, même, c'est en cela que réside sa solidité.

3° Que l'intuition mathématique n'est pas une faculté qui, en se superposant simplement à la pure logique, serait dans la pratique de quelque utilité au savant comme à l'élève, mais qu'elle est *essentielle* tant dans l'invention que dans la compréhension de tout processus de pensée mathématique On la trouve à la base de chacune des opérations constructives, comme à l'origine de toute direction que le mathématicien donne à ses recherches — direction qui tient forcément à un choix entre des possibles.

Nous avons vu plus haut que, pour H. Poincaré, ce « choix » conduit le mathématicien aux constructions non seulement les plus commodes quand à leur application à la réalité physique, mais encore les plus simples en *elles-mêmes*. L'intuition qui le guide, c'est l'intuition de ce qu'un édifice mathématique doit être, dans sa totalité, pour être à la fois le plus harmonieux et le plus riche, le plus beau et le plus

(30) **E. Rignano.** Même ouvrage, p. 270.
(31) **E. Rignano.** Idem, p. 270.

fécond par les conséquences qu'on en peut tirer, et par les liens qui le rattachent à d'autres branches des mathématiques. En un mot, c'est l'intuition de ce qu'il doit être, pour présenter le maximum de simplicité, et aussi pour introduire dans la science le maximum de clarté et d'ordre, — de simplicité, là encore.

Cette théorie des mathématiques considérées comme produit de l'activité libre et décisoire de l'esprit, guidé par une intuition spéciale au devant des combinaisons les plus simples (et les plus commodes aussi pour l'usage qu'on en veut faire), est entièrement acceptée par M. Ed. Goblot, qui reprend, à propos, par exemple, des géométries possibles et de la plus avantageuse « soit à déduire, soit à appliquer » (32) les idées fondamentales de H. Poincaré.

Quant à E. Mach, on sait le rôle que joue, pour lui, l'idée de la tendance, non seulement des mathématiques, mais de toutes les sciences (et cela dans la mesure où elles sont plus parfaites), à l'« économie de pensée ». Il s'agit, il va sans dire, là, de pensée vivante, effective, et pas de cette pensée impersonnelle dont nous avons parlé dans nos chapitres consacrés à l'étude de la logistique. D'ailleurs, Mach présente cette tendance à la simplicité, à l'« arrangement économique, harmonieux, organique des pensées, que nous ressentons comme un besoin biologique », comme quelque chose qui « dépasse de beaucoup ce qu'exige logiquement l'absence de contradiction » (33), — comme, en somme, quelque chose d'*extra-logique*. Le mot « *harmonieux* » qu'il emploie ici, montre de plus que, pour lui aussi, comme pour H. Poincaré, une « certaine sensibilité esthétique » n'est pas étrangère à l'orientation du mathématicien vers les constructions les plus simples, et cela nous éclaire déjà en partie sur la nature du simple, selon sa conception.

Chez Ph. Chaslin, cette préférence accordée en mathématiques, parmi plusieurs constructions possibles, à la plus simple, est, aussi, mise nettement en valeur, dans plusieurs cas intéressants où elle se présente. Qu'on se rappelle seulement ce que, tout au début de cette étude, nous avons dit sur le

(32) **E. Goblot.** « Traité de Logique », pp. 326-327.
(33) **E. Mach.** « La connaissance et l'erreur », p. 189.

rôle de la notion de simplicité dans le choix d'une « fonction résolvante », alors qu'il s'agit de résoudre une équation du second degré, ou de degré supérieur, (inférieur au cinquième), par le moyen des radicaux. Il y a là, dans la détermination de cette fonction des racines, une trouvaille de l'intuition mathématique, tout à fait comparable à celles auxquelles pense H. Poincaré quand il parle de la recherche des combinaisons les plus simples, constante en mathématiques.

Il est à remarquer que, dans tout ceci, c'est surtout de la simplicité d'enchaînements mathématiques qu'il s'agit. C'est, ici, encore, elle, avant tout qui est recherchée. Mais la simplicité des notions en elles-mêmes a aussi son importance chez les philosophes à tendances subjectivistes que nous étudions H. Poincaré a montré que les « faits simples » sont ceux que le chercheur examine de préférence dans toutes les sciences (34), en mathématiques comme ailleurs. M. Goblot insiste sur l'intérêt, en mathématiques, des « cas spéciaux privilégiés ». Notamment dans les démonstrations géométriques, l'étude de certains « êtres mathématiques » particuliers, est, comme il le remarque, féconde en enseignements généraux, en raison précisément de la simplicité de ces « êtres ».

Tout ceci donne un intérêt particulier à l'étude de ce que tous ces philosophes entendent au juste par « simplicité », en mathématiques.

Comme nous le disions plus haut, ils se rapprochent de H. Poincaré par plus d'un côté, mais se séparent aussi de lui quelquefois.

Dans quelle mesure, la notion de simplicité mathématique telle qu'elle se dégage de leurs analyses, — et, en particulier, de celles de M. Ed. Goblot, — procède-t-elle de la même conception fondamentale ? Dans quelle mesure la même idée essentielle, peut-elle et doit-elle servir à en rendre compte ?

Tel est le problème qui se pose maintenant.

---

(34) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », pp. 10 et suivantes.

CHAPITRE XIII

QU'EST-CE QUE LA SIMPLICITE DES « ENCHAINEMENTS MATHEMATIQUES » POUR CES PHILOSOPHES ?

(pour MM. Ed. Goblot, Ph. Chaslin, etc...)

M. Ed. Goblot n'a rien dit sur ce qu'il entend par une démonstration, un raisonnement mathématique « simple ». Il n'a pas de théorie explicite de la simplicité des « enchaînements » mathématiques, en d'autres mots, comparable à celle qui se dégage d'elle-même de tant d'études de H. Poincaré. Il a seulement parlé de ce en quoi consiste, pour lui, l'essence de toute démonstration : « *construire* une conséquence, avec l'hypothèse » (1) pour établir que cette hypothèse entraîne une telle conséquence ; et il a insisté sur le fait que les opérations constructives sont des opérations exécutées mentalement, sans être pour cela, des opérations de l'esprit. Ce sont, en leur principe, des actions extérieures, par exemple des mouvements (2). Il nous a montré par l'exemple, dans son traité de Logique, en quoi consiste le travail de celui qui raisonne :

« Démontrer, dit-il, que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, c'est *construire* avec trois angles égaux à ceux du triangle, une somme d'angles qu'on sait égale à deux droits. Cette démonstration s'appuie sur des théorèmes antérieurement démontrés qu'on applique par syllogismes. Par un point donné, on peut toujours mener une

(1) **E. Goblot.** « Traité de Logique », p. 272.
(2) **E. Goblot.** Idem, p. 272.

parallèle à une droite donnée (possibilité de l'opération), et on n'en peut mener qu'une (nécessité du résultat) ; donc, par un sommet A du triangle A B C, je puis mener une parallèle au côté opposé B C, et cette droite A D sera unique (fig. 20). Il s'agit ici d'une construction graphique, mais construire la conséquence, ce n'est pas résoudre le problème de construction. La parallèle A D est, ici, un moyen d'obtenir, adjacent à l'angle B Â C, un angle C Â D égal à Ĉ, puis, adjacent à l'angle C Â D, un angle D Â E, égal à l'angle B̂. L'égalité des angles résulte, par syllogismes, de l'application de théorèmes antérieurs, mais *l'essence du raisonnement est la construction d'une certaine somme d'angles.*

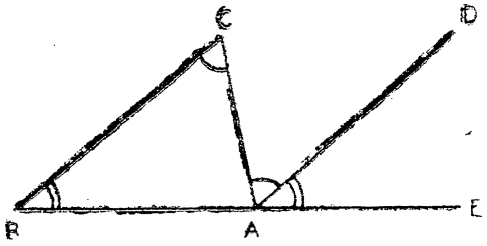


Fig. 20

Démontrer que, dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, c'est *construire,* avec la proportion, l'égalité de ces deux produits. Soit la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ses deux termes par une même quantité ; donc la fraction $\frac{a}{b}$ ne changera pas de valeur si je multiplie ses deux termes par d, non plus que la fraction $\frac{c}{d}$, si je multiplie ses deux termes par b. Le *but* de cette opération est d'écrire $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, et, par suite ad = bc » (3).

Si on examine ces démonstrations, on voit que chaque opération nouvelle, — tracé d'une certaine droite, ou multiplication, peu importe, — provient de l'application, à un cas particulier, d'une règle ou vérité déjà admise. Mais, d'autre part, cette vérité n'est pas n'importe laquelle, parmi celles qui seraient applicables à ce cas. Il se fait, entre elles, un choix.

(3) **E. Goblot.** « Traité de Logique », p. 275.

Ce choix est guidé par le sentiment de l'unité organique de la démonstration, dont le mathématicien a plus ou moins clairement conscience. Ainsi, dans la première démonstration, par exemple, la construction de AD et de AE, a lieu, comme le remarque lui-même M. Goblot, *en vue* de l'obtention d'une certaine somme d'angles, jugée intéressante. Et le mathématicien, qui sait où il veut aller, *sent* d'avance (plutôt qu'il ne juge), que c'est elle, plutôt qu'une autre, qui rendra cette somme en quelque sorte tangible ; et son activité se dirige vers elle tout naturellement. De même, dans la deuxième démonstration, l'idée qu'il y a intérêt à opérer une double multiplication des fractions en présence, est l'âme même du raisonnement. C'est que le mathématicien *sent*, dans cette opération, le moyen de mettre en évidence immédiatement le résultat ad = bc. Il a, à l'avance, l'idée plus ou moins claire du raisonnement fini, comme l'architecte a l'idée du bâtiment dont il construit le plan. Et cette idée le guide. Elle lui dicte, pour ainsi dire, ce qu'il doit faire, à chaque phase de sa construction progressive.

Henri Poincaré dirait qu'il y a chez lui, — et il y insisterait, — une activité créatrice comparable à celle de l'artiste qui, tout en opérant, est constamment guidé par l'idée plus ou moins claire, qu'il porte en lui, de la forme définitive à laquelle il aspire ; qui sent, sans pouvoir sans doute l'exprimer, le rapport qui existe entre cette forme définitive et chacun des gestes qu'il accomplit. La comparaison de l'architecte nous est d'ailleurs venue comme s'imposant d'elle-même, avant que nous songions à rappeler la pensée de H. Poincaré. Mais il paraît bon de la rappeler, pour suggérer combien cette idée d'action constructive, mise en évidence par M. Ed. Goblot dans les enchaînements mathématiques, en particulier dans les démonstrations dont il parle surtout, est proche de celle d'œuvre d'art, que nous avons trouvée chez le géomètre-philosophe. Une *construction*, de quelqu'ordre soit-elle, dès qu'elle est empreinte de finalité, (et quelle construction intelligente ne l'est pas ?), dès qu'elle suppose un choix de matériaux, une combinaison d'éléments selon un certain thème plutôt qu'un autre, tient forcément, nous semble-t-il, à la nature de l'œuvre d'art. Et la nature des opérations mathématiques peut bien être autre pour M. Goblot qu'elle ne l'est pour H. Poincaré, ces opérations peuvent bien en dernier

ressort se réduire à des gestes concrets, à des manipulations, à tout ce que l'on voudra, et tous les raisonnements mathématiques peuvent bien ne pas se ramener au fameux raisonnement par récurrence ; du moment que, pour lui, l'« essence du raisonnement » réside en une certaine « *construction* », libre, guidéepar la notion même de sa *fin,* on peut dire que, en ce qui concerne le problème de la nature profonde des enchaînements mathématiques, la position de M. Ed. Goblot est, *au fond,* celle de H. Poincaré.

M. Goblot ne fait nulle part la théorie de la simplicité dans les enchaînements mathématiques. Cela n'empêche pas qu'il donne, — comme H. Poincaré, — une importance exceptionnelle à la notion de simplicité. Il en fait le principe du choix entre les diverses théories mathématiques possibles, partant, entre les divers indémonstrables dont chacun peut servir de base à une théorie différente. Ces indémontrables, comme il le dit, « ne sont pas des vérités. Ce sont des hypothèses que nous n'avons pas de *raisons* de tenir pour vraies, mais que nous avons des *motifs* de prendre pour règles » (4). La simplicité des constructions que nous pouvons édifier sur un « indémontrable », est, de tous les motifs que nous avons de le prendre pour règle, de beaucoup le plus important — si elle n'est le seul. «Il y a une infinité de géométries possibles parmi lesquelles la géométrie ordinaire est la plus simple et partant la plus commode » (5), et c'est là pourquoi nous l'adoptons de préférence, comme l'avait déjà remarqué H. Poincaré.

Il semble, d'après ces analogies, et, disons-le (quoique nous n'avons pas, malheureusement, de citations précises à l'appui), d'après, aussi, ce qui nous est resté en mémoire des propos de M. Goblot lui-même, que ce dernier accepterait entièrement, en ce qui concerne la nature de la simplicité dans les enchaînements mathématiques, les conclusions que nous avons cru voir se dégager des réflexions de H. Poincaré sur les démonstrations à la fois simples et belles. L'idée que c'est l'édifice scientifique le plus simple qui est en même temps le plus stable, parce que le plus *beau,* nous a semblé, d'ail-

(4) **E. Goblot.** « Traité de Logique », p. 328.
(5) **E. Goblot.** Idem, p. 327.

leurs, au cours de ses entretiens, ce qui séduisait le plus notre maître, dans la pensée de H. Poincaré. Au fond, de même que H. Poincaré, de même aussi que Gaston Milhaud, ce commentateur des plus artistes entre tous des mathématicien-philosophes (6), M. Ed. Goblot est un artiste. Pour lui, comme pour H. Poincaré, c'est l'intuition vivante, initiale, du chercheur, qui donne à la démonstration son unité organique, comme l'inspiration du peintre ou de l'architecte, constamment présente, organise et harmonise les grandes lignes du tableau ou de l'édifice, et leurs détails autour de ces grandes lignes, en un ensemble original et un. Pour lui aussi, à y regarder de près, il semble qu'il y ait dans une démonstration autant de parties principales qu'il y a d'étapes permettant à celui qui la lit (ou au mathématicien lui-même, après coup), de retrouver le sentiment de l'unité de l'ensemble, appréhendée dès le début, du moment que la voie a été trouvée avec certitude. Et les applications de théorèmes au cas singulier en question, se groupent naturellement dès qu'elles contribuent à établir un même point, jugé nécessaire à établir solidement, avant d'aller plus loin. Pour lui aussi, semble-t-il, la simplicité d'une démonstration, ou en général, d'un enchaînement mathématique, ce sera la simplicité du *schéma* que dessinent ses grandes lignes de construction — schéma dans lequel les détails viennent se fondre, d'eux-mêmes, et qui est l'âme même de la démonstration.

Sans doute, s'agit-il ici d'un schéma de construction, en dernier ressort « pratique ». Cela ne lui empêche pas de rester un schéma, c'est-à-dire, comme nous le disions à propos de la théorie de H. Poincaré, une *forme,* une loi de composition. Plus la loi de sa composition est simple, et plus l'action est directe ; plus il paraîtra que l'action elle-même, la construction effectuée en un certain nombre d'étapes, est *simple.* M. Goblot ne dit-il pas, dans le premier exemple de démonstration que nous avons relevé, que « l'essence du raisonnement est la construction d'une certaine somme d'angles » (7). Il s'agit bien là d'une construction *directe* s'il en est ; tirer un certain trait, montre qu'on l'a déjà entièrement imaginée.

(6) Nous faisons allusion au beau livre de **G. Milhaud : « Les philosophes-géomètres de la Grèce ».**

(7) **E. Goblot.** « Traité de Logique », p. 275.

Mais toutes les constructions mathématiques sont ainsi senties d'avance par l'intuition du mathématicien, dès que celui-ci est « sur la voie ». Ce qui fait que celle-ci est simple, c'est justement qu'il suffit de tirer un certain trait, pour qu'elle soit prête ; c'est que l'ensemble des directives d'action qui en constitue la charpente, est réduite au minimum.

Que les parties de la démonstration, ces séries d'applications de vérités connues, prises pour règles, à un cas singulier, représentent, en fin de compte, des séries d'actes manuels, de « mouvements » comme dit M. Goblot, cela n'a donc pas d'importance. C'est le schéma, la loi de création pratique qui les suggère, qui en a. La démonstration la plus simple, — et d'une façon générale, l'enchaînement mathématique le plus simple, — ce sera, pour M. Goblot, la construction qui arrive le plus directement à son achèvement. H. Poincaré ajouterait : « Et ce sera la plus belle ». M. Goblot ne l'écrit pas, mais il y a toutes les raisons de croire qu'il le pense et qu'il le sent. Et cette rectitude, que nous avons rencontrée dans les deux démonstrations rapportées plus haut, tient pour lui, comme l'élégance sur laquelle avait insisté H. Poincaré, à un caractère essentiel de la loi de création de l'enchaînement (qui est ici une loi d'action), à la « rectitude » de son schéma, en un mot à sa *forme*.

On pourrait remarquer que, souvent, les constructions simples, se font en un petit nombre d'étapes pratiques (comme ici, par exemple, par un simple trait de plume, ou une simple multiplication) et il semblerait que la démonstration la plus simple, ce soit celle dont l'ensemble, en somme, réunit le moins de gestes, d'actes manuels indispensables, réels ou figurés, puisque, pour M. Goblot, tout raisonnement mathématique symbolise, en fin de compte, un enchaînement de tels actes. Mais, ce petit nombre des opérations (du moins des principales), qui mènent à l'achèvement de l'édifice, ce n'est pas autre chose qu'une conséquence du caractère de la loi d'action, observée dans de telles constructions « simples » — autrement dit, une conséquence du caractère du *schéma* autour duquel ces constructions prennent corps. L'importance accordée par M. Goblot à la simplicité de certaines constructions (telles que, par exemple, celle que le géomètre *préfère*),

suffirait, d'ailleurs, à suggérer qu'il la rattache à quelque chose qui leur est *essentiel.*

*
**

Nous avons, au début de cette étude, vu l'importance attachée par Chaslin à la simplicité des enchaînements algébriques, simplicité à laquelle est sacrifiée, quand il le faut, celle des notions qui s'enchaînent les unes aux autres.

Sans doute, comme nous l'avons remarqué, s'agit-il là, avant tout, d'une simplicité d'écriture, les transformations de formules étant, en algèbre, l'essentiel. Mais demandons-nous quand même en quoi elle consiste, car chacune de ces transformations est un moment dans une œuvre constructive positive, au même titre que chacune des opérations dont parle M. Goblot. Comme pour lui d'ailleurs, nous avons vu, elles représentent pour Chaslin (comme toutes les opérations mathématiques), une transposition d'opérations réelles, manuelles (8).

Demandons nous donc, par exemple, en quoi l'adjonction de $\frac{p^2}{4}$ à l'équation classique du second degré « rend plus simple cette équation » (9), c'est-à-dire, pour interpréter la pensée de l'auteur (10), rend plus simple la suite de transformations qui mène, de la formule de l'équation posée, à celle d'où ressort la valeur de l'x, en fonction des lettres, figuratives des nombres connus.

Si, nous étant posé cette question, nous nous en référons aux dites transformations et au commentaire de Ph. Chaslin, nous voyons qu'il s'agit, non de changer la signification de l'équation, — « on ne peut rien changer des relations entre les données et l'inconnu » (11), et ce sont justement ces relations qui font de l'équation une réalité, un « être » mathé-

---

(8) Voir plus haut, p. 283.

(9) **Ph. Chaslin.** « Essai sur le mécanisme psychologique des opérations de la mathématique pure », p. 144.

(10) Il s'agit, ici, de la simplicité dans les « enchaînements » mathématiques. Or, Chaslin nous dit (ouvrage cité, p. 235) qu'une équation est un « être » mathématique. Mais, dans ce qui suit, il n'est question des relations internes, interchangeables, de l'équation, qu'en ce qu'elles influent sur la résolution de celle-ci, qui est bien, elle, un enchaînement de transformations.

(11) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 144.

matique, — mais de rendre *plus direct* le passage de la formule de laquelle on part, à celle à laquelle on tend. La résolution de l'équation à laquelle, par l'adjonction de $\frac{p^2}{4}$, est ramenée la proposée, est *plus simple*, parce qu'elle s'accomplit d'un seul coup. Ph. Chaslin le fait lui-même ressortir :

« $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$, dit-il,

équivaut à

$$\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

et *est résoluble immédiatement*, puisqu'elle est équivalente à

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q.} \text{ » (12)}$$

« *Immédiatement* », c'est là le mot important. C'est lui qui exprime la simplicité de la loi d'action selon laquelle on passe de la formule $\left(x + \frac{2}{p} \right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$ à la formule

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

en d'autres termes, la simplicité de l'opération qui consiste à extraire une racine carrée. Et c'est parce que la résolution de l'équation après l'adjonction de $\frac{p^2}{4}$ se ramène, précisément, à une pure extraction de racine carrée, que Chaslin a dit, plus haut, que cette adjonction était un truc habile, en vue d'une simplification.

On pourrait observer que cette extraction de racine est *une seule* opération, et être tenté de faire dépendre la simplicité mathématique d'un enchaînement, du *petit nombre* des opérations qui s'y suivent. Sans doute, ce petit nombre n'est-il pas étranger à la simplicité de l'enchaînement, mais, ne voir *que* lui, ce serait, semble-t-il, traiter trop les opérations comme des éléments détachables, indépendants, par nature, les uns des autres, sans lien profond entre eux ; en d'autres mots, ce serait méconnaître l'unité d'action synthétique de

---

(12) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 144.

l'enchaînement, si importante, pourtant, aux yeux de Chaslin, comme aux yeux de M. Goblot.

« *Immédiatement* » cela veut non seulement dire : « sans transformations intermédiaires », « par une seule opération », « en une seule étape », mais encore ; « par une *action directe* » au sens organique du mot. La différence peut paraître inexistante à qui n'essaye pas de la *sentir,* mais s'attache strictement au sens des termes en eux-mêmes. Elle réside en ce que la deuxième expression vise ce qu'on pourrait appeler l'essence même de l'action envisagée, alors que la première n'a trait qu'à ses manifestations saisissables de l'extérieur.

Des remarques analogues s'appliqueraient au choix de la « fonction résolvante », dont Ph. Chaslin parle tant, fonction qui « pour être utilisable doit être la plus simple possible » (13). Ce qui ici importe surtout (tout le contexte le montre), c'est la simplicité de la résolution de l'équation auxiliaire, dont, au moyen de permutations des racines de la proposée, les racines sont calculées à l'aide de la fonction dite « résolvante », de ces racines. Sa résolution doit être plus simple que la résolution de la proposée, sans quoi il n'y aurait aucun avantage à la calculer. Or, que voyons-nous ? Cette équation résolvante est toujours (quand elle est utilisable), *de degré inférieur* à la proposée — du second degré si la proposée est du troisième, du troisième si la proposée est du quatrième, etc... Si donc nous essayons de voir *pourquoi* la résolution d'une équation d'un certain degré est toujours plus simple que celle d'une équation de degré supérieur, nous aurons montré ce qui, pour Ph. Chaslin, fait la simplicité de l'équation résolvante par rapport à la proposée, et éclairé la question de l'idée que se fait cet auteur de la simplicité des enchaînements mathématiques.

La fonction résolvante prend autant de valeurs qu'il en est qui correspondent aux différentes permutations possibles des racines de la proposée (14). Ces valeurs sont les racines de l'équation résolvante. Les permutations en question forment, pour chaque équation proposée, un groupe, différent suivant le degré de l'équation. — Et, plus le degré de l'équation est petit, — en d'autres termes, et d'après ce que

(13) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 145.
(14) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 151.

nous citions de Ph. Chaslin, plus l'équation est simple, — et moins ce groupe, *complètement décomposé*, contient de permutations non-équivalentes les unes aux autres, comme il est facile de s'en rendre compte en examinant les groupes donnés dans le livre de Ph. Chaslin, chacun avec ses subdivisions en sous-groupes invariants qui le simplifient ; et plus, comme nous le disions au début de cette étude, ce groupe est *complètement ordonné* suivant un schéma permettant sa décomposition aisée, et harmonieuse, parce que *symétrique* jusque dans le détail en même temps que *directe*.

C'est pour ces raisons que, plus son degré est petit, et plus une équation admet une résolution immédiate.

Ce groupe de permutations, correspondant à une équation donnée, c'est, dit Ph. Chaslin, au même titre que l'est, par exemple, un nombre déterminé, un « être » mathématique (15). Mais on peut aussi, si l'on veut, le regarder comme un « enchaînement », et, de toute façon, son importance est telle, par le fait que le degré aussi bien que toutes les particularités de l'équation, ont en lui leur source, que nous ne pouvons pas le négliger. La simplicité de cet enchaînement de transformations qu'est la résolution de l'équation, est liée à celle de l'équation elle-même en tant qu'« être » mathématique, donc à la sienne. Or, qu'est-ce donc que ces permutations non équivalentes des racines, sinon les opérations constitutives, les éléments mêmes du groupe, auxquels leur nom (*permutations*) suffit à garder tout leur sens de symboles d'opérations manuelles, concrètes ? éléments, de l'ordre desquels dépend, comme nous le disions, et le nombre et la variété, et l'ordre des opérations qui s'enchaînent, dans la résolution de l'équation, qui ne font, elles, que développer ce que ce « groupe » représente déjà de possibilités ? La simplicité de l'enchaînement mathématique serait bien, là encore, — puisque le groupe peut être regardé comme un enchaînement, un autre « groupe » ayant bien été envisagé comme tel, par nous, lors de notre examen de la théorie de l'espace chez H. Poincaré, — due au petit nombre et à la disposition particulière de ses éléments, autrement dit, à sa loi particulière de composition (et de décomposition), à son *schéma*

(15) **Ph. Chaslin**. Ouvrage cité, p. 236.

en quelque sorte de matérialiser.
structurel caractéristique, à la *forme* que les opérations manuelles qu'il représente, permettraient, par leur succession,

On arriverait à des conclusions analogues en se rapportant à ce que dit Ph. Chaslin de la simplicité des premières fonctions continues étudiées, représentant les variations continues de certaines grandeurs empiriques (16). C'est à l'uniformité de leur développement, c'est-à-dire à l'unicité de la formule de dépendance qui relie entre eux les paramètres, qu'elles doivent, semble-t-il, d'être regardées comme *plus simples* que celles où la discontinuité se trouve représentée — bien que ces dernières aient aussi leurs prototypes dans le monde physique. Et, cette unicité, à quoi correspond-elle, sinon, en général, au moins grand nombre des relations différentes englobées dans leur signification mathématique, ou, plus sûrement, au schéma beaucoup plus élémentaire qu'on peut, en quelque sorte, attribuer à l'ensemble de ces relations ? Quand Ph. Chaslin encore, parlant de l'artifice qui consiste à considérer dx, dy, « tantôt comme un nombre extrêmement petit, tantôt comme 0 » (17), dit que « cela simplifie les calculs » (18) ; que, c'est-à-dire, cela simplifie les enchaînements d'opérations mathématiques (symbolisant toujours, à un certain degré, des opérations concrètes), qui amènent, par exemple, à l'évaluation d'aires-limites, cela veut dire que les opérations en question, seraient, sans cet artifice, d'une part, sans doute beaucoup plus nombreuses, et de l'autre, beaucoup plus variées.

D'ailleurs, Ph. Chaslin le dit lui-même : en mathématique « c'est l'interaction et la superposition des opérations qui autour d'un schéma différent, pénétrant leur ensemble d'un plus diverses ; que leur ensemble se présenterait avec beaucoup moins *d'ordre* et *d'unité*. Quelque soit, en d'autres termes, le point de vue auquel on se place, pour déterminer ce qu'on pourrait appeler les éléments de cet enchaînement mathématique, ceux-ci seraient, sans l'artifice sus-dit, organisés ordre moins parfait.

---

(18) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 193.
(19) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 253.
(16) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 171.
(17) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 102.

amène une complexité extrême » (19). Interaction et super-

position, c'est-à-dire, multiplicité et enchevêtrement ; en d'autres termes, désordre, au moins dans une certaine mesure, si l'on préfère, ordre moins parfait ; manque de discrimination aisée des éléments, de clarté dans leur disposition, c'est-à-dire, pour le moins, caractère composite du schéma selon lequel ils se groupent, de la loi de l'action synthétique par laquelle toutes ces opérations se succèdent, comme obéissant à une finalité interne.

N'est-ce pas là saisir, en quelque sorte, ce que Chaslin entend par simplicité des enchaînements mathématiques, par une évocation de son contraire ?

*
**

Et il semble que, si nous nous demandions, maintenant, ce que pensent E. Mach et Rignano de la question que nous étudions, c'est encore à la même conclusion que nous aboutirions. Pour eux, comme nous l'avons vu, toutes les opérations qui se succèdent dans la facture même d'un enchaînement mathématique, sont l'équivalent mental d'opérations matériellement exécutables. La pensée mathématique tire sa valeur et sa signification de cette transposition du pratique au mental. Dans ce cas, toute « économie de pensée », pour reprendre le mot de Mach, — et, la simplicité mathématique, avons-nous vu jusqu'ici, est considérée par tous comme une certaine économie de pensée, — doit résider, avant tout, dans le fait, non seulement du petit nombre de ces opérations « mentalement exécutables », base même de la pensée, mais encore de la facilité de *passer* de chacune d'elles à toutes les autres. Et cette facilité est garantie par le caractère *élémentaire* de la loi de ce passage. C'est encore la conséquence du schème particulier selon lequel se succèdent les opérations, schème qui se traduit, dans leur succession (dans leur *trame*, plus exactement), par un ordre plus directement saisissable.

*
**

Nous pouvons donc dire, d'une manière générale, et malgré les divergences qui peuvent exister entre eux, que les mathématiciens et philosophes, épistémologues que H. Poincaré rangerait parmi ceux qu'il appelle « pragmatistes », font consister la simplicité des enchaînements mathématiques dans le caractère spécial du *schéma*, de la *forme*, que supportent ces enchaînements,

Qu'ils mettent à sa base, comme le fait Henri Poincaré, l'idée d'une unité synthétique *esthétique* de ces enchaînements, ou que, comme les autres philosophes « subjectivistes » que nous avons mentionnés au cours de ces deux derniers chapitres, — comme M. Ed. Goblot surtout, — ils voient, avant tout, en elle, le trait distinctif d'une certaine action effectuante et créatrice, c'est toujours, en dernier ressort, à une *forme* que l'on doit, dans leur esprit, se référer, apparemment, pour rendre compte d'elle. La différence vient de ce que c'est là, surtout par l'impression subjective d'élégance, que se décèle l'existence d'une telle forme, alors qu'ici, c'est par la conscience plus ou moins nette d'une loi de construction pratique, facile à suivre.

CHAPITRE XIV

QU'EST-CE DU POINT DE VUE « SUBJECTIVISTE » EN GENERAL, QUE LA SIMPLICITE DES « NOTIONS » MATHEMATIQUES ?

Pour H. Poincaré, tout comme pour n'importe lequel des Logisticiens, et pour les épistémologues de tendances «subjectivistes» comme les autres, — et l'on peut, croyons-nous, ajouter : pour tous les mathématiciens, — une « notion », un « objet » mathématique, est, avant tout, un *objet idéal*.

Cela peut paraître banal tant cela est évident. Mais il ne semble pas inutile de revenir un peu sur ce point de départ, pour bien préciser la nature de ce dont nous voulons parler.

Cet *objet idéal*, cet être mathématique, peut bien, contrairement à l'opinion de certains philosophes, avoir son prototype imparfait dans les objets de l'expérience sensible. C'est là ce que, en particulier, H. Poincaré affirme, pour ce qui est des notions des corps géométriques, non moins que des « groupes » qui sont à la base de notre idée de l'espace, et dont nous avons parlé dans un des chapitres précédents. Il n'en demeure pas moins que, du point de vue mathématique, c'est-à-dire, en tant qu'il est matière à étude scientifique, en tant que ses propriété, métriques ou autres, intéressent le géomètre, l'arithméticien ou l'analyste, cet « objet » est tout entier contenu dans la définition que le mathématicien en donne, et qui suffit à son existence. Son existence reste une « existence de raison ». « Un être mathématique *existe*, écrit Henri Poincaré, pourvu que sa définition n'implique pas contradiction, soit en elle-même, soit avec les propositions antérieurement admises » (1).

(1) **Henri Poincaré**. « La Science et l'Hypothèse », p. 59.

Nous demander, donc, ce que c'est, pour H. Poincaré, et pour les quelques philosophes que nous venons de mentionner ; ce que c'est, en général, pour ceux qui ont des mathématiques une conception « subjectiviste » — pour ceux que H. Poincaré appellerait des « pragmatistes » par opposition aux « cautoriens », — qu'un « objet » mathématique « simple », et quand est-ce qu'un tel objet est *plus simple* qu'un autre, c'est donc, apparemment, nous demander ce que c'est qu'une définition mathématique simple, et quand est-ce qu'une telle définition est plus (ou moins) simple qu'une autre. Mais il faut ici s'entendre. Il ne s'agit pas des avantages que peut présenter une définition sur une autre d'un même objet, d'une même notion mathématique. Il est évident que l'on peut définir une même notion de plusieurs façons, et que, en général, suivant l'usage qu'on en veut faire, suivant le point de vue auquel on se place, une définition est meilleure que l'autre. Nous avons vu, tout au début de cette étude (2), que les mathématiciens préfèrent toujours la définition la plus simple, et que c'est pourquoi on définit le triangle « un polygone à trois côtés », au lieu, par exemple de l'appeler, « un polygone dont la somme des angles est égale à deux droits ». Cela a même été l'un des arguments qui nous ont montré l'usage important de la notion de simplicité en mathématiques.

Mais, quelle que soit la définition adoptée, l'« objet » défini reste le même en ce sens qu'on *aurait pu* (qu'on *aurait dû*, même), en adopter une autre définition plus parfaite ; *qu'on aurait pu* (qu'on *aurait dû*), choisir la plus parfaite, celle qui, dans l'examen de l'ensemble de toutes ses propriétés, et de leur enchaînement met le plus de clarté. Quand nous disons que l'existence de l'objet tient tout entière dans sa définition, nous voulons dire que, une fois celle-ci posée, chaque propriété particulière à l'« objet » est connue plus ou moins directement, dans ses rapports avec les autres propriétés. En réalité, *c'est dans l'ensemble de ces rapports que l'existence de l'« objet » tient tout entière.* Et, quelle que soit la définition, pourvu qu'elle soit bonne, ces rapports restent les mêmes. La plus ou moins grande valeur de la définition

(2) Voir plus haut, Ire partie, Chapitre III.

est une plus ou moins grande valeur « pratique ». La plus ou moins grande simplicité de la définition du même « objet » ne change pas la simplicité ou la complexité de l'objet, mais traduit la plus ou moins grande facilité avec laquelle nous prenons connaissance de lui.

C'est ici, la simplicité de l'« objet », de la notion, qui nous intéresse, — non pas indépendamment de toute définition, ce qui serait sans doute absurde, mais telle qu'elle apparaît à travers les diverses définitions également acceptables de l'« objet » quand il y en a plusieurs, ou à travers la plus parfaite quand il y en a une nettement plus parfaite, ce qui arrive aussi quelquefois. Or, comme nous le disions, la notion, l'« objet mathématique », n'est pas autre chose qu'un ensemble de relations. C'est ce qu'exprime H. Poincaré en disant : « Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets ; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse » (3). Et c'est encore pour cela que toute définition qui évoque un être mathématique (une figure déterminée par exemple), n'est bonne que si « elle sert dans les démonstrations » (4), c'est-à-dire, si elle est liée logiquement à toutes les propriétés de la notion en question, si elle met en évidence ces relations intrinsèques.

Mais, avant d'aller plus loin, on a le droit de se poser la question (dont la réponse ne peut, d'ailleurs, que servir à éclairer la suite de ce que nous aurons à dire) ; une notion mathématique n'étant autre qu'un ensemble de relations abstraites —, en d'autres termes, un ensemble d'opérations possibles ; (et. toute opération mathématique pouvant, en fin de compte, se ramener, suivant certains « pragmatistes » au moins, tels que M. E. Goblot, soit à un acte manuel, soit à la figuration d'un ou plusieurs actes tels, nous voilà, du même coup, singulièrement rapprochés de l'expérience concrète, où, pour H. Poincaré lui-même, plongent les racines de toute pensée logique vivante : où se cachent les causes déterminantes de tout choix fécond en mathématiques), — en quoi cette

(3) H. Poincaré. « La Science et l'Hypothèse », p. 32.
(4) H. Poincaré. « Science et Méthode », p. 129.

notion diffère-t-elle, en somme, des « enchaînements » mathématiques dont il s'agissait dans les pages précédentes ? N'avons-nous pas dit dans cette étude même que « une relation ou une suite de relations, constituent un «enchaînement» mathématique toutes les fois que, ce qui, mathématiquement nous intéresse est le seul lien qui existe entre les termes de cette relation, ou entre les relations de cette suite, alors que, chacun de ces termes, pris isolément, de même que chacune de ces relations, prise isolément, ne présente, de ce point de vue, aucun intérêt » (5) ? Et voici que les notions elles-mêmes nous apparaissent comme des ensembles de relations dont chacune n'a d'intérêt mathématique que par la présence de toutes les autres.

Devons-nous conclure que, du moins pour les « pragmatistes », les notions mathématiques n'existent pas à proprement parler ? Qu'on ne peut, en mathématique, envisager que des « enchaînements » ? Cela expliquerait, semble-t-il, comment on ne trouve, chez H. Poincaré, à peu près aucun jugement exprimé sur la simplicité des notions. Nous avons vu, au début de cette étude, que J. Nicod distingue, et oppose jusqu'à un certain point, la simplicité des enchaînements mathématiques et celle qui pourrait se trouver dans les notions, dans les « êtres » ou « objets » mathématiques eux-mêmes, en particulier pour montrer que Henri Poincaré, en parlant de la constante recherche de la simplicité dans sa science, (comme dans celle des physiciens qui lui est aussi familière), n'a en vue que la première. La seconde ne lui viendrait-elle point à l'esprit, que parce que la « notion » n'est qu'un enchaînement d'une certaine sorte ? Mais cela, au contraire, nous semble-t-il, devrait lui faire rechercher la simplicité dans les notions au même titre que la première.

Mais du seul fait qu'uniquement la simplicité des enchaînements compte pour lui, tout porte à croire que les notions, susceptibles de plus ou moins grande simplicité, sont, — fussent-elles des enchaînements d'une certaine sorte, — fort différentes, au fond des « enchaînements » que nous avons envisagés jusqu'ici. Nul doute qu'elles le sont, en effet, du point de vue logique, quand on les considère au sein des « enchaî-

(5) Voir plus haut, p. 94.

nements » eux-mêmes. Nous avons déjà effleuré ce point (6). Il n'est pas superflu d'y revenir, avant d'en arriver à une autre différence dont nous voulons parler, et qui, elle, nous aidera à préciser pourquoi la simplicité de ces « notions » ou « objets » mathématiques, nous semble presque moins malaisée à définir que celle des enchaînements, bien que les textes qui y font allusion soient très rares.

Logiquement donc, — indépendamment même du point de vue mathématique — une « notion » (l'idée d'une certaine chose) pourrait s'admettre, à la rigueur, en dehors de tout enchaînement, comme un individu absolu ; mais un « enchaînement » ne se conçoit pas, quel qu'il soit, sans qu'il y ait des éléments unis entre eux de quelque façon. Que ces éléments soient, à leur tour, des enchaînements d'éléments différents, et ceux-ci de même, c'est possible, — encore qu'il faudra bien, arrivé à un certain point, s'arrêter : ἀνάγκη στῆναι. En mathématique aussi, on s'arrête. Il y a des notions, comme le point par exemple, qui sont des individus absolus, des indéfinissables purs et simples. Dire que les notions mathématiques en général ne sont pas cela, qu'elles sont des ensembles de relations, c'est-à-dire que leur conception exige celle de l'enchaînement de plusieurs choses autres qu'elles, ce n'est pas dire qu'il n'existe pas de notions mathématiques, mais c'est dire que les choses qu'on nomme ainsi dans les théories, les démonstrations, les raisonnements, ne sont pas de purs indéfinissables. Car, tout ce qui n'est pas un pur indéfinissable, est nécessairement, en quelque façon, un enchaînement d'éléments.

Est-ce à dire que ces enchaînements-là — (les « êtres » ou « notions » mathématiques) — ne se distinguent pas, par leur nature, de ceux que nous venons d'examiner du point de vue de leur plus ou moins grande simplicité ? En aucune manière. Ils s'en distinguent déjà, comme nous le disions plus haut, par la seule différence du point de vue auquel on se place pour les considérer. Dans tel raisonnement, où la figure ABC entre en jeu en tant que triangle, le « triangle » (être mathématique) est pris comme un bloc. Les relations multiples que son nom rassemble, sont comme voilées. On ne fait appel à

(6) Voir plus haut, pp. 148 et suivantes.

telle ou telle d'entre elles, (dont l'existence est garantie par le seul fait qu'on a affaire à un triangle), que parce que cela a un intérêt du point de vue de la marche du raisonnement ; c'est-à-dire, *en vue* d'amener en lui un progrès, d'en pointer une autre étape. La simplicité du raisonnement, — son petit nombre d'étapes, que le bel agencement de celles-ci, source d'un sentiment d'unité, semble rendre encore plus petit, — aurait pu être la même si, une de ces étapes avait été amenée par un artifice différent, mettant en jeu autre chose qu'un triangle. Et pourvu qu'elle ai été, elle, la même, l'artifice aurait été regardé comme également habile. Comme H. Poincaré, le mathématicien recherche avant tout la simplicité dans les raisonnements (aussi dans les théories), dans les « enchaînements », en un mot.

Mais la « notion » est « enchaînement » dans un certain sens, elle aussi. Si, comme le remarque J. Nicod, sa simplicité, à elle, n'est pas recherchée autant que celle des enchaînements, si elle lui est parfois sacrifiée, est-ce seulement parce que, par rapport au raisonnement ou à la théorie, elle est, malgré sa structure logique interne, sa signification mathématique complète, traitée plus ou moins comme un « individu » auquel on ne demande que telle ou telle chose, sans s'intéresser à ses autres possibilités, sans payer attention à lui pour lui-même — un peu comme un ouvrier (qu'on nous permette la comparaison), à qui, de toute la richesse peut-être très intéressante de sa personnalité d'homme, on ne demande, pour le développement régulier de quelque large activité mécanique, que la capacité d'un geste ? Ou, si elle est ainsi traitée, n'est-ce pas qu'il y a, entre elle et ce que nous avons appelé des « enchaînements », malgré sa structure, ou, plutôt, dans sa structure même, quelque différence plus fondamentale que celle de *point de vue*, sur laquelle seule nous avons, jusqu'ici, insisté ? Il semble bien qu'une telle différence existe, et qu'elle consiste en ce que la démonstration — le raisonnement mathématique — comme, d'ailleurs, tout raisonnement, — sont choses qui se développent, qui *avancent*, alors que l'ensemble des relations *enchaînées les unes aux autres* qui constituent un « objet », une « notion » mathématique, telle que le « cercle », le « triangle », le « nombre premier », le « carré parfait » ou toute autre qu'on voudra, est *donné*, donc *stable*. Le passage, dans un raisonne-

ment, d'une « étape » à l'autre — le mot « étape » l'indique assez, — et, au sein d'une même partie, d'une vérité à l'autre, d'une constatation même à l'autre, *en vue* d'arriver à formuler une vérité féconde, fut-elle individuelle, constitue, comme nous l'avons si souvent répété, *un progrès* dans l'enchaînement lui-même. Le passage d'une propriété intéressante à une autre, dans l'examen d'une notion déterminée, telle que celle de triangle ou de nombre premier, ne constitue-t-elle donc pas, lui aussi, dira-t-on, un progrès ? Sans doute. Mais c'est là un progrès *dans la connaissance* que nous prenons de la notion. Il n'ajoute rien à la notion elle-même, qui ne se développe pas, mais qui *est,* et dont l'être est, d'avance, conçu comme l'ensemble de toutes les relations possibles (intéressantes ou non), que sa définition pose indépendamment de l'usage que nous en ferons. C'est un progrès, justement, qui concerne *le raisonnement* par lequel nous sommes obligés de passer de l'évidence de la première propriété à celle de la seconde, c'est-à-dire, qui concerne *un enchaînement*. Qu'est-ce à dire, sinon que l'« enchaînement » nous apparaît comme étant par essence quelque chose de dynamique, alors que la notion, l'« être mathématique », serait, lui, au contraire, quelque chose de statique.

Pourquoi, dira-t-on encore, avoir attendu jusqu'ici pour formuler cette distinction qui, semble-t-il, s'imposait dès le début, dès qu'il s'est, dans cette étude, agi d'enchaînements et de notions ou « objets » mathématiques ? C'est qu'elle ne se justifie que dans la conception « pragmatiste » — au sens où H. Poincaré emploie ce mot — des mathématiques. Pour les Logisticiens, qui, comme nous l'avons vu, se placent pour traiter de la nature des concepts et des raisonnements mathématiques, au point de vue d'une logique « pure », en dehors de la pensée vivante du mathématicien, raisonnements et concepts ne peuvent apparaître que comme également statiques. Seules l'antériorité et la postériorité logiques y président à l'agencement de ce que nous avons pu appeler leurs éléments, le temps n'entrant en jeu, dans l'élaboration de ces ensembles d'actes d'une pensée absolument impersonnelle, que dans la mesure où l'antériorité et la postériorité logiques ont besoin de lui pour s'expliquer. Or, cette antériorité et cette postériorité logiques, jouent, en ce qui concerne les éléments d'une notion — (en ce qui concerne les

notions qu'elle « *suppose* »), — tout comme en ce qui concerne les phases d'une démonstration. La distinction entre « enchaînements » et « notions », est beaucoup moins nette et moins profonde, de ce fait, alors qu'on se place au point de vue des Logisticiens, ou « Cantoriens » comme les appelle Henri Poincaré, que lorsqu'on adopte celui de Henri Poincaré lui-même et de ceux qu'il appelle « pragmatistes ». Cela tient à ce qu'elle est, en réalité, bien plus encore psychologique que logique, et, tout en se laissant introduire dans la théorie logistique grâce à la subtilité qui consiste à la ramener à une simple distinction de point de vue (7), elle ne peut, en conséquence, prendre toute sa signification que dans une conception avant tout psychologique des mathématiques.

Une seule difficulté subsiste pour ce qui est des « théories » que nous avons classées délibérément parmi les enchaînements mathématiques. Il semblerait, d'après ce qui précède, que nous aurions tout aussi bien fait d'en faire des notions. Nous avons, au début de cette étude, examiné deux « théories » de la grandeur citées par B. Russell. Le nom de « notions de la grandeur » conviendrait apparemment aussi bien à ces assemblages d'axiomes posés en même temps, c'est-à-dire, à ces ensembles de relations enchaînées les unes aux autres au moins aussi statiquement que dans n'importe quelle notion de figure, par exemple, et où l'antériorité logique (entre les axiomes) n'entre même pas en ligne de compte. Cette classification se justifie toutefois. D'abord au nom de l'idée de point de vue différent, que nous rappelions précédemment (la théorie étant, en soi, quelque chose de vaste, qui comporte des éléments, mais n'est pas envisagé comme pouvant être élément d'autre chose) ; et aussi, dans ce sens que la théorie est, contrairement à la notion (qui, elle, quelle que soit la définition qu'on lui donne, reste l'ensemble des *mêmes relations*), le produit d'un *choix*, dont dépend, non seulement la clarté avec laquelle elle se présente, mais la nature même et le nombre des relations qui y entrent.

Mais, si nous nous en tenons seulement à ce que nous avons dit depuis que nous nous occupons de l'école opposée, ne

(7) Voir plus haut, pp. 148 et suivantes.

semble-t-il pas que, par exemple, la « théorie » de l'espace euclidien, telle qu'elle se présente chez H. Poincaré comme la théorie d'un groupe, ou ensemble de relations possibles, mériterait aussi bien le nom de « notion » d'espace ? En quoi possède-t-elle, plus que ce que nous désignons d'ordinaire de ce terme de « notion », plus que tel ou tel être géométrique, par exemple, le caractère dynamique dont nous avons cru faire une propriété des « enchaînements » ? Il faut reconnaître, croyons-nous, que dans le dernier cas cité, vraiment le caractère d'« enchaînement », attaché à cette « théorie », n'est pas d'une nature différente, au fond, de celui que l'on pourrait octroyer à toute notion mathématique. Cependant la théorie tient, dans la philosophie mathématique de H. Poincaré, une place autrement considérable, et cela, grâce à son ampleur, à l'immense quantité de matériaux qu'elle rassemble *de divers domaines* des mathématiques, par conséquent, à sa répercussion dans chacun de ces domaines et dans la science en général. Il nous fallait tenir compte de cela — vu surtout que, cette ampleur est suffisante, pour susciter et justifier chez H. Poincaré, les mêmes préoccupations au sujet de la recherche de la plus grande simplicité possible, que dans l'étude de n'importe laquelle parmi les plus importantes démonstrations. La simplicité dans les enchaînements est recherchée surtout aussi, parce que, ce qui, pour le « pragmatiste », justement, distingue la mathématique féconde, de la logique impersonnelle et stérile des Logisticiens, c'est son dynamisme, sa capacité de progrès, liée à l'intuition mystérieuse qui en dirige les « chaînes de raisons », et qui aspire au simple dans *l'ensemble,* comme à la synthèse du beau et de l'avantageux. Il était donc naturel que des « idées », des « notions » organisées comme celle d'espace, qui, comme nous le rappelions plus haut, sont le produit d'un *choix* où cette intuition (avec l'expérience) a été le guide, participent en un certain sens à la vie des démonstrations et des raisonnements. Ce qui n'empêche pas les « notions » ou « objets » mathématiques en général — comme les « objets » ordinaires — d'être avant tout, pour le savant, des groupes d'éléments cimentés par un lien dont le propre est d'être constant ; et ce lien, « qui seul est objet en eux » (8), d'être un

(8) **H. Poincaré.** « Valeur de la Science », p. 266.

rapport, une relation plus ou moins complexe, ou plutôt, dans la plupart des cas, un réseau de relations.

Ce réseau, comme nous l'avons vu à propos des notions spatiales, ne saurait être désordonné. Ce n'est pas l'enchevêtrement d'un écheveau embrouillé. La trame de pensée qu'il représente varie sans doute, et varie même beaucoup, selon la notion à laquelle on a affaire. Mais elle jouit, au sein de chaque notion d'une identité avec elle-même suffisante pour que l'ensemble de toutes ces relations soit cohérent ; pour que l'édifice entier, dont chacun marque un détail plus ou moins important, ne manque pas *d'unité synthétique*.

L'idée même, en effet, d'« objet » ou d'« être » mathématique, suppose, pour ces « êtres », une sorte d'unité synthétique, quelle que puisse être la façon dont on en conçoive la synthèse (synthèse artistique, synthèse surtout pratique, etc.) Les raisonnements, nous l'avons vu, jouissent d'une telle unité, et cependant ils pourraient, en étant autres qu'ils ne sont, dans une certaine mesure, au moins *servir* au même usage. A plus forte raison, les notions, dont l'idée de stabilité est inséparable, et qui, altérées un tant soit peu, changeraient littéralement de place et de rôle dans l'ensemble des mathématiques. Elles ne pourraient se concevoir sans cette unité. Chacune d'elles a comme une personnalité mathématique bien définie. Et ce sont les caractères particuliers du réseau de relations dont nous parlions tout à l'heure, qui lui constitue cette personnalité.

Mais, dira-t-on, *quels caractères* ? Il ne saurait être question, ici, de sa matière. Nous l'avons vu, seul le *lien* entre les éléments qui s'y trouvent rapprochés, l'ensemble des relations qui les utilisent comme support, est vraiment un « objet » pour le mathématicien. Il ne peut s'agir que des caractères *formels* du réseau. Pour prendre une comparaison, s'il était question d'un réseau au sens banal du mot, nous dirions que la nature du fil dont la maille est faite importe peu, ce qui nous intéresse étant le ou les types de mailles qui s'y combinent, et le dessin qu'elles forment, c'est-à-dire, en d'autres termes, le principe de composition du réseau.

Si l'on préfère, par « caractères particuliers » du réseau de relations constituant l'être d'une notion mathématique, nous entendons sa *forme*, conçu comme principe d'unité essentielle.

Nous avons déjà rencontré cette idée, à propos de l'ordre interne de ces enchaînements, en tout semblables par nature à des « êtres » mathématiques, comme nous le remarquions, et que nous avons étudiés un peu plus haut : à propos des « groupes » servant de base aux différentes théories spatiales. Chacun se distingue de l'autre par sa *loi de composition,* en même temps source de la cohérence et de l'unité qu'il présente ; par sa forme organisatrice.

Il semble bien que ce soit, là aussi, en particulier pour les mathématiciens et philosophes de tendances « subjectivistes », ce qui fait l'essence de chaque notion mathématique, quelle qu'elle soit.

*
**

Ceci dit, pour servir de base à tout ce que nous pourrions édifier sur la conception subjectiviste de l'« objet » mathématique telle que nous l'avons présentée plus haut, revenons à notre question : quand est-ce qu'un « objet », une notion, ainsi conçue, est appelée « simple » ?

Nous avons remarqué déjà que, si les textes chez H. Poincaré, font des allusions à la simplicité dans les démonstrations, les raisonnements, les théories, il n'y est que très incidemment question de celle des « êtres » mathématiques. Et tout le long développement précédent nous rappelle qu'il n'y a pas là de quoi nous étonner, si nous étions tentés d'oublier les observations concernant les idées de H. Poincaré, qui accompagnent, chez J. Nicod, les réflexions sur les « deux sortes de simplicité ».

Ce que nous savons, toutefois, de la nature des êtres mathématiques dans la conception subjectiviste, doit nous aider à interpréter le peu qui nous est dit sur leur simplicité.

Tout d'abord, qu'est-il dit de ces définitions qui « posent » les êtres mathématiques ? « Elles sont, écrit H. Poincaré, le plus souvent, de véritables constructions édifiées de toutes pièces *avec des notions plus simples* » (9). De cela, la première remarque à déduire, semble-t-il, est que les notions *définies* sont considérées comme *moins simples* que chacune de celles qui entrent dans la définition à titre de matériaux. (Nous verrons dans quelle mesure, cela est admissible. Pour le mo-

(9) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 140.

ment, contentons-nous de constater ce qui est exprimé ici, et d'en tirer tout ce qui peut nous éclairer sur la façon dont la « simplicité » est comprise). En second lieu, il semble, d'après ce qui vient d'être cité, difficile de comparer du point de vue de leur simplicité des notions dont les définitions n'empiètent pas les unes sur les autres, n'ont pas d'élément communs, — telles, pour prendre un exemple, que les notions, d'une part, de triange, d'autre part, de nombre premier. Mais, pour que ces remarques ne nous soient pas inutiles dans la recherche de la nature de la simplicité des notions ou objets mathématiques, essayons de nous demander *pourquoi* les notions définies sont, apparemment, déclarées moins simples que celles qui entrent dans leur définition. En d'autres termes, que sont, dans une définition mathématique, les notions qui servent de matériaux à l'édification du défini, par rapport à la notion du défini ?

On sait que toute définition, en général, — qu'elle soit mathématique ou non, — se fait, « par le genre prochain et la différence spécifique » (qui, elle aussi, est un genre). Tous les attributs, d'ailleurs — (il peut y en avoir plusieurs ; le « genre prochain » et la « différence », peuvent chacun en comprendre plusieurs), — sont des genres. « Mais chacun de ces genres serait le défini lui-même s'il ne dénotait d'autres sujets en même temps. Ces autres sujets, dénotés par l'un des éléments de la définition, sont exclus par quelqu'un des autres, c'est-à-dire, sont des sujets de leurs jugements virtuels négatifs. Si l'on figure par des cercles l'extension des termes, le défini sera la partie commune à plusieurs cercles qui se coupent » (10). Autrement dit, chaque définition, en circonscrivant une espèce nouvelle d'êtres, restreint le nombre de *possibilités* que comportait le « genre prochain » auquel cette espèce appartient, mais en même temps augmente le nombre de *réalités* affirmées par l'existence de ce genre. Quand nous disons qu'un triangle est un polygone de trois côtés, nous excluons de la notion de polygone la *possibilité* de comprendre soit toutes les relations qui résultent de l'existence de quatre côtés, ou de cinq, ou de six, ou du nombre que l'on voudra. Mais en même temps, à l'affirmation des *seules* propriétés mathématiques communes à *tous* les polygones,

(10) **E. Goblot**. « Traité de Logique », p. 118.

nous ajoutons l'affirmation de celles qui résultent du fait, pour un polygone, d'avoir « *trois* » côtés, au lieu de quatre, cinq, six ou un autre nombre.

Dire que les notions définies sont moins simples que chacune de celles qui servent à leur définition, c'est dire : 1° que la notion de toute espèce d'êtres mathématiques, est moins simple que celle du genre « prochain » auquel cette espèce appartient (et, à plus forte raison, que celle de chacun des genres successifs dont le dernier servirait à définir ce « genre prochain » lui-même) ; 2° qu'elle est moins simple que le genre qui, dans la définition, sert de différence spécifique. La notion, par exemple, de triangle, serait « moins simple » et que celle de polygone et que celle de « figure à trois côtés ».

Examinons ces différentes notions. Le « genre » mathématique, qu'est-ce ? En quoi consiste-t-il ? Peut-on l'appeler « un être », un « objet » mathématique ? Il consiste en l'affirmation d'un certain nombre de qualités, sans quoi il ne serait rien. Et ces qualités sont ici des relations. Ces relations sont celles que toutes les espèces du genre et tous les individus de toutes ces espèces, ont en commun. Affirmer « un polygone », c'est poser les relations que l'on peut distinguer dans n'importe quel polygone, quel que soit le nombre de ses côtés, leur disposition, leurs longueurs relatives.. C'est dans la mesure où ces relations-là sont suffisantes pour lui constituer une individualité, jusqu'à un certain point, pour permettre de le distinguer des figures qui ne sont pas des polygones, que, mathématiquement, le «polygone» existe (11). Mais, affirmer « un polygone », c'est aussi affirmer la possibilité d'un certain nombre de groupes de relations, qui s'excluent les uns les autres. (Si un polygone est un pentagone, ces relations sont telles et telles ; — toutes celles qui créent la réalité mathématique du pentagone. Si c'est un hexagone, elles sont telles et telles autres, etc.). *De ces groupes de relations, aucun n'est affirmé.* Seule est affirmée, d'une part la possibilité de l'existence de l'un aussi bien que de l'autre, et, d'autre part, la réalité, seulement des relations qui se trou-

(11) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 286. « Une fonction est un « être » pourvu que l'on puisse la distinguer des autres ». Il en est de même pensons-nous de tout être mathématique.

vent communes à tous. Ce sont ces relations-là qui, dans le genre, sont pour ainsi dire, « *actuelles* », qui en font une réalité mathématique comparable à l'espèce qui est dite, dans notre citation, être « moins simple ».

Et l'on peut dire la même chose de l'« attribut » qui, dans la définition d'un « objet » mathématique, sert de différence spécifique — ou de chacun « des » attributs, quand il y en a plusieurs. C'est, comme l'a dit M. E. Goblot, lui aussi, un genre (12), duquel une partie des possibilités est exclue par l'affirmation simultanée du « genre prochain ». (Dire qu'un triangle est un polygone à trois côtés, c'est, évidemment, dire tout aussi bien, que c'est « une figure de trois côtés, polygonale). Mais, si on examine ce genre, pris à part, aucune de ses possibilités n'y est affirmée à l'exclusion d'une autre. Sont seules affirmées par son fait, les relations que l'on retrouverait intactes quelle que soit la détermination donnée au genre ; dans l'exemple, les relations qui subsistent entre « trois côtés » quelle que soit la figure, ouverte ou fermée, dans un même plan ou non, qu'elles forment. Seul l'ensemble, le *réseau* comme nous disions plus haut, de ces relations là, donne à la notion qui sert de « différence », son existence mathématique, au nom de laquelle elle est comparée à la notion définie, comme un être à un autre être de même nature, et dite « *plus simple* » qu'elle.

Or, qu'est-ce qui, du point de vue mathématique, constitue l'être de l'espèce définie ? Qu'est-ce qui l'individualise, par rapport aux espèces du même genre ? C'est, comme on vient de le voir, en plus des relations affirmées dans l'existence du genre (communes à toutes ces espèces), un certain nombre d'autres relations, entraînées par la « différence spécifique ». Ces relations ne sont pas les mêmes dans les différentes espèces. De plus, elles ne figurent pas, à titre d'*actualités* du moins, dans le genre. Elles ne font pas partie de sa personnalité agissante pour ainsi dire, de celle sur laquelle on raisonne toutes les fois qu'on infère quelque chose de lui. Dirons-nous que « l'espèce », — la notion mathématique définie — comporte ainsi *davantage* de relations affirmées, que le genre auquel on la rattache pour la définir ? Et davantage aussi que le genre-attribut qui,

(12) **E. Goblot.** Ouvrage cité., p. 118. (Déjà cité).

dans cette même définition, sert de différence spécifique ? Sans doute, cela est vrai. Et, s'il y avait plusieurs de ces genres-attributs mentionnés dans telle définition, il serait facile de montrer qu'elle comporte davantage de relations intrinsèques que chacun d'eux. Sans doute, aux relations communes à tout polygone, pour reprendre notre exemple, *s'ajoutent,* dans le triangle, toutes celles qui existent en lui sans exister dans aucune autre espèce de polygone. Et, d'autre part, à toutes celles que comporterait n'importe quelle figure de trois côtés, *s'ajoutent* toutes celles qui existent seulement dans une figure de trois côtés « *polygonale* ». Mais s'arrêter à cette remarque, ce serait, semble-t-il, laisser échapper l'essentiel. Ce serait négliger ce qui constitue véritablement l'être mathématique, pour faire dépendre sa plus ou moins grande simplicité d'une conséquence, en somme, secondaire, de sa structure.

Ces relations, en effet, dont le nombre est plus ou moins grand, ne sont, pas plus les unes que les autres, des entités isolées. Les termes de chacune, servent également de termes à d'autres. Chacune est étroitement, et de diverses manières, connectée avec l'ensemble de toutes les autres. En un mot, comme nous le remarquions, elles forment un *réseau.* Et il est impossible d'adjoindre de nouvelles relations à celles qui y sont déjà englobées, sans modifier la structure de ce réseau, par suite, le principe d'unité synthétique, la *forme* même, qui a présidé à sa structure.

Or, c'est là ce que l'on fait toutes les fois qu'on définit une notion à l'aide de notions « plus simples ». On ne fait pas qu'ajouter à un certain nombre de relations (englobées dans l'une des définissantes), d'autres relations. On brise complètement le réseau de celles qui existaient déjà, soit dans la notion du genre définissant, soit dans chacune de celles qui servent de différence spécifique. On crée une notion de *structure nouvelle,* différente ; un réseau *nouveau* de relations. On substitue à chacune des formes, principe d'unité essentielle de chacune des notions définissantes (déclarées plus simples que la définie), une forme nouvelle. Sans quoi, d'ailleurs, étant donné ce qui a été dit, plus haut, de la nature des notions mathématiques, on ne comprendrait plus comment il se fait qu'une définition pose une notion « nouvelle ».

Cela ne veut pas dire que la forme nouvelle soit sans aucun rapport avec les anciennes. Au contraire, pour que les notions puissent être comparées, il semble qu'il faille bien que ce qu'il y a d'essentiel en chacune d'elles, présente quelque analogie. Mais cela montre que la source de la plus grande simplicité des notions définissantes, en regard des notions définies à leur aide, dont parle H. Poincaré, doit être cherchée avant tout dans la structure des unes et des autres, dans les caractères particuliers du réseau de relations que constitue chacune.

C'est H. Poincaré qui parle, ici. Nous connaissons déjà l'importance qu'il attache à l'esthétique de la forme dans les enchaînements mathématiques. Et, comme nous le disions déjà, pour lui, une « notion » mathématique est, en somme, un enchaînement de relations, moins intéressant que ceux que nous avons étudié sous le nom de « théories » (que les théories spatiales par exemple), parce que d'une portée mathématique moins vaste. Nous savons aussi le rôle important que joue à ses yeux l'intuition mathématique, dans le choix des enchaînements les plus simples. De ces notions que soutiennent de vastes théories, les plus simples sont aussi les plus intuitives. Et, quoiqu'il se défende d'invoquer cette raison grossière toute seule, pour justifier, par exemple, la prééminence de l'espace euclidien ; quoique, même, il admette, qu'au bout d'un entraînement approprié, certains puissent arriver à une sorte d'intuition d'un espace de plus de trois dimensions, il est sûr que, pour H. Poincaré, la force avec laquelle l'espace enclidien s'impose de préférence aux autres à l'intuition, n'est pas étrangère au mérite qu'il lui fait d'être « *plus simple* ».

La question qui se pose est celle-ci : en quoi le principe d'unité essentielle d'une notion définie, diffère-t-il de celui des notions définissantes, déclarées « plus simples » ? En quoi la forme qui sous-tend tout le réseau des relations qu'elle englobe, diffère-t-elle des formes propres aux notions dites « plus simples », qu'on lui oppose ? Il semble que la seule réponse, dans l'esprit de H. Poincaré serait le rappel de la synonymie, constante dans toutes ses études mathématiques, de la simplicité et de *l'élégance*, de l'unité synthétique *esthétique* appréhendée par la « sensibilité spéciale » du mathématicien, en d'autres termes par son intuition d'artiste. La

notion la plus simple, est la plus simple parce que le principe d'unité synthétique auquel sa structure correspond est plus élémentaire, plus schématique : parce qu'il introduit dans l'ensemble des relations dont la notion est faite, un ordre, au moins aussi parfait, mais plus sommaire. — De cet ordre in-notion, *dérive* celui qui règne dans le réseau de relations que constitue chaque notion définie à partir d'elle. Il en dérive, pour prendre une comparaison grossière, à la manière dont un motif de dentelle dériverait d'un autre motif, « *plus simple* », au sens où toute dentellière entendrait ce mot.

***

H. Poincaré parle très peu de la simplicité des notions ou êtres mathématiques. Celle à laquelle le mathématicien vise surtout, celle des enchaînements de plus en plus vastes, est tout pour lui. Mais cette idée, que nous venons de voir, et qui, autant qu'on en puisse juger, semble être la sienne, on la retrouverait chez Ph. Chaslin, auquel son point de vue, avant tout psychologique, donne, en mathématique, une attitude nettement subjectiviste, comme nous l'avons vu. Sans doute faudrait-il seulement, en commentant cet auteur, moins insister sur le caractère *esthétiquement* plus simple des notions élémentaires, pour retenir surtout de leur forme, son fait d'être le schème sommaire d'une construction. Mais il est difficile de ne pas entrer, là encore quelquefois, dans des considérations esthétiques.

Soit un cas où il est question, expressément, non du simple, mais du compliqué. Mais nul doute qu'il ne soit tout aussi instructif. Après avoir parlé de la généralisation qui consiste à « étendre les opérations arithmétiques à des collections « complexes », formées d'unités différentes » (13), et à passer ainsi du nombre entier aux nombres fractionnaires, Chaslin écrit que : « le nombre incommensurable ou irrationnel a été une autre généralisation du même genre, mais que l'on a surchargée de notions étrangères, si bien que l'idée du nombre irrationnel est, comme nous l'avons vu, une idée compliquée » (14).

---

(13) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 91.

terne, caractéristique de la personnalité mathématique d'une

(14) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 91.

Or, que veut dire « surcharger » une notion primitive de notions étrangères ? Ce n'est pas former à l'aide de ses éléments, et d'autres éléments, une notion nouvelle, originale. C'est, au contraire, *sans former* une idée nouvelle, ajouter à la primitive des éléments qui ne trouvent pas d'unité synthétique nouvelle. S'il en était autrement, les notions « étrangères », fondues en un être mathématique différent, ne paraîtraient plus. Et la notion primitive n'en serait pas « surchargée », mais elle aurait cessé d'exister, et elles aussi, pour faire place à un réseau de relations d'une structure autre, ayant son unité synthétique propre.

Nous venons de voir que c'est là ce qui se produit dans la plupart du moins des définitions, et que la notion nouvelle qui apparaît est, selon H. Poincaré, moins simple que les définissantes. Mais ici, ce n'est pas le cas ; il ne s'agit pas d'une « définition » proprement dite, mais de la *généralisation* d'une notion, supposée, dans son essence, rester pareille à elle-même. Si la notion généralisée est moins simple que la notion primitive, ce n'est pas pour la même raison que tout à l'heure. Ce n'est pas le *principe* de son unité synthétique essentielle qui change. Qu'est-ce donc ? C'est, semble-t-il (et le mot « surchargée » paraît l'indiquer), que les éléments étrangers qu'on lui a *ajoutés,* sans lui imposer une unité synthétique nouvelle, sont superflus par rapport à celle dont jouissait déjà la notion primitive. Les caractères du réseau de relations que constitue celle-ci, éclateraient bien mieux sans eux.

En d'autres termes la simplicité de la notion primitive tenait non seulement à la présence de la forme qui fixait l'essentiel de sa personnalité mathématique, mais à sa parfaite adaptation aux éléments. Les unités, toutes semblables, entre lesquelles s'établissent les relations intrinsèques d'un nombre entier, sont suffisantes pour servir de matériaux à la synthèse de la notion simple de *nombre.* « Généraliser » cette notion en « étendant les opérations arithmétiques à des collections complexes, formées d'unités différentes » (15), c'est déjà utiliser, à la synthèse, plus qu'il n'est nécessaire pour en exprimer strictement la loi. Aussi « l'invention du nombre

(15) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 91. (Déjà cité).

fractionnaire est une première complication » (16). Le nombre irrationnel, dont il vient d'être question, constitue une complication plus poussée encore, car, toujours à l'aide du même principe d'unité essentielle, on a rassemblé beaucoup plus d'éléments qu'il n'en fallait, strictement, pour le mettre en lumière. Le principe d'existence, la forme essentielle du *nombre* est comme noyée sous une accumulation de relations secondaires, qui se rattachent à elle sans la modifier, uniquement parce qu'elles n'ont pas, en elles-mêmes, de quoi s'organiser autrement, et qui la cachent. Cela est sans doute utile, du point de vue mathématique général, c'est-à-dire, en vue de l'exploitation la plus rationnelle (et la plus simple), de tous les domaines possibles de la science de l'ordre et de la mesure. Mais si l'on examine la notion *isolément*, en tant que telle, cela apparaît comme un alourdissement.

La notion est comparable à un dessin conçu selon un schéma très sommaire, — où quelques lignes suffisaient à matérialiser clairement et parfaitement une forme, — et que l'on aurait, après coup, fait disparaître sous un fatras de fioritures, que le schéma *n'appelait pas*.

Est-ce à dire que ce soit le nombre des éléments employés à sa conception qui nuise à la simplicité de cette notion ? Non. Il est d'abord difficile de parler du nombre des éléments d'une notion, et de définir ce qu'ils sont ; et puis, comme nous le disions plus haut, c'est, avant tout, son unité synthétique qui compte. C'est d'elle, et pas d'ailleurs, qu'elle tire cette sorte de *personnalité* qui la caractérise.

Dans l'exemple précédent, tiré d'une réflexion de H. Poincaré, nous avons vu une notion « moins simple » qu'une autre parce que répondant, en tant que réseau de relations, à une loi de synthèse, à une forme, moins sommaire. Il s'agissait de deux notions différentes, l'une simple, l'autre relativement « *complexe* ». Ici, il s'agit, au fond, de la même notion, celle de *nombre*, prise, d'une part, dans toute sa simplicité, et d'autre part, rendue non plus « complexe », mais « *compliquée* », ce qui implique, pour elle, non une unité synthétique moins sommairement obtenue, mais un manque d'unité synthétique, au moins apparente, un manque de forme nette pour l'esprit. Cela équivaut à un manque de forme

(16) **Ph. Chaslin**. Ouvrage cité, p. 226.

nette, sans plus, puisque nous nous plaçons du point de vue subjectiviste, où la simplicité est une simplicité *pour l'esprit*, et non une simplicité en soi, dans les choses. On peut dire que la forme correspondant à une notion peu simple, n'est *pas directement saisissable*, qu'elle soit en elle-même complexe, ou que, bien que relativement simple, elle se perde de vue dans l'enchevêtrement sans unité d'éléments surajoutés. Nous retrouvons là la synonymie, tant de fois constatée, de la simplicité mathématique et de la rectitude.

Il est bon de dire deux mots de cette différence entre complexe et compliqué que nous venons d'effleurer, et d'éviter par avance certaines confusions.

D'après ce que nous avons dit, plus haut, des définitions, il peut sembler que les notions « générales » soient toujours les plus simples. Et, de là, à nous demander comment il se fait qu'une série de *généralisations* de la notion de nombre soit précisément une série de *complications*, il n'y a qu'un pas.

Il faut nous souvenir que les notions mathématiques « plus générales » que d'autres, peuvent être « plus générales » de plus d'une manière. Si elles le sont par nature, elles sont, sans doute, plus simples. Elles servent alors à définir ces autres notions. Mais si elles le sont par convention et par construction, il y a des chances pour qu'elles soient moins simples. Dans le premier cas, elles correspondent, comme le genre par rapport à l'espèce mathématique plus complexe, le polygone en général par rapport au triangle, à un réseau de relations plus lâche, obéissant à une loi de formation plus sommaire. Dans le second cas, elles correspondent, comme les diverses notions compliquées de nombre par rapport à celle de nombre entier, à des juxtapositions d'éléments étrangers, qui ne changent pas leur nature profonde. Alors, ce sont les notions plus simples dont elles dérivent, qui servent à les définir. C'est ainsi qu'on ne définit pas le nombre entier par le nombre irrationnel ou le nombre imaginaire, mais vice-versa. La notion compliquée, bien que dite « plus générale », n'est pas un *genre*, dont la notion plus simple correspondante serait une espèce. En réalité, comme le dit Ph. Chaslin lui-même en parlant des imaginaires (et cela confirme nos premières réflexions sur les notions compliquées « surchargées » d'éléments étrangers) », ces nombres ne sont, pas plus que les nombres fractionnaires ou que les irrationnels, le résultat

d'une *vraie généralisation.* Il n'y a, il ne peut y avoir qu'un nombre, le nombre entier. Mais ils représentent des nombres *entiers,* auxquels on *adjoint* un signe, ou d'autres nombres munis eux-mêmes de signes, de sorte que le symbole complexe ainsi formé, peut prendre une signification particulière, concrète, et, en l'espèce, géométrique » (17).

C'est ce que nous disions plus haut. Tous les éléments qui, dans chacune de ces notions de nombre énumérées, et de plus en plus compliquées, s'y *surajoutent,* sont, *même à titre de virtualités,* étrangères à l'essence même de la notion fondamentale. Leur juxtaposition ne donne pas un être mathématique nouveau, plus complexe, qui préciserait ce que cette notion a de vague, à la manière dont un motif nouveau de dentelle, dérivé d'un plus sommaire, peut réaliser une forme possible dans chacun des larges espaces d'abord laissés complètement à jour, pour reprendre une comparaison déjà faite. Et, en cela, on ne peut pas dire qu'un « nombre » est entier, fractionnaire, irrationnel, etc..., à la manière dont un polygone est un triangle, un pentagone, un kiliogone, etc., par exemple. Mais ce qui constitue l'essence même de la notion de nombre, est susceptible de former, avec diverses notions étrangères, des assemblages, selon les besoins du mathématicien. Et un « nombre » — pris absolument, sans détermination, — peut, dans une certaine mesure être entier, ou fractionnaire, ou irrationnel, etc..., dans ce sens que les opérations arithmétiques *peuvent* être « étendues à des collections complexes formées d'unités différentes », tout en restant les *mêmes* opérations. C'est cette possibilité qui donne peut-être l'illusion, en présence des généralisations successives du nombre, par complication, que l'on est en droit de parler d'une « notion de nombre », qui, prise absolument, engloberait à la manière d'un « genre », les diverses « espèces » de nombres en présence. Mais ce n'est là qu'une illusion, contredite par ce que dit Ph. Chaslin des généralisations en question, et ce que nous avons vu plus haut de la formation des notions correspondantes. Elle repose au fond, sur une confusion du complexe et du compliqué.

Cela dit, il reste vrai que, moins une notion est simple, et

---

(17) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 91.

développe pas mais qui *est*, et dont l'être est, d'avance, conçu moins le principe de son unité synthétique est appréhendé directement par l'esprit, soit qu'il soit lui-même plus complexe, soit que l'on perde contact avec lui du fait des apports étrangers qui, bon gré mal gré, se pressent autour de lui. C'est, dans un cas comme dans l'autre, toujours à un manque de rectitude interne que se ramène l'absence de simplicité d'un « être » mathématique.

Et cette idée se dégage encore, semble-t-il, des réflexions de Ph. Chaslin sur la transcendance de nombres tels que le nombre e ou le nombre π, transcendance qui « est un *fait* comme la divisibilité de douze, ou la non-divisibilité d'un nombre premier, mais un fait énormément plus compliqué » et « constaté symboliquement » (18).

La divisibilité de douze est un fait matériellement constatable, sinon matériellement constaté. On peut faire, d'un tas primitif de douze cailloux, soit deux tas de six cailloux, soit trois tas de quatre cailloux, soit encore quatre tas de trois cailloux, soit, enfin, six tas de deux. Il est entendu que ce n'est pas ainsi que procède un mathématicien, mais c'est là l'origine concrète, la signification véritable, le « contenu » dirait Ph. Chaslin, du fait qu'il appelle divisibilité de douze. L'opération, ou la suite d'opérations, à laquelle il aura, lui, recours pour le constater, sera symbolique, il est vrai, mais d'un symbolisme *immédiat, direct*. Alors qu'il n'en est plus du tout de même de la transcendance de e ou de π. Elle n'est, elle, un « fait mathématique », — caractérisant un « être », comme une certaine stucture interne caractérise le nombre douze, — que grâce à un symbolisme beaucoup plus indirect, plus détourné, à partir des données fondamentales les plus intuitives et les plus concrètes. Et c'est là ce qui en fait, aux yeux de l'auteur « un fait énormément plus compliqué ». Serait-il « complexe » qu'il en serait de même. (Souvent d'ailleurs les deux mots sont employés l'un pour l'autre, d'une manière courante). Moins le symbolisme mathématique en général, est simple, et plus il est, pour Ph. Chaslin, *indirect, détourné* ; plus les opérations, nombreuses et diverses, qu'il exige et sous-entend, depuis le geste manuel figuré dans la notion la plus primitive de celles qui servent de point de départ à la construction d'une notion donnée, se

(18) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 220.

suivent et se combinent selon une loi peu élémentaire ; et moins la personnalité mathématique de la notion s'impose d'elle-même à l'esprit, par l'intuition de son unité profonde.

C'est encore ce que Ph. Chaslin laisse entendre, semble-t-il, par le fait qu'il appelle « simples » en tant qu'êtres mathématiques (19), les fonctions continues par rapport aux discontinues (20), les fonctions « algébriques », par rapport aux « transcendantes ». (L'enchaînement des calculs correspondants est ici, sans doute, aussi « plus simple ». Mais, dans le cas de la « fonction », il est difficile de séparer cet « enchaînement » de la notion de la fonction elle-même, prise par Ph. Chaslin comme un « être » mathématique) (21).

« Dans les fonctions algébriques, écrit donc l'auteur, l'expression est un polynôme fini, et, par suite, la somme est *rapidement* calculable. Il n'en est pas de même pour les transcendantes, représentées par une somme infinie de termes. Il faut, en effet faire *indirectement* la somme de la série pour obtenir l'élément de l'ensemble y qui correspond à l'élément de l'ensemble x. Si cette sommation n'est pas possible (car elle est plutôt exceptionnelle), on se contente de calculer un nombre approché en sommant un certain nombre de termes de la série. Au fond, il n'y a pas une différence fondamentale entre fonctions algébriques et fonctions transcendantes, pas plus qu'entre arithmétique, algèbre, analyse. En effet, si cette dernière est *plus compliquée*, et *plus indirecte*, elle n'en aboutit pas moins, fut-ce par le *détour* de l'infini, au calcul d'un nombre fini » (22).

La réalité de la fonction est ici considérée dans l'ensemble des opérations symboliques à faire pour arriver à résoudre celle-ci. Et c'est, au fond, toujours la même conception du « simple » qui est exprimée. « Simple » est, mathématiquement, synonyme de *direct*, de « *rapide* » ; c'est, c'est-à-dire, la qualité de ce qui obéit à une loi sommaire de formation, immédiatement saisissable par l'intuition mathématique ; de ce qui correspond à un principe sommaire d'unité

(19) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 90. « Il faut entendre par être mathématique, le résultat d'une opération ou d'un système d'opérations, parfois très compliqué, condensé ordinairement dans un symbole ». — (Voir encore même ouvrage, pp. 226-22).

(20) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 171.

(21) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, p. 236.

(22) **Ph. Chaslin.** Ouvrage cité, pp. 183-184.

essentielle, à une *forme* sommaire, *élémentaire*. Et cela est vrai qu'il s'agisse d'êtres mathématiques, ou de ce que, plus haut, nous avons étudié sous le nom d'« enchaînements ».

***

La conception qu'a M. Ed. Goblot de la simplicité des « êtres » mathématiques, est brillamment illustrée par les réflexions que lui ont inspiré ce qu'on appelle, en mathématiques, les « cas spéciaux privilégiés », comparés aux « cas généraux » correspondants.

Les paroles de l'auteur semblent très claires : « Le cas privilégié est ordinairement *plus simple*, écrit-il — (que le cas général), — c'est-à-dire constitué par un moins grand nombre d'éléments différents. Le triangle est le plus simple des polygones ; les figures régulières sont plus simples que les figures irrégulière » (23).

Il s'agit, dans cet exemple, de « figures ». Or une figure, en tant qu'être mathématique, c'est un système bien déterminé de relations, de rapports connexes entre des « points » que nous ne définissons pas. Peu importe d'ailleurs comment nous les appelons et comment nous les définirions, ces supports des relations, vu que ce n'est que le système de ces relations elles-mêmes qui nous intéresse. Et, du point de vue subjectiviste, « pragmatiste » auquel se place M. Ed. Goblot, plus encore peut-être qu'un autre, ces relations sont l'expression abstraite d'opérations mentales « matériellement exécutables ». Dire, par exemple, qu'un segment de droite en coupe un autre en son tiers, c'est dire que, pour obtenir l'équivalent d'une certaine distance déterminée par deux points, il faut répéter trois fois une certaine autre distance déterminée, par l'un de ces points et un troisième, en l'espèce, le point d'intersection. C'est là l'expression abstraite de trois opérations semblables, matériellement faisables, de trois *gestes* semblables. Or, on peut dire que toute relation correspond à quelque opération de ce genre, symbolisée, — ou à plusieurs. Mais dans ce cas, elle se décompose, en fait, en autant de relations. C'est ce qui fait que nous pouvons considérer indifféremment comme éléments des notions mathématiques, des relations ou des « opérations possibles », dont elles constituent, selon l'expression employée plus haut, un *réseau*

(23). **E. Goblot.** « Traité de Logique », pp. 266-267.

Et il en est des figures comme des autres « êtres » mathématiques : c'est, en elles, le *réseau,* le *système* de relations qui est important et intéressant pour le mathématicien ; c'est en lui que réside leur « existence ». Chaque relation isolée n'y a de signification véritable, que par l'ensemble organisé de relations où elle s'insère.

Mais quels sont les « *privilèges* » du « cas spécial privilégié » dont parle M. Ed. Goblot, pour en relever la simplicité relative ? Il « présente cet avantage que, précisément à cause de ses propriétés spéciales, il permet des opérations, en particulier des constructions, qui ne peuvent être exécutées sur le cas général. Ainsi, on démontre d'abord que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, parce qu'une certaine construction qui assimile les angles du triangle à des angles adjacents d'un côté d'une droite, est possible pour le triangle, tandis qu'une construction analogue ne peut être faite pour un polygone de plus de trois côtés » (24). En d'autres mots, c'est une figure, un « être géométrique », dont les relations constituantes peuvent, grâce à un artifice qui tient à leur système lui-même, et qui n'est possible qu'en raison d'une certaine symétrie, ou, tout au moins, d'une certaine schématisation dans le dessin qui les matérialise en quelque sorte, être mises en évidence au moyen d'un raisonnement *direct,* impossible dans les autres cas.

Quant au « cas général », ce n'est pas un « genre » qui engloberait le « cas spécial privilégié », comme son nom pourrait en donner l'illusion. Dessiner un polygone « d'un nombre quelconque de côtés », — un polygone « quelconque », — ce n'est pas du tout, évidemment, dessiner le « genre » polygone, c'est-à-dire quelque chose qui aurait les caractères communs à tous les polygones sans en être aucun en particulier. Cela serait, d'ailleurs, matériellement impossible. C'est dessiner un certain polygone, donc, un polygone d'un nombre bien déterminé de côtés, matérialisant tout un système de relations mathématiques bien précises, bien définies, et pas d'autres, — mais *sans choisir* le nombre de ses côtés, ni les rapports qui pourraient exister entre leurs longueurs. Pourquoi cela ? Parce que, en principe, c'est-à-dire la plupart du temps, quelqu'un qui trace une figure sur le

(24) **E. Goblot.** Ouvrage cité, p. 266.

papier, sans choisir ses déterminations d'une manière consciente, lui donne, sinon le contour le plus irrégulier possible, du moins, toujours un contour très irrégulier. C'est bien par le plus invraisemblable des hasards que je tracerais un hexagone régulier ou un triangle équilatéral, si je ne m'y applique pas intentionnellement. Et c'est aussi par un hasard que, priée de dessiner un « polygone », je ne lui donnerais que trois côtés malgré l'idée de multiplicité que son nom évoque automatiquement en moi. Ledit « cas général » n'est donc, dans le « genre » d'êtres géométriques en question, que *l'une* des espèces, dont on a le plus de chance de dessiner la figure sans la choisir intentionnellement. C'est, en d'autres termes, un être géométrique bien déterminé, mais pris, à la fois, parmi les moins réguliers et les moins rudimentaires.

Et il en serait de même d'un être mathématique autre qu'une figure de géométrie. Une « fonction quelconque », « cas général » de tel degré, par rapport aux fonctions de même degré, dont la résolution est rendue particulièrement «simple», grâce à de certaines singularités qu'elles présentent, est une fonction de ce degré-là, prise parmi celles qu'on aurait, à moins de circonstances exceptionnelles, le plus de chances de rencontrer dans les problèmes. C'est une fonction de ce degré dont l'expression présente un maximum de variété, et dont la résolution comporte le maximum de difficultés, — en principe, toutes celles que l'on peut rencontrer, dans ce degré, sans s'ingénier à en créer d'artificielles et de tout à fait imprévisibles.

On pourrait multiplier les exemples de ces « cas généraux ». Tous, en tant que tels, ont le même caractère : celui de constituer des espèces d'« êtres » mathématiques appartenant au même « genre » que les « cas spéciaux » correspondants, dits « privilégiés » et tenus par M. Goblot pour « plus simples » en général. Mais ils sont de telle sorte que toute idée de hasard exceptionnel ou de choix heureux soit éliminé de leur détermination. En d'autres termes, ce sont des êtres mathématiques, qui, pris individuellement, sont tout aussi précis que les « cas privilégiés », mais qui présentent, dans leur structure, par rapport à ceux-ci, moins de symétrie, moins de régularité, en un mot, un agencement moins frappant de propriétés. Car il n'est rien qui frappe un mathématicien comme la symétrie, — surtout une symétrie

qui a des racines profondes ; qui n'est pas apparente seulement, mais *fait partie* d'un « être » mathématique.

Que veut dire maintenant M. Ed. Goblot, en écrivant que les cas spéciaux privilégiés sont en général plus simples que les cas généraux, *parce que* « constitués par un moins grand nombre d'éléments » (25) ? C'est là très important à savoir, car c'est de là que se dégage la conception qu'il a de la simplicité des notions mathématiques.

Apparemment, en disant que le triangle est le polygone qui comprend le moins d'éléments, il veut dire, tout bonnement, que c'est celui qui a le moins de côtés.

Et, sans doute, les figures régulières qu'il considère, au nom du même principe, comme plus simples que les figures irrégulières correspondantes, sont plus simples parce que, tout en ayant le même nombre de côtés, absolument parlant, elles ont *moins* de côtés de longueur ou de position différente. Leurs côtés sont, en effet, interchangeables dans la mesure où ils sont *symétriques* les uns par rapport aux autres, alors que ceux des figures irrégulières ne le sont pas. Dans ces dernières en effet, ce n'est qu'exceptionnellement que l'une des lignes a son « pendant ». En général *chacune* a par rapport à chacune des autres une place unique, et cela, dans la mesure où la figure est irrégulière.

Mais, si plausible que puisse paraître cette explication, il n'est pas besoin de s'y attarder longtemps, semble-t-il, après tout ce qui a été dit de la nature des « êtres » mathématiques, pour s'apercevoir qu'elle est superficielle.

Elle rend compte de la simplicité des figures géométriques par leurs caractères les plus visibles, les plus grossiers, les traitant, apparemment, comme des objets matériels. Or, nous savons très bien que ce n'est pas le polygone dessiné à l'encre ou à la craie qui intéresse le mathématicien, mais l'« être de raison », dont ce contour est une représentation imparfaite, approximative. M. Ed. Goblot le savait comme tout le monde. Nous l'avons souvent entendu répéter, dans ses cours, qu'« il n'y a pas, dans la nature, de ligne droite, de cercle parfait, ni de triangle dont la somme des angles soit exactement égale à deux droits. »

---

(25) E. Goblot. Ouvrage cité, p. 267.

Cet « être de raison », nous avons vu qu'il consiste, aux yeux de tous les mathématiciens, en un certain système de relations abstraites. Que chacune de celles-ci exprime, plus ou moins directement, la possibilité d'une opération concrète, c'est sans doute ainsi que M. Goblot l'entend. Mais ce n'en est pas moins dans le système de toutes ces relations, — dans la connexion rationnelle de toutes les opérations symbolisées, — qu'il faut voir l'*être* véritable, duquel on parle quand on dit : triangle, pentagone, cercle, etc...

Que l'aspect matériel d'une figure, le fait, pour elle, de se présenter sur le papier comme *trois* traits qui se coupent, au lieu de six ou de quinze, par exemple, de donner, par sa symétrie, l'impression d'un motif de décoration, ou de n'être point symétrique du tout ; que cela, disons-nous, soit *lié* à sa plus ou moins grande simplicité, il n'y a pas de doute. Que cela, en soit le *signe* visible ; nous l'accordons sans peine. Mais on ne saurait s'en tenir à notre première remarque sommaire (qui est celle qui se dégage de la première lecture du passage cité de M. Goblot), et dire que cela *est,* pour une figure géométrique, l'*origine* de sa qualité de « simple » ou de « pas simple ». C'en est, tout au plus, une conséquence. L'origine, elle est plus profonde. Il doit falloir la rechercher plus haut ; sans doute, dans la structure même de l'être géométrique, dans les caractères de ce système de relations, qu'avant tout autre chose, il constitue aux yeux du mathématicien ; là où il nous a paru, jusqu'à maintenant, que les épistémologues de mêmes tendances que M. Goblot, la placent. Et, de plus, cela nous permet d'envisager la remarque de M. Goblot dans toute sa généralité. Si, en effet, il fallait ramener la simplicité de certaines notions géométriques au « petit nombre d'éléments » visibles d'un certain contour représentatif, à quoi faudrait-il, vraisemblablement ramener celle de ces autres notions, non moins existantes, aux yeux du mathématicien, que les figures polygonales, et qui ne sont pas représentables par autre chose que par les signes d'écriture employés pour les désigner ? celle des nombres entiers ? des fractions ? des fonctions algébriques ? etc. Confondre leur simplicité avec le petit nombre des signes d'écriture qui les désignent, ce serait manifestement s'éloigner du point de vue auquel M. Goblot — et tous les « subjectivistes », — se placent.

Mais il nous est dit que les cas spéciaux privilégiés sont plus simples que les cas généraux « c'est-à-dire constitués par un moins grand nombre d'éléments différents » (26). Sentant bien que c'est au réseau de relations constitutif de ce qu'on appelle un « être » mathématique, que nous avons affaire, devrons-nous donc ne voir dans « éléments » des notions que les relations mêmes, dont elles forment un système plus ou moins compact, et dire, pour suivre M. Goblot, que les notions les plus simples, en mathématique, sont, pour lui, celles qui englobent dans leur signification le plus petit nombre de ces relations ? Qui *sont* le moins de relations, pour ainsi parler ? En somme, celles qui ont le moins de propriétés ?

Il resterait encore toutes ces « propriétés » ne s'équivalent pas, et qu'il en est qui sont l'énoncé de l'existence d'un bien plus grand nombre de relations intrinsèques englobées dans la notion, que d'autres. Il suffirait, pour s'en persuader, d'ouvrir, au hasard, un recueil des principales relations d'un être géométrique déterminé, du triangle par exemple (27). Il resterait que, certaines relations, prises isolément, sont extrêmement plus simples que d'autres. Et cela ne manquerait pas de soulever des difficultés.

Mais, en admettant que l'on puisse en venir à bout, ne s'en dresserait-il pas une autre, plus malaisée à surmonter. On pourrait, à la rigueur, et sans même être obligé de « compter » toutes les propriétés d'un être géométrique, — ou, en général d'un être « mathématique » — affirmer, s'il s'agit de particularités « actuelles » seulement, et non pas de « possibilités », qu'un « genre », tel que le polygone, en comporte *moins* qu'une de ses espèces, telle que le triangle ou tout autre. Mais nous avons vu que le rapport du « cas spécial privilégié », au « cas général », n'est pas un rapport d'espèce à genre, mais un rapport de deux espèces du *même* genre mathématique. Et si les « propriétés » sont vraiment les « éléments différents » dont parle M. Ed. Goblot dans le passage que nous avons cité, comment affirmer que le triangle a *moins* de propriétés que l'hexagone ou le décapentagone ? ou bien, que le triangle équilatéral, en a moins que le triangle

(26) **E. Goblot.** Ouvrage cité, p. 266. (Déjà cité).

(27) Par exemple les « Relations entre les éléments d'un triangle ». Recueil de 273 formules avec leurs démonstrations. Paris, Librairie Vuibert, 1925. (Déjà cité).

scalène ? Est-il seulement bien sûr qu'il en ait *moins* ? Il n'est, sans doute, pas question de les compter une à une. (Rien ne prouve, d'ailleurs, qu'elles soient toutes connues, qu'elles *seront* même jamais toutes connues). Mais, à première vue, il semble presque qu'il en ait davantage ; en tout cas, autant.

Enfin, cette attitude consistant à s'attacher au *nombre* des propriétés d'un « être » mathématique, au *nombre* de relations supposées par l'existence d'une notion donnée, semble presque également opposée à l'esprit de M. Goblot, que celle qui consisterait à tenir compte seulement du nombre de signes d'écriture, par exemple, nécessaires à définir cette même notion ou à la représenter.

Elle serait le fait de quelqu'un qui regarderait les relations intrinsèques comprises dans la signification d'une notion, comme indépendantes les unes des autres et isolables, une à une, à la manière de jetons entassés pêle-mêle dans une boîte ; — ce qui ferait s'évanouir automatiquement tout idée de *réseau* de relations, de *système* de propriétés imprimant à la notion son unité de synthèse et sa personnalité mathématique. Ce serait donc trahir la pensée de M. Goblot, mentir à sa conception essentiellement subjectiviste en même temps que constructive des mathématiques, que d'interpréter le « petit nombre d'éléments différents » qu'il attribue aux « cas spéciaux privilégiés » par rapport aux cas généraux, en s'obstinant à chercher en eux un plus petit nombre de propriétés que dans les cas généraux.

A quoi faut-il donc attribuer la simplicité des « cas spéciaux privilégiés » ? Nous avons vu (28) que l'avantage d'un cas privilégié sur le cas général correspondant, est, selon M. Goblot, qu'il permet « des opérations, par exemple des constructions, qui ne peuvent être exécutées sur le cas général » (29), opérations grâce auxquelles les démonstrations, faites à partir du cas spécial, sont plus *directes* que celles que l'on ferait à partir du cas général, en admettant que ce soit toujours possible, ce qui n'est pas exact.

Cet avantage tient, apparemment, au contour qui représente le cas spécial privilégié sur le papier, s'il s'agit d'un « être » géométrique. Mais il peut bien s'agir d'un être ma-

(28) Voir plus haut, p. 328.
(29) **E. Goblot.** Ouvrage cité, p. 266.

thématique n'admettant pas de figuration, et n'en constituant pas moins un « cas spécial privilégié » dans son genre. En réalité, on ne voit pas à quoi tiendrait l'avantage du cas privilégié, si ce n'est à sa personnalité mathématique même. C'est un cas-type. Et les êtres « type » sont plus faciles à étudier que les êtres « quelconques ». Ce sont eux qui par ce qu'ils ont déjà naturellement de *stylisé* offrent à l'artiste, au « poète » au sens le plus général et le plus profond du mot, la matière la plus intéressante à sa création. Il n'a, pour donner à celle-ci toute sa valeur, qu'à pousser un peu les traits déjà bien dessinés de son modèle, juste assez pour mettre en relief toute leur signification. Dans l'ordre artistique proprement dit les romanciers pourraient nous fournir plus d'un exemple de cette vérité. Les peintres aussi ; et plus encore peut-être les meilleurs caricaturistes.

Or, la *personnalité* des « êtres » mathématiques, si l'on peut ainsi s'exprimer, est celle d'une construction. C'est une action effectuante et créatrice qui est à la base des notions mathématiques précises, comme celles dont il est ici question, ainsi que des démonstrations qui se font à propos d'elles. Et il n'y a pas de doute que les notions ne soient plus faciles à saisir en tant que construction, plus faciles à étudier, plus directement connaissables, quand ce sont des constructions-type.

Ce qui en fait des constructions-type, c'est ce qui fait toutes les constructions-type : la netteté de leur structure. Elle tient aux caractéristiques du réseau de relations que, mathématiquement, elles *sont*. Car c'est de la manière dont ces relations constitutives dérivent les unes des autres, de la manière dont ces propriétés sont liées, que dépend la plus ou moins grande rapidité avec laquelle il est possible de mettre l'une d'elles en évidence. S'il suffit, par exemple, de prolonger une droite et de tirer une parallèle pour mettre en évidence que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, cela tient, sans doute, à la forme du polygone en question, sur le papier ; à ce fait qu'il n'a *que* trois côtés, et que, conséquemment, la *construction* d'une somme de deux droits, visible et tangible, est possible. Mais cela tient, plus profondément, à la *forme*, principe d'unité essentielle de l'ensemble de toutes les relations qui entrent dans la conception d'un « triangle » ; à ce que, dans cet ensemble organisé, dans ce système de propriétés, la propriété de la somme

de ses angles d'être égale à deux droits occupe une *place privilégiée* ; à ce qu'elle est une propriété *saillante*.

Les propriétés relevant des « cas particuliers » mathématiques, ne sont, vraisemblablement pas moins nombreuses que celles des « cas généraux » correspondants, mais, du fait de la structure intime de la notion « privilégiée », elles sont plus nettes, mieux dessinées, plus éclatantes. Les principales, — celles dont les autres découlent avec la plus grande aisance, — *sautent d'abord aux yeux*, pour employer une expression familière, mais suggestive. C'est pour cela qu'elles donnent l'impression d'être moins nombreuses. Alors que, s'il n'y avait pas moyen de mettre d'abord en évidence celles-là, on resterait en présence d'un ensemble de relations, organisé, ordonné, sans doute, mais dans lequel, chaque relation se voyant sur le même plan que chaque autre, ce qui frappe, au premier abord, c'est leur grand nombre. Le grand nombre des éléments d'un tout ordonné, quelqu'il soit, frappe toujours, tant que leur *ordre* lui-même n'est pas suffisamment mis en relief. Dans le cas des notions mathématiques « quelconques », regardées comme peu simples, la cause de la non-simplicité n'est pas dans le nombre cardinal des relations qu'elles englobent. Elle est dans le manque de relief, donné à l'*ordre* qui relie toutes ces relations. Au contraire dans le cas des notions « privilégiées », cet ordre est, semble-t-il, accentué par la force avec laquelle s'imposent certaines propriétés marquantes. Le principe d'unité essentielle qui organise en un tout cohérent l'ensemble des relations dont la notion est faite, est plus accusé. Et, s'il est plus accusé, c'est au fond, qu'il est plus élémentaire, car plus un principe constructif est élémentaire, et précisément, plus il « saute aux yeux ». C'est pour cela que les éléments de construction donnent l'impression d'être peu nombreux.

Comme nous le voyons, nous voici, par le détour de l'idée de relief, de netteté des propriétés d'un être mathématique, ramenés à voir, dans sa simplicité telle que l'entend M. Ed. Goblot, une qualité de sa nature *formelle*, comme nous l'avons vu en nous appuyant, soit sur les réflexions de Chaslin, qui parle, nous dit-il lui-même, en « psychologue », soit sur celles de Henri Poincaré, dont chacun connaît la conception esthétique de la création mathématique.

Ajoutons, sans qu'il soit nécessaire d'insister, que nous serions aussi bien arrivés aux mêmes conclusions en nous

en référent à M. E. Rignano, pour qui la notion mathématique paraît n'être rien autre que la condensation d'un certain nombre d'opérations symboliques de moins en moins *directement* représentatives d'opérations matérielles, — si l'on veut, « de plus en plus symboliques », — à mesure que les notions sont plus abstraites et plus compliquées (30).

---

(30) **E. Rignano.** « Psychologie du raisonnement », pp. 208-209 et 222.

CHAPITRE XV

QU'EST-CE QUE LA SIMPLICITE MATHEMATIQUE POUR H. POINCARE, ET POUR LES CRITIQUES DE TENDANCES « SUBJECTIVISTES » ?

Nous avons, sous le nom de théories « subjectivistes » de la simplicité, examiné dans les chapitres précédents deux courants de pensée, convergents sans doute, puisqu'ils aboutissent l'un et l'autre à placer la simplicité des enchaînements et des êtres mathématiques dans l'esprit du mathématicien plutôt que dans les choses elles-mêmes, mais, tout de même, différents. Nous voulons parler, d'une part de la conception qu'a H. Poincaré des mathématiques, de l'autre de celle qu'ont les philosophes dont nous avons examiné par la suite les textes pouvant éclairer notre problème. La première est une conception avant tout esthétique. La deuxième apparaît surtout comme une conception pratique. Et la conception de la *simplicité* mathématique qu'a chacun, s'en ressent forcément.

Nous avons vu que, pour H. Poincaré, à la base de cette simplicité (qu'il envisage surtout dans les « enchaînements »), il y a l'idée d'une unité synthétique *esthétique*. Dire que le mathématicien est guidé par le sentiment obscur des combinaisons possibles les plus simples, c'est dire, pour lui, qu'une « sensibilité spéciale », de nature esthétique lui suggère son choix inconscient toutes les fois que celui-ci est vraiment le choix le meilleur, le choix qu'il fallait. L'édifice mathématique que constitue chaque enchaînement, — et l'édifice mathématique en général dirait H. Poincaré, — est une œuvre d'art. Il en a tous les caractères inséparables ; et sa simplicité est une simplicité artistique, au même titre que celle d'un ensemble décoratif, d'un ouvrage d'architecture ou d'une phrase musicale. Le même esprit paraît présider aux affirmations de H. Poincaré concernant la simplicité des notions ou

« êtres » mathématiques, quelque peu nombreuses qu'elles soient, et quelque priorité très nette qu'ait, pour lui, celle des « enchaînements », — raisonnements et théories — en mathématique.

Pour M. Ed. Goblot, pour Ph. Chaslin et ceux de mêmes tendances, l'idée *d'action* effectuante et créatrice, est primordiale en mathématique. (C'est elle que M. Goblot met au centre de la théorie de la déduction qu'il oppose à la vieille syllogistique). Et la simplicité des enchaînements que le mathématicien crée, comme celle des notions dont il se sert, est la simplicité d'une action — action symbolique, sans doute, mais n'ayant rien perdu du caractère constructif d'une action concrète, résultat d'opérations manuelles combinées.

Au cours des chapitres qui précèdent, nous avons vu, peu à peu, ces deux conceptions de la simplicité mathématique se ramener à une conception unique : celle qui fait, comme nous le disions plus haut, de la simplicité des enchaînements et des notions une qualité de leur loi de composition, un caractère de leur structure distinctive, individuelle, en un mot, de la *forme* qu'ils supportent. Et cela, malgré que, bien souvent, de prime abord, la rectitude toujours très frappante des raisonnements comme des notions « simples », nous ait paru (et cela plus encore chez M. Goblot que chez H. Poincaré), due à la présence en eux, d'un petit nombre soit d'articulations, soit de relations, — d'un petit nombre, disons, d'éléments, pour employer le terme le plus général.

Il est bon de noter en passant l'intérêt de ce résultat, car il est d'une portée qui dépasse les limites de notre étude elle-même. Il pose un problème, en le résolvant presque d'avance : du moins, en en indiquant nettement la solution la plus séduisante, et nous semble-t-il, la plus rationnelle.

Ce problème est le suivant : puisque la simplicité mathématique, considérée tantôt comme celle d'une œuvre d'art, tantôt comme celle d'une action constructive et rien de plus, se révèle être au fond *la même*, ne serait-ce pas que *toute action constructive* est, plus ou moins, une œuvre d'art ? En d'autres termes, que la *forme*, le principe d'unité essentielle, caractéristique d'une construction quelconque, *suffit* à elle seule, à rendre compte de la composition artistique, quelle qu'elle soit ? L'œuvre « belle » ne différerait à ce compte de l'œuvre tout court, que par la qualité de sa forme, — exactement comme nous l'avons dit de l'œuvre « simple », en mathématique, et

comme nous le dirions peut-être de l'œuvre simple en général, si le parallélisme de la simplicité et de la beauté, si frappant chez H. Poincaré en ce qui concerne les constructions mathématiques, se maintient (comme nous sommes tentés de le croire) sur tous les plans.

Nous savons qu'il est aussi possible, sans doute, de soutenir que cette unité, si aisément amenée entre les conceptions « subjectivistes » de la simplicité, vient de ce que, inversement, toute œuvre d'art est une construction, une action ordonnée, sans que la réciproque soit admise — ce qu'on appelle œuvre *d'art,* étant, selon cette thèse, caractérisée par quelque chose de plus, qui échapperait, par sa nature, à la forme pure.

Une discussion à ce sujet nous entraînerait très loin du problème de la nature de la simplicité mathématique, d'où nous sommes partis, et dont nous ne voulons pas, ici, nous éloigner. Mais il fallait montrer qu'une telle discussion serait la suite naturelle des conclusions de ces derniers chapitres.

QUATRIÈME PARTIE

Théorie de la simplicité mathématique d'après M. Brunschvicg

CHAPITRE XVI

LA PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE DE M. BRUNSCHVICG

Une philosophie mathématique, différente, à la fois, d'une part, de celle des Logisticiens, et, de l'autre, de celle de H. Poincaré et des auteurs qui se rattachent plus ou moins à ses tendances, et dont quelques-uns vont, parfois, plus loin que lui dans le sens du « pragmatisme », c'est, semble-t-il, celle que l'on pourrait dégager de l'œuvre de M. Léon Brunschvicg.

Nous essayerons donc, après avoir esquissé quels en sont les principaux caractères, de nous demander ce que, dans une telle théorie, devient la notion de simplicité, qu'il s'agisse de la concevoir — selon le plan uniforme que nous avons suivi jusqu'ici, dans ces pages — soit comme propre à qualifier un « enchaînement », soit comme propre à qualifier un « être » ou « objet » mathématique. Puis, s'il est possible de la rattacher aux conceptions du « simple » précédemment tirées des idées des mathématiciens et philosophes, moitié par examen des textes, moitié par déduction logique, nous verrons quel intérêt il y a à le faire, et quel jour cela peut jeter sur la question générale : « Qu'est-ce que la simplicité ? » question qui, comme il est aisé de le pressentir, dépasse le domaine de la philosophie des mathématiques, et, sans doute aussi, celui de la logique. Mais n'anticipons pas. Il s'agit d'abord de savoir, comment nous pourrions caractériser la philosophie mathématique de M. Brunschvicg.

Nous avons vu, jusqu'ici, deux types qu'on pourrait appeler « extrêmes » de philosophies des mathématiques :

1° Celui qui fait de la science de l'ordre, tant spatial que numérique, un pur jeu logique sur des symboles, dont le contenu (en admettant qu'on tienne à leur en attribuer un) est absolument indifférent, et, par conséquent, superflu de chercher à connaître ; jeu que des mathématiciens tels que David Hilbert ont porté à un haut degré de perfection, qui a ses

règles précises (que les Logisticiens se sont, précisément, efforcés de mettre en évidence), et dont toutes les opérations, de la plus élémentaire à la plus savante sont les opérations « *logiques* » ; des opérations, sinon, ne devant rien à l'expérience, *en fait,* quant à leur genèse profonde — et encore ! Couturat ne semble-t-il pas croire que l'expérience les suppose implicitement ? — du moins ne tirant d'elle aucun appui en tant qu'opérations proprement « mathématiques », ne lui devant aucune valeur de vérité.

2° Celui qui, jugeant arbitraire, et même antiscientifique la séparation du point de vue épistémologique et du point de vue psychologique ; s'appuyant, à l'inverse de la philosophie précédente, sur l'observation de la science *qui se fait,* au lieu de chercher à reconstruire, plus ou moins artificiellement l'ossature logique de la science *toute faite,* ne saurait exclure « *en droit* », non moins qu'en fait, de la mathématique la part de l'intuition, sous quelque forme que ce soit (ni, non plus celle de l'expérience corporelle), et en arrive, au terme de son expression, à réduire les opérations constructives de la mathématique à n'être, dans leur principe, « pas des opérations de l'esprit, mais des opérations exécutées mentalement » étant, « en leur essence, des actions externes, par exemple des mouvements » (1), comme le dira M. Goblot.

La conception de M. Bruschvicg s'oppose aussi bien à l'une qu'à l'autre, de ces deux manières d'envisager la nature de la vérité mathématique.

Pour lui, la mathématique est bien autre chose qu'un jeu de pur symbolisme. Il faut, au contraire, selon lui, bien se garder de réduire aux symboles la pensée symbolisée, de confondre les transformations de l'écriture avec l'activité intellectuelle véritable, seule riche de vie interne, par conséquent, de possibilités de développement par l'invention, et seule constituant l'activité « scientifique » en général, et, en l'espèce, l'activité proprement mathématique. « Pour comprendre la science comme science », dit-il, par exemple — et il s'agit justement là de mathématique, — « il faut renoncer à l'économie d'écriture qu'on a baptisée économie de pensée » (2). Et cette activité là, a, il y insiste, son point d'ap-

(1) **E. Goblot.** « Traité de Logique », p. 272. (Déjà cité).

(2) **L. Brunschvicg.** « Les étapes de la Philosophie mathématique », p. 493.

pui dans l'expérience. La première pensée mathématique est l'« égalité en acte », dit encore l'auteur. Elle est la première relation d'ordre scientifique parce qu'elle est vraie, ou plus exactement, parce qu'elle est susceptible de vérification (3). Or quelle est, par excellence, la puissance de vérification ? C'est l'expérience dont les racines plongent dans le concret (4).

Non seulement c'est en « recommençant » des opérations manuelles telles que l'échange, un contre un, des objets contenus dans deux tas, et en constatant que le résultat en est le même la première, la seconde, la troisième fois, que l'on est arrivé en fait, à l'idée de l'équivalence des deux tas échangés, et, peu à peu, à l'idée du « nombre » d'objets, le même dans chacun, — de sorte que « l'abstraction synthétique ne suppose pas la notion abstraite ; celle-ci est le produit, celle-là est productrice » (5) — mais encore, en droit, mathématiquement parlant, la notion abstraite ne semble pas, pour M. Brunschvicg, se concevoir autrement que comme l'épanouissement, l'explicitation, en quelque sorte, de ce que l'expérience primitive, la plus instructive parce que la plus dégagée de toute idée préconçue comme de toute forme verbale qui la trahirait, tenait de pensée inconsciente dans le jeu irréfléchi de son mécanisme. C'est l'expérience qui « confère une valeur de vérité à la liaison entre l'unité du trait et l'unité du tracé, et constitue ainsi l'espace scientifique » (6), de même que c'est elle, qui, dans l'échange de un contre un, donne naissance, dès avant la constitution de tout système de numération, à cette notion, qu'elle suffit à justifier, de correspondance univoque et réciproque, qui est indépendante du concept de mesure (7), et à laquelle l'existence mathématique du « nombre » est indissolublement liée.

Ce que M. Brunschvicg reproche aux Logisticiens, entre autres choses, c'est en voulant ramener la mathématique à un pur symbolisme, de lui avoir ôté sa vraie signification, d'avoir négligé le jugement, formulé ou non, qui est à la base de tout calcul. « Les mathématiciens-philosophes, dit-il, en pré-

(3) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 468.
(4) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 504.
(5) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 468.
(6) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 504.
(7) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 468.

tendant ramener le nombre au symbole figuré ou écrit qui prend place dans le corps du discours scientifique, ont été dupes d'une langue mal faite ; ils ont imaginé un signe qui se suffit à lui-même, une vérité qui est une chose en soi, alors que, dans la stricte exactitude, il n'est permis de parler que de signification et de vérification. Le symbole disparaît en tant que symbole, si on ne sait pas remonter au jugement qui le sous-tend ; le calcul digital lui-même, qui a pu paraître le type de l'opération simple, décèle à l'observateur attentif une action à deux personnages : la main avec laquelle on compte et la main sur laquelle on compte ; supprimez cette dualité, grâce à laquelle le mouvement de la pensée s'exerce et la relation de correspondance s'établit, il n'y a plus de calcul proprement dit, il n'y a qu'une mimique incohérente. Il n'en est pas autrement du nombre considéré sous sa forme définitive, c'est-à-dire, lorsqu'un procédé régulier de numération, permet l'extension infinie de la suite des nombres » (8). Or, ce jugement qui « sous-tend » le symbole, il a pour occasion, pour point de départ, et, en même temps, pour justification, l'emprise de l'esprit sur le réel. « C'est le contact avec le réel qui fait de l'arithmétique une science au sens propre » (9). C'est encore le contact avec le réel qui en assure et en légitime l'extension illimitée. On s'en rend compte, si, abandonnant l'examen de la genèse et de la signification du nombre entier, on entreprend celui de notions mathématiques moins fondamentales, à commencer par celui des fractions. « Certes, écrit M. Brunschvicg, le calcul des fractions n'est pas de nature empirique ; l'expérience ne nous apporterait pas l'homogénéité des objets nouveaux que nous obtenons comme résultat matériel du fractionnement. C'est par un élan de l'esprit, qui a la valeur d'une véritable découverte, que nous assimilons ces objets aux unités du calcul arithmétique, que nous leur appliquons les modes de combinaisons valables pour les nombres entiers. Mais, grâce à l'expérience, la fonction externe de coïncidence s'ajoute à la fonction de connexion interne ; des combinaisons de symboles abstraits deviennent des vérités. Ce n'est pas par convention, c'est effectivement, matériellement aussi bien qu'intellectuellement, qu'une unité numérique, partagée en cinq parties, sera consi-

(8) **L. Brunschvicg.** Idem, pp. 474-475.
(9) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 496.

dérée comme cinq cinquièmes (10). Et il ajoute, un peu plus loin : « Il n'y a pas deux sortes différentes de combinaisons, les unes que nous expérimentons sur les fragments d'objets, les autres que nous formons sur les expressions abstraites nées du symbolisme opératoire ; mais c'est une même idée que nous apercevons, à travers deux aspects différents, ou plus exactement, ce sont les deux aspects dont la synthèse constitue l'idée » (11).

Et ce qui est exact en ce qui concerne la vérité arithmétique, l'est encore, en ce qui concerne la vérité géométrique. L'analyse de chacune de ces deux « vérités » a, d'ailleurs « une allure analogue » (12).

M. Brunschvicg rejette la conception qui réduit la géométrie à un jeu de pures relations logiques, — de même nature, au fond, que l'arithmétique et l'algèbre, — dans lequel les mots tels que : droites, surfaces, etc.. seraient seulement des termes vides, que l'on pourrait tout aussi bien remplacer par d'autres, et qui ne serviraient qu'à traduire, tout au plus, les relations logiques en question, dans un langage conventionnel. Il rejette aussi cette « philosophie de l'intuition statique » pour laquelle la géométrie est le type de la science abstraite, qui, du volume dépouillé de la profondeur qui en faisait la réalité, en arrive à concevoir, par un processus d'appauvrissements successifs, la surface, la ligne, puis enfin, le point. « Pour l'intellectualisme, au contraire — c'est-à-dire, pour lui, — la géométrie est une étude d'actes positifs et concrets. L'acte élémentaire est le trait, et l'acte s'accompagne immédiatement d'une image : la ligne tracée d'un trait. Quand cet acte est accompli pour lui-même, affranchi du désir d'imitation qui a donné l'essor à la pratique du dessin, la pensée géométrique a pris naissance » (13). L'espace ne peut être ramené à « un terme unique, ou tout au moins à une forme simple et en quelque sorte impérative de synthèse » (14) depuis qu'il a fallu tenir compte de l'extension que les mathématiciens du XIXe siècle ont, par la conception des métagéométries, fait subir à cette notion. Mais il ne faut nullement chercher, pour échapper

(10) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 493.
(11) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 494.
(12) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 503.
(13) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 502.
(14) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 503.

aux difficultés du problème posé par ces métagéométries, à diminuer la portée d'une discipline géométrique en raison de l'existence des autres ; et le seul moyen d'éviter cette erreur, en gardant à chacune son vrai sens et sa vraie place, c'est de les concevoir toutes à la lumière de ce qui, dans l'expérience primitive déjà, les fonde et les légitime : de l'acte concret, c'est-à-dire, et qui porte en soi sa vérification. « En fondant toute synthèse géométrique sur la dualité de l'acte-image, comme en fondant le nombre entier sur une relation de correspondance, nous espérons, écrit l'auteur, avoir décelé dans le germe même de la science, la complexité nécessaire pour en expliquer la fécondité » (15). Les géométries non-euclidiennes sont vraies, comme celle d'Euclide, non en tant, seulement, qu'édifices logiques parfaitement cohérents, non plus en tant que langages, aussi exactement que la géométrie ordinaires, propres à bien exprimer tout ce qu'il y a d'intelligible dans les phénomènes physiques (quittes à l'exprimer avec une incomparablement plus grande complexité), mais parce que la géométrie euclidienne, suggérée par l'expérience, dérivée de l'expérience et s'y appliquant admirablement, « ne coïncide, pourtant pas entièrement avec la représentation empirique » (16) ; parce que, l'espace euclidien « implique un passage à la limite qui révèle, au même titre que l'infini ou le zéro, une puissance « transintuitive », un dynamisme intellectuel ; et c'est pourquoi la vérité de l'espace est la vérité d'un cas-limite, qui entraîne avec elle la vérité de tout son « voisinage » (17).

Ce seul dernier passage cité suffirait à prouver que, si M. Brunschvicg s'élève avec force et insistance contre toute tentative d'assimiler la mathématique à la logique pure, mettant en évidence, à plus d'un endroit, les confusions qu'une telle assimilation, — que, par exemple, la réduction du nombre entier à une « classe de classes semblables » comme disent les Logisticiens (18), — suppose dans l'esprit du philosophe,

(15) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 503.
(16) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 522.
(17) **L. Brunschvicg.** Idem, pp. 522-523.
(18) Voir plus haut la théorie des Logisticiens sur le nombre. — M. Brunschvicg leur reproche, entre autres, de substituer « à l'identité spécifique, fondement de la classe logique, la diversité numérique, fondement de la collection arithmétique ». (Ouvrage cité, p. 404.)

et les difficultés qu'elle ne peut manquer de faire naître, en ce qui concerne, en particulier la possibilité d'application des mathématiques au concret, il n'en reste pas moins fort loin de donner dans l'empirisme, fut-ce dans un empirisme très relatif, très mitigé, comme celui qui se dégage parfois de l'interprétation de la vérité mathématique chez un M. Goblot ou un Rignano (19).

Certes, il est incontestable que le rôle de l'expérience est, pour lui, extrêmement important dans la formation des concepts mathématiques : qu'il est indispensable d'en tenir compte dans l'analyse après coup de la pensée mathématique, sous peine de passer à côté de la question ; que, fussent-elles constituées en un édifice logique irréprochable, les mathématiques ne seraient qu'un jeu de l'esprit, très vain et sans aucune « valeur de vérité », sans ce contact intime avec le concret, qui, dès leur origine, en fait une science, par les possibilités de vérification empirique immédiate et indéfinie qu'il leur permet, — possibilités qui subsistent au cours de tout leur développement, et dont les applications au monde réel des théories mathématiques au premier abord les plus désintéressées, les plus librement pour ne pas dire arbitrairement échafaudées par l'esprit en vue seulement de son propre jeu, sont une illustration brillante. Rien n'est significatif, chez M. Brunschvicg, à ce sujet, comme certaines affirmations telles que celle que nous avons déjà citée, un peu plus haut : « C'est le contact avec le réel qui fait de l'arithmétique une science, au sens propre » (20). A la considérer sous un certain jour, l'attitude philosophique de l'auteur en ce qui concerne les mathématiques paraîtrait même plus près de l'empirisme que celle de H. Poincaré. En effet, pour ne citer que ce point, les différentes géométries sont, pour H. Poincaré comme pour M. Brunschvicg, également « vraies ». Mais elles ne le sont pas pour les mêmes raisons. Pour H. Poincaré, le système d'Euclide est préféré, en raison seulement de la simplicité qu'il confère à toute interprétation du réel selon ses cadres, ainsi que de sa simplicité en soi, — de sa simplicité proprement mathématique qui est celle du

(19) Voir le chapitre précédent sur les idées de M. E. Goblot et de E. Rignano.

(20) **L. Brunschvicg.** Ouvrage cité, p. 496. (Déjà cité.)

groupe métrique qui lui correspond. Suggéré par l'expérience certes, sa source n'est pourtant pas plus « dans » l'expérience, que celle des disciplines géométriques plus compliquées. Le groupe métrique « euclidien » préexiste dans l'esprit, à l'état de possibilité, — (ainsi que les autres groupes concevables) — à l'expérience qui a « suggéré » de le choisir. L'expérience qui a effectivement présidé à son choix est une « expérience » toute interne ; c'est, si l'on veut, une sorte d'intuition esthétique de sa simplicité En fait, il est avant tout, rationnellement préférable. — Ici, au contraire, bien que ne coïncidant pas entièrement, — pas plus que les autres, quelquefois moins, — avec la représentation empirique, « l'espace euclidien est dérivé des expériences originelles qui ont provoqué le développement de l'intelligence ; il s'applique si bien à l'expérience que la géométrie euclidienne est l'instrument par excellence pour la conquête scientifique de l'univers » (21), il est « l'espace normal de l'homme » (22), non en tant que le mathématicien qui analyse et choisit, guidé par un besoin de simplicité, choisit, parmi les groupes concevables, le groupe métrique qui lui correspond, mais en tant que l'homme qui agit sans encore se formuler les conditions théoriques de son acte en une pensée quelconque, agit selon ses données. Et, si les autres géométries ne laissent pas d'être vraies, c'est qu'elles aussi traduisent un résultat d'expérience, et, ce qui est bien plus de la même expérience. C'est pour cela d'ailleurs qu'elles diffèrent du système euclidien « d'aussi peu que l'on voudra » (23), sinon en ce qui concerne les théorèmes et les démonstrations, tellement plus complexes, qu'elles ont en propre — (et dont la complexité n'est qu'une affaire de parmètre) (24) — du moins par la « valeur de vérité » que leur fondement expérimental leur donne : « Théoriquement la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits ; pratiquement elle pourra être d'aussi peu que l'on voudra supérieure ou inférieure à deux droits, de telle sorte que

(21) **L. Brunschvicg.** Ouvrage cité, p. 522.
(22) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 522.
(23) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 522.
(24) **Delbœuf.** « L'ancienne et les nouvelles géométries » dans la Revue philosophique de 1894 I., p. 375. Cité par L. Brunschvicg. Ouvrage cité, p. 523.

l'interprétation nous conduirait à des variétés d'espace riemannien ou lobatschewskien, infiniment voisines de l'espace euclidien » (25).

La place à part que l'espace euclidien occupe dans la géométrie, et qu'il doit apparemment à ce qu'il est « intellectuellement le plus simple » (26), comme M. Brunschvicg le reconnaît, tient donc, à « tout autre chose qu'une convention de l'esprit avec lui-même, analogue au choix d'un système de numération ou d'un système de coordonnées » : — ce qui est, comme nous l'avons vu la théorie de H. Poincaré, dont les tendances, en philosophies mathématique, sont déjà si éloignées, de celles de l'école logistique, — « il faut y voir une hypothèse de l'esprit sur les choses, qui, due sans doute à la suggestion des expériences originelles, a pris assez de consistance et de précision pour donner à l'esprit possession de la nature. La géométrie euclidienne est vraie en tant que nous la recueillons comme le produit de la collaboration entre l'esprit et les choses » (27).

M. Brunschvicg semblerait donc, plus que H. Poincaré, incliner à faire, dans l'analyse de la pensée mathématique une place à l'expérience, puisque la part qu'il lui reconnaît, en fait, dans l'explication d'ensembles de vérités, aussi importants que les systèmes de géométrie par exemple, est une part effective et non une part à titre seulement d'occasion déterminante. Sans aller, sans doute, jusqu'à dire, avec d'autres, parmi lesquels M. Goblot (28), que les opérations de la mathématique se réduisent, en dernière analyse, à des actes manuels, il met, pourtant dans des opérations manuelles, semble-t-il, qui ont précédé, et l'idée explicite de nombre, et la conception de tout système de numération, le principe qui doit suffire à communiquer à tout le développement ultérieur de l'arithmétique et de l'algèbre, et jusqu'à leurs spéculations les plus subtiles et les plus « théoriques ». la « valeur de vérité », pour reprendre une fois de plus sa propre expression, sans laquelle il ne saurait être question en lui ni en elles de science proprement dite. Il voit, de même, dans la réalité de l'« acte image » (29), comme il le nomme d'une manière si

(25) **L. Brunschvicg**. Ouvrage cité, p. 522.
(26) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 520.
(27) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 520.
(28) **E. Goblot**. « Traité de Logique », p. 272. (Déjà cité).
(29) **L. Brunschvicg**. Ouvrage cité, p. 503.

suggestive, et dans l'expérience de la « coïncidence » matérielle, non seulement le début historique ou psychologique de la genèse d'une géométrie qui porterait en soi sa valeur, mais la source même, le pourquoi de cette valeur.

Cependant, — nous l'avons laissé entrevoir déjà (30), — il ne faudrait pas, nous basant là-dessus, nous empresser de parler d'empirisme, même relatif. M. Brunschvicg a lui-même qualifié sa philosophie d'« idéalisme mathématique », sans doute pour quelques raisons. Il faut donc y regarder de plus près, pour découvrir, ailleurs qu'en elle-même, le pourquoi que cette place si grande faite par l'auteur à l'expérience concrète comme principe de vérité mathématique. Et d'abord, remarquons ce qu'est, pour M. Brunschvicg l'expérience sous n'importe laquelle de ses formes ; au lieu d'être quelque chose qui se suffirait à soi-même, et sur quoi l'intelligence réfléchissante et organisatrice, opérerait après coup, elle est, là déjà où elle apparaît la plus rudimentaire, la moins consciente, la moins codifiée, et par conséquent, semble-t-il, la plus étrangère à toute spéculation, une « intelligence en acte ». « Nous ne pouvons, dit M. Brunschvicg, nous prononcer sur l'univers qu'autant qu'il est la représentation de l'esprit, car l'univers, pour nous, c'est l'univers perçu par nous » (31). Loin de penser que les opérations mathématiques même les plus élémentaires puissent, comme le voudraient les représentants du « pragmatisme » les plus portés vers l'empirisme parmi ceux que nous avons rencontrés jusqu'ici, se réduire à des actes manuels, par exemple à des mouvements (32), il semble que, au contraire, il ne mette des actes manuels tels que l'échange d'un objet contre un autre, ou l'application d'un objet sur une autre qui coïncide ou non avec lui, à la base de la science mathématique, et ne fasse résider en eux le principe de la vérité de tout le développement ultérieur de cette science, que parce que, en eux, déjà, — dès qu'ils sont autre chose qu'une mimique incohérente, — se reconnaît la marque de l'intelligence ; nous ne dirons pas de l'intelligence « qui les dirige » telle une activité extérieure et étrangère à eux, mais qui, chez l'homme, leur est inhérente ; qui est, « la distinction spéci-

(30) Voir plus haut, pp. 344, 348, 349.
(31) **L. Brunschvicg**. « Introduction à la vie de l'esprit », p. 48.
(32) Voir **E. Goblot**. « Traité de Logique ». (Déjà cité).

fique que présentent les différentes formes de l'activité humaine », distinction qui « fait de l'humanité une espèce exceptionnelle — parmi les espèces animales » (33).

C'est grâce à cette intelligence, qui lui donne sa signification véritable, que l'expérience peut donner naissance à la vérité mathématique, qui la dépasse. « De même que, suivant les Stoïciens la vertu sortait de la nature et valait mieux qu'elle, de même la vérité sort de l'expérience et vaut mieux qu'elle. Elle n'est pas donnée dans les choses ; mais, elle en jaillit, grâce à l'action spécifiquement humaine qui est exercée sur les choses, action, dont la pratique loyale et équitable de l'échange nous a donné occasion de reconnaître les conditions les plus simples » (34).

Et elle dépasse, cette vérité, l'expérience d'où elle sort, parce qu'en réalité, elle la « précède », sinon ontologiquement, du moins idéalement ; elle la dépasse parce qu'elle traduit les conditions par lesquelles l'expérience acquiert pour tous la même valeur ; par lesquelles, tandis qu'elle n'était riche d'enseignements que pour l'individu, (et cela dans le moment de son action), elle prend une autorité universelle, exercée, cette fois, à n'importe quel moment. » Pour nous, dit l'auteur, s'opposant lui-même aux philosophes qui négligent l'intelligence initiale, spécifique, pour ne voir, à la base de la vérité scientifique, que l'action, et qui se sont, par là, interdit de comprendre cette dernière, nous nous sommes donné pour tâche de guetter le moment où les hommes, placés en face d'autres hommes, ne sont plus seulement des individus agissant de leur point de vue particulier, mais où ils s'entendent pour une règle commune d'action qui les justifie les uns aux yeux des autres, où se dégage de la pratique utilitaire la prescription de conditions qui peuvent être également remplies par tous, qui peuvent être indéfiniment contrôlées par tous, où surgit enfin la notion de vérité » (35).

Or ces « conditions » ne sont autres que celles qui définissent l'intelligence elle-même ; ce sont, en d'autres termes, les conditions de l'analyse et de la synthèse, — de ces deux « moments » que comporte forcément tout acte de l'es-

---

(33) L. Brunschvicg. « Les étapes de la Philosophie mathématique », p. 470.

(34) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 471.

(35) L. Brunschvicg. Idem, pp. 470-471.

prit (36) — et qui se retrouvent jusque dans la perception, cet acte élémentaire qui est déjà pour M. Brunschvicg « une œuvre intellectuelle » (37). Déjà à ce stade « aux images qui, spontanément circulent en lui, l'esprit ajoute de son propre fond, les rapports définis qui confèrent au contenu sensible une organisation intelligible. Or, les raisons de ces rapports, les lois de cette organisation étant liées à la nature profonde de l'esprit, se retrouvent les mêmes en tout esprit » (38).

Plus tard, au cours de l'activité scientifique, et déjà à l'aurore de cette activité, dans cette « expérience » rudimentaire mais si riche, source de vérité, où la raison est engagée avant que le raisonnement prenne forme, avant même que la réflexions apparaisse, que fait l'esprit ? Il « reprend l'œuvre de la perception » (39) et cela, à l'aide des seuls instruments dont il dispose : de l'analyse et de la synthèse, mais en en usant différemment, en leur demandant « de lui apporter la notion du rapport intelligible, et de fournir ainsi l'élément essentiel, la base sur laquelle s'élèvera l'édifice de la science » (40). Le premier travail scientifique consiste donc « à considérer le travail de l'analyse et le travail de la synthèse dans leur nature intrinsèque, indépendamment de tout objet auquel il pourrait s'appliquer » (41).

C'est exactement, semble-t-il, l'œuvre à laquelle nous fait assister M. Brunschvicg en décrivant les expériences élémentaires et fondamentales sur lesquelles reposent les notions qui dominent les mathématiques, et en lesquelles réside le secret de leur vérité intangible comme de leur fécondité indéfinie. Reprenons, par exemple, cet « échange de un contre un », acte manuel d'où sort toute l'arithmétique des nombres entiers, après la notion de nombre elle-même. Il s'agit, dans l'ouvrage de M. Brunschvicg, d'un enfant qui doit échanger des sous contre des pommes. « A mesure que l'enfant continue de donner un de ses sous pour recevoir une pomme, il voit diminuer le tas des sous qu'il avait dans sa main, augmenter le tas des pommes qu'il place devant lui. Quand

(36) **L. Brunschvicg**. « Introduction à la vie de l'esprit », p. 51.
(37) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 57.
(38) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 57.
(39) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 61.
(40) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 62.
(41) **L. Brunschvicg**. « Les étapes de la philosophie mathématique », pp. 467-468.

l'opération a pris fin, quelle qu'en ait été la durée, il possède ce qu'il devait échanger contre les sous qu'on lui avait confiés. Il comprend que, si les opérations ont été loyales et correctes, il rapportera bien ce qu'il devait rapporter, qu'il a bien donné au marchand ce qu'on lui avait dit de donner... L'enfant ne connaît encore, ni la collection en tant que collection, ni la relation du tout à la partie ; il voit seulement des tas de sous et des tas de pommes, il a les mêmes images avant et après la série des échanges. Mais, du fait de ces échanges, il s'est ajouté à ces images quelque chose qui n'est plus susceptible d'une représentation immédiate par des images : la pensée que les deux tas sont reliés l'un à l'autre par les opérations dont ils ont été l'objet. Cette pensée est présente à l'esprit de ceux qui ont fait ensemble ces opérations, puisqu'elle est, pour chacun la loi de son activité interne, comme elle est pour tous deux la règle de leurs rapports réciproques » (42).

Nous voyons là que, ce qui fait l'importance de cette expérience, de cet acte manuel qu'est l'échange, ce n'est justement pas que des opérations arithmétiques ultérieures s'y « réduisent », le « symbolisent » à quelque degré, ou en dérivent plus ou moins directement ; c'est que dans cette série d'opérations banales, est engagé en entier, pourvu que les opérants aient conscience qu'il font un échange « exact », ce qui fait l'essence de la pensée mathématique : cette activité à la fois de synthèse pure et d'analyse pure exercée, à propos de n'importe quels objets matériels, sur, en réalité, toujours les mêmes éléments idéaux et à laquelle la notion de correspondance entre collections (c'est-à-dire d'équivalence mathématique, sous l'une ou l'autre forme) est inhérente comme étant l'expression même de la liberté du double mouvement qui la constitue.

Ici, c'est, semble-t-il, la synthèse mathématique qui est surtout à retenir. Les deux tas sont, en effet, reliés l'un à l'autre parce qu'il y a chez ceux qui procèdent à l'échange, de part et d'autre, le sentiment de la stabilité globale des opérations qui les lient ; quel que soit le temps mis à accomplir ces dernières, quelles que soient les personnes qui les exécutent, quelque soit l'ordre dans lequel elles sont faites, le même lien

(42) **L. Brunschvicg**. « Les Etapes de la Philosophie mathématique », pp. 467-468.

existe entre les deux tas. Sur l'objectivité de cette affirmation, sur cette première « vérité » mathématique, repose l'idée que l'on peut recommencer l'échange autant de fois qu'on voudra, pour être bien sûr de ne pas s'être trompé, et que chaque fois le résultat sera le même : une fois « toutes » les opérations terminées, un tas se trouvera à la place de l'autre tas et vice-versa. D'autre part, chacune des opérations, à quelque moment, par quelque personne qu'elle soit accomplie, est « dégagée et isolée » (43) comme un « élément » en tout semblable aux autres, sans quoi les échangeurs chercheraient spontanément, au moment de vérifier leur compte, à recommencer leurs opérations toujours dans leur ordre initial ce qui, n'arrive pas. Bien plus, c'est, semble-t-il, en « mélangeant » chacun des tas, et en recommençant les échanges un à un dans un ordre très probablement tout nouveau, que l'on montre le mieux, si les deux tas s'épuisent encore en même temps qu'aucune erreur n'avait été commise dans la première série d'échanges. S'il en est ainsi, c'est que, parallèlement à la synthèse mathématique naissante, qui établit, à propos des « tas » la notion de correspondance d'où doit sortir la notion de nombre et toute la vérité arithmétique, il faut noter une « analyse » mathématique naissante, qui déjà, non pas dans les « tas » eux-mêmes, dont la nature a si peu d'importance (44), mais dans ce qui, mathématiquement, est essentiel, dans le « tout » idéal que constitue la mise en état d'égalité pratique de deux tas au moyen de l'échange de leurs objets un à un, distingue des « éléments », entre lesquels il existe, comme cela se doit dans cette « science fondamentale qui n'a d'autre but que la satisfaction intellectuelle » (45 , — l'« identité de nature et l'homogénéité » qui, d'autre part, existe entre eux et le tout (46) (ce tout n'étant, en effet, qu'un « échange » global, semblable, en soi à chacun des échanges d'un objet contre un objet).

Nous saisissons donc, ici, l'analyse et la synthèse, ces deux fonctions fondamentales, constitutives, peut-on dire, de l'es-

---

(43) **L. Brunschvicg.** « Introduction à la vie de l'esprit », p. 51.
(44) **L. Brunschvicg.** « Les étapes de la Philosophie mathématique », p. 467.
(45) **L. Brunschvicg.** « Introduction à la vie de l'esprit, p. 62.
(46) **L. Brunschvicg.** Même ouvrage, p. 63.

prit, et complémentaires l'une de l'autre, comme inséparablement liées dans cette première expérience de laquelle l'arithmétique tire sa « valeur de vérité ». Et l'on pourrait reprendre, à propos des opérations manuelles dans lesquelles on aurait pu, à la lumière d'un examen superficiel, voir, dans la pensée de Brunschvicg, la source et la justification, purement empirique, des autres disciplines mathématiques (telles que la géométrie ou l'algèbre), l'étude qui vient d'être esquissée à propos de l'échange de un contre un. La conclusion en serait analogue.

Et sans même abandonner l'exemple sur lequel nous nous sommes déjà attardés, nous pourrions voir que M. Brunschvicg n'accorde à l'expérience une valeur « mathématique », que lorsque le double processus d'analyse et de synthèse s'y déploie, dut-il encore échapper à la conscience. Sinon, pourquoi écrirait-il que : « tandis que le fait d'échanger un sou contre une pomme, ne constitue pas une opération mathématique, l'échange de quatre sous contre quatre pommes nous apparaît déjà comme une opération mathématique » (47) ? Il ajoute d'ailleurs : « C'est qu'en effet, l'échange unique est un tout que l'on ne songe pas à décomposer, le sou et la pomme en font partie intégrante. Mais la répétition de l'acte met nécessairement en relief un élément qui est constant pour l'enfant puisqu'il se prescrit une série d'opérations à renouveler. L'objet est autre : c'est un autre sou qu'il doit prendre dans sa poche, une autre pomme qu'il doit prendre sur la table du marchand. Ce qui se répète, c'est l'échange qu'il effectue entre un sou et une pomme, c'est l'acte que son bras accomplit au service de son esprit » (48). En d'autres termes, il est nécessaire qu'il y ait « des » échanges, considérés comme opérations élémentaires, véritables « unités » intellectuelles en même temps qu'expérimentales, pour que la pratique globale de l'échange soit une opération « mathématique », c'est-à-dire, il est nécessaire, pour cela, que la dite expérience globale soit, fût-ce obscurément, dans la conscience de l'enfant, « une synthèse », parallèle à l'analyse qui juxtapose, dans le temps, ses éléments, et inséparable d'elle.

---

(47) **L. Brunschvicg**. « Les étapes de la Philosophie mathématique », p. 466.

(48) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 466.

Si nous nous adressions à des expériences progressivement moins rudimentaires, mais au même titre tenues pour génératrices de pensée mathématique, nous retrouverions, dans le dynamisme qui les suscite et qui les prolonge, la même dualité. M. Brunschvicg montre qu'un pas nouveau est accompli vers la conquête de la notion de nombre, un progrès est par conséquent réalisé dans la pensée mathématique, quand « on a découvert le moyen d'abréger l'opération commerciale, en prenant deux objets en une fois au lieu de prendre deux fois un objet » (49), car « l'intelligence de cette équivalence, est, à nos yeux, ce qui constitue la conception du nombre deux. L'expression abstraite de cette équivalence serait de la forme : Une fois deux égale deux fois un, c'est-à-dire : $2 \times 1 = (1 \times 1) + (1 \times 1)$ » (50). Ici nous touchons peut-être encore de plus près à cette activité de l'esprit, dont nous venons de parler, et qui, déjà au sein de l'expérience primitive, s'exerce dans le double sens de la composition et de la décomposition, selon le rythme de sa nature propre. Tout le mécanisme de l'intelligence mathématique, dit autre part l'auteur, « est dans l'idée

$/////// = ///////$

ou, 7 est ///////

ou, 5 et 2 est 7

ou, 5 et 2 est 4 et 3

C'est un procédé de combinaisons qui permet de produire des touts transparents pour l'esprit, en ce sens qu'ils sont susceptibles de résolution intégrale. C'est ensuite un jeu de substitutions, grâce auquel il est possible de remplacer les uns par les autres, les touts qui se résolvent en éléments identiques » (51).

Nous verrions-nous par là ramenés, après un biais, à la théorie qui fait de la mathématique un pur jeu ? Pas le moins du monde. Le mot de« combinaisons » ne doit pas nous tromper à ce sujet. La mathématique, pour M. Brunschvicg, est bel et bien issue de l'expérience en ce sens que ce sont des actes manuels qui ont fourni à la pensée l'occasion et le moyen de manifester son originalité dès avant qu'elle ait conçu la numération, en ce sens « que l'intérêt matériel a

(49) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 472.
(50) L. Brunschvicg. Idem, p. 472.
(51) L. Brunschvicg. « Introduction à la vie de l'esprit », p. 64.

commandé les efforts de la pensée naissante, que, la nécessité est la mère de l'ingéniosité » (52). Mais cela ne veut pas dire que les opérations mathématiques se réduisent, directement ou indirectement, à des actes manuels. La « valeur de vérité » qu'elles pourraient sembler leur emprunter a pour source tout autre chose que de tels actes considérés, indépendamment de l'esprit.

Et l'esprit, dès avant l'apparition de la réflexion proprement dite, a ses lois propres, c'est-à-dire, son dynamisme propre, sont rythme caractéristique qui est celui de l'analyse et de la synthèse. Il ne l'a pas, à parler vrai, tiré des choses, mais l'a découvert peu à peu par son application aux choses, application conditionnée par les exigences de la vie pratique, en tout premier lieu. Quand on dit que la mathématique tire sa vérité de l'expérience, on sous-entend qu'elle tire sa vérité de l'expérience d'un être intelligent. C'est déjà entrevoir la collaboration dont parle M. Brunschvicg « entre la raison et les choses », collaboration dans la notion de laquelle se trouve la clef de la pensée mathématique — et de toute pensée, dira l'auteur ; c'est dire, si l'on veut, que la pensée mathématique naît de « l'interprétation » de l'expérience, plutôt que de la mimique, en elle-même sans signification, que l'expérience exige ; car, savoir, par exemple, quand on a quatre fois de suite posé un sou sur une table, et, chaque fois, pris une pomme, que l'on a autant de pommes que l'on avait, auparavent, de sous, c'est déjà interpréter son action.

Il semble, d'ailleurs, que ces philosophes eux-mêmes qui, comme ceux dont nous parlions plus haut, réduisent les opérations mathématiques à des opérations matérielles expérimentales, les réduisent à des opérations expérimentales, au moins jusqu'à un certain degré « interprétées » par l'esprit. Sinon, — à moins de quitter l'attitude qui est la leur, et que nous avions caractérisée de psychologique, pour adopter une attitude à la fois radicalement empiriste et réaliste, dont bien peu, semble-t-il, de penseurs seraient prêts, aujourd'hui, à se réclamer, — la « réduction », dont il est chez eux question, n'aurait pas de sens. Mais ici, il y a plus. La mathématique

(52) **L. Brunschvicg**. « Les étapes de la Philosophie mathématique », p. 470.

ne se réduit en aucune façon à une collaboration de la raison avec l'expérience : elle « en jaillit » (53), elle la prolonge pour ainsi dire.

L'activité caractéristique de l'esprit s'affirme au contact des choses, en tirant des opérations effectuées sur elles, — qu'il dirige d'ailleurs, à son insu, — tout le sens qu'elles ont par là-même. Puis, il poursuit lui-même sa voie, en des combinaisons de plus en plus compliquées, qui ne cessent d'avoir un lien avec les opérations matériellement exécutées, puisque l'activité de l'esprit, inhérente aux opérations matérielles exécutées intelligemment, est celle-là même qui les échafaude, — sans compter que, à l'origine des spéculations d'où elles résultent, il y a, presque toujours, quelque aporie suscitée à l'esprit par l'expérience elle-même : une division qui ne se termine pas, une soustraction impossible, etc...

Nous n'avons donc pas à nous étonner du caractère purement idéal que l'auteur semble parfois donner aux productions de la pensée mathématique, écrivant, par exemple, que le nombre « c'est une loi de raisonnement, c'est la condition d'un double processus de décomposition et de composition, ou, comme on dit encore, d'analyse et de synthèse » (54). L'explication, il nous la donne : « Nous dirons donc qu'au point de départ de l'analyse se trouve la réalité perçue ; d'ailleurs, que l'activité de la pensée mathématique ne puisse s'exercer que sur le monde de l'expérience, c'est presque une naïveté que de le dire, car l'expérience est coextensive à l'existence elle-même. Mais les groupes fournis par la perception sont soumis à l'activité résolutoire qui discerne chacun des éléments du groupe, qui le ramène au simple fait de présence, à l'acte de poser l'objet, et de le compter pour un. Des unités ainsi rendues homogènes les unes aux autres, la pensée synthétique va faire un nombre » (55). C'est, dit-il plus loin, en dernier ressort « par l'équivalence des opérations synthétiques, que, se définit la notion de nombre » (56), c'est-à-dire, l'unité perçue par l'esprit entre différentes synthèses d'éléments idéaux, qui prolongent et complètent son

(53) **L. Brunschvicg.** Même ouvrage, p. 471.

(54) **L. Brunschvicg.** « Les étapes de la Philosophie mathématique », p. 480.

(55) **L. Brunschvicg.** Même ouvrage, p. 480.

(56) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 481. — « L'expérience humaine et la Causalité physique », p. 475.

activité dans des expériences sur les choses (telles que l'échange de un contre un).

L'auteur ne pouvait guère mieux marquer, à la fois le caractère idéal des mathématiques, schème d'analyse pure et de synthèse pure indéfinie, et le fond de réalité expérimentale d'où elles prennent leur essor, sans que ceci contredise le moins du monde cela.

Pour être complets, il nous faudrait rappeler aussi le soin qu'il prend pour mettre en évidence, parallèlement au caractère idéal des notions dont le rattachement étroit et lourd à l'expérience choquerait peut-êre le moins, le fondement expérimental, concret pour ainsi dire, des notions et lois mathématiques apparemment les plus arbitraires, de celles qui sembleraient donner le plus prise aux adversaires de toute connexion en droit, — nous ne disons pas « en fait », — des mathématiques avec l'expérience. Nous ne le ferons que sur un seul exemple, et l'on nous excusera de citer *in-extenso* le texte, en raison de la lumière qu'il nous semble jeter sur la pensée de l'auteur.

M. Brunschvicg montre comment la règle algébrique selon laquelle le produit de deux nombres négatifs est le nombre positif ayant même valeur absolue que le produit de leurs valeurs absolues, règle qui paraît, au premier abord, tout à fait arbitraire, et étrangère à toute « expérience », tire, en réalité son autorité de la multiplication arithmétique — qui, elle, incontestablement, la tire de cette collaboration de la raison et de l'expérience dont nous relevons, plus haut, l'importance dans sa philosophie. Suivons son argumentation. (Il s'agit de montrer le fondement de l'égalité : $(-)5) \times (-)10) = (+)50$) : « La question est de savoir si la quantité $(+)50$ qui correspondrait par convention à la multiplication de deux nombres négatifs est effectivement la même quantité que le nombre naturel 50, produit des deux entiers positifs 5 et 10. De deux choses l'une : ou cette identification est le résultat d'une libre convention, la première quantité et la seconde devront être alors toutes deux des notions symboliques, dépourvues de toute signification intrinsèque ; le calcul des entiers positifs et celui des expressions qualifiées perdront définitivement toute valeur scientifique, pour n'être plus qu'un jeu d'écritures, — ou bien il est possible d'établir entre l'opération dont la première quantité est

issue et l'opération dont la seconde provient, une connexion capable de faire participer la seconde à la vérité de la première. Cette connexion se présentera, d'ailleurs, de la façon la plus simple. Remplaçons 5×10 par l'expression équivalente :

$$(10 - 5) \times)20 - 10)$$

et effectuons les opérations. Sur les quatre opérations, il y en a trois que nous savons faire et qui nous donnent : $200 - 100 - 100$, c'est-à-dire 0. Reste la quatrième opération : la multiplication des quantités affectées du signe —. Le résultat ne peut en être fixé que par convention ; mais la convention obéit à une règle de « convenance ». La règle doit être telle que le produit $(10 - 5) \times (20 - 10)$ soit égal au produit 5×10. Or c'est à quoi nous ne pouvons satisfaire qu'en posant :

$$(-5) \times (-10) = 50$$

La valeur de vérité qui est dans l'égalité arithmétique

$$5 \times 10 = 50$$

s'étend à l'équation algébrique :

$$(-5) \times (-10) = 50$$

et justifie la règle des signes » (57).

Et, interprétant lui-même sa propre pensée l'auteur ajoute immédiatement : Cette extension est une convention a priori en ce sens qu'elle est une libre création de l'esprit. Mais liberté ne signifie pas arbitraire. La convention procède ici de l'élan acquis par l'esprit au contact de la réalité, et dont il se sert pour découvrir de nouveaux horizons de réalités. Entre le domaine des nombres positifs et le domaine des nombres négatifs, il n'y a pas identité logique ; on ne peut pas justifier le passage à l'aide d'un principe tel que la permanence des formes opératoires. Mais on retrouve ce qu'il y a de fondé dans la pensée de Hankel, en substituant à la notion d'un principe à priori celle d'une connexion — « connexion rationnelle » suivant le langage de Cournot, et, plutôt encore peut-être, connexion naturelle » (58).

Nous retrouvons là ce que nous connaissons déjà par les différents textes cités : la double caractéristique de la pensée

(57) **L. Brunschvicg.** « Les étapes de la Philosophie mathématique », pp. 540-541.

(58) **L. Brunschvicg.** Même ouvrage, p. 541.

mathématique selon l'auteur, son inséparabilité de l'expérience, et, cependant, cette nature intellectuelle qui est comme son âme, et qui lui permet de prolonger, sans avoir jamais à craindre de contredire l'expérience, les plus anciennes et les plus solides, apparemment de ses œuvres, indéfiniment. C'est là, semble-t-il, le point essentiel de l'« intellectualisme mathématique » de M. Brunschvicg ; ce qui l'oppose à la fois aux philosophies qui ne voient dans les opérations mathématiques, — en droit, — que pur jeu logique, et à celles qui en font la transposition pure et simple, d'une manière plus ou moins détournée, mais, négligeable en ce qui concerne leur « nature profonde », des opérations manuelles qui ont pu servir à trouver la vérité, et qui parfois servent encore à la mettre en évidence, soit pour ce qui est des collections d'objets, soit pour ce qui est des figures tracées.

Mais cela ne suffit pas à sa détermination, sinon complète, du moins assez riche dans sa précision schématique pour englober déjà à titre d'« explication » virtuelle, tout ce qu'on pourrait dire de plus pour la compléter. Une telle détermination exige que, de même que nous avons cherché la clef de l'« empirisme » apparent de M. Brunschvicg, comme de son idéalisme, dans ce que nous avons appelé l'« interprétation de l'expérience » — c'est-à-dire dans l'activité intellectuelle qui lui est inhérente, — nous cherchions dans la nature de la pensée mathématique telle que nous l'avons en partie dégagée, la clef de cet essor indéfini qu'elle prend, une fois que le contact avec les choses en a fait une pensée vraie.

Cet essor, cette capacité indéfinie de développement, est, en effet, ce qui, avant tout, selon M. Brunschvicg, doit être pris en considération dans une philosophie mathématique qui, comme la sienne, prétend ne pas supposer « une inversion de sens entre l'ordre psychologique de l'invention et l'ordre logique de l'exposition » (59). Une telle philosophie, résout le problème de la vérité mathématique, ou plutôt « fait voir que le savoir scientifique l'a effectivement résolu, si elle sait assigner un même but à l'effort de l'inventeur et au travail du logicien : l'extension progressive des opérations

(59) **M. Brunschvicg**. « Les Etapes de la philosophie mathématique », p. 560.

mathématiques. La vérité de la science n'implique plus alors la supposition d'une réalité transcendante ; elle est liée aux procédés de vérifications qui sont immanents au développement de la mathématique » (60). En d'autres termes, ce développement est légitimé, sinon expliqué, par ce qui, dans l'esprit, est à la fois la source de la logique déductive et la source de l'idée neuve vraie. En l'examinant de plus près, nous arriverons peut-être à nous demander si les tendances, — au moins si la tendance principale — qui le caractérisent, ne se retrouveraient pas tout entières dès l'éclosion de la pensée analysable, dans les actes les plus primitifs de l'esprit desquels la mathématique puisse se réclamer ; si un même principe, inhérent à la pensée et formant comme son âme, ne se cache pas dans toute démarche mathématique, ainsi que dans l'ensemble de ces démarches.

C'est ce principe, s'il existe, que nous voulons chercher, car, nous livrant un ressort important, — sinon le ressort, — de l'attitude de M. Brunschvicg, sa connaissance nous rendrait plus aptes à déduire ce qu'elle implique, plus sûrs aussi, éventuellement, à conjecturer ce qu'elle sous-entend en ce qui concerne, parmi les problèmes de la philosophie mathématique en général, le problème de la nature de la simplicité, qui est celui qui retient notre attention.

Or que remarque-t-on, — que remarque M. Brunschvicg, — dans le développement indéfini des mathématiques ? Une tendance, parfois, souvent même, inconsciente, mais réelle et incontestable, à l'unité : unité d'abord au sein de la mathématique elle-même — entre ces diverses branches, — unité aussi entre la mathématique et les autres disciplines, qui éclaire et explique le progressif enserrement de l'univers physique, au sens large du mot, dans le réseau de moins en moins lâche, de la mesure et du calcul (de l'ordre et du nombre) ; unité, en un mot, de toutes les formes de l'activité de l'esprit, et à tous leurs degrés, révélatrice de la foncière et primitive unité de l'intelligence, dont l'auteur parle à plus d'un endroit (61).

M. Brunschvicg montre déjà que « sous le désordre apparent de l'exposition la science euclidienne implique une théo-

(60) M. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 561.

(61) L. Brunschvicg. « Les Etapes de la philosophie mathématique », p. 572.

rie générale des grandeurs, une arithmétique universelle » (62). L'expression est remarquable. Et, qu'elle ait été ou non dégagée, cette science unique ; que l'antiquité se soit ou non souciée de l'extension rationnelle des découvertes des mathématiciens à la science universelle de la nature (63), cela n'en empêche pas moins que la tendance naturelle de la science mathématique, soit la tendance à l'unité, et à l'extension par l'unification, tendance qui, visible en elle dès le début, s'affirme avec une nouvelle vigueur à chacune des grandes étapes de la pensée mathématique.

Unité au sein même de la mathématique d'abord, avons-nous dit. Déjà dans un corps de vérités représentant ce qu'on pourrait appeler une même branche de la mathématique (la géométrie), dans les éléments d'Euclide, l'auteur pense qu'on pourrait, — que, logiquement, on aurait pu, — en dépit de leur hétérogénéité apparente, non seulement « rapprocher les théories analogues de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace », mais surtout « ces livres qui traitent successivement des similitudes géométriques, des rapports numériques, des incommensurables » (64) et en dégager explicitement « l'unité dont l'auteur des éléments ne pouvait pas ne pas avoir conscience au moment où il les disposait à la suite les uns des autres » (65).

Par ailleurs, il marque, entre autres, au sein de la grande réforme cartésienne, la présence et le rôle de cette tendance à l'unité qui, latente dans les diverses disciplines, les « sciences particulières qu'on nomme communément mathématiques » (66), se manifeste plus particulièrement à certains moments, entraînant un progrès véritable pour la mathématique tout entière, qui, par la connaissance du lien profond, organique qui unit ses différentes parties, prend, pour ainsi dire, mieux conscience d'elle-même en tant que science, affirme mieux, et son objet et sa méthode (67).

---

(62) **L. Brunschvicg.** Même ouvrage, p. 95.
(63) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 96.
(64) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 95.
(65) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 95.
(66) **Descartes.** AT ; II, 19, cité par L. Brunschvicg dans l'ouvrage sus-mentionné, p. 106.
(67) **L. Brunschvicg.** Ouvrage cité, p. 106.

Et, plus loin, commentant le nouveau progrès accompli en mathématique par les découvertes de Leibuitz pour qui « la science de l'Infini sert à trouver les quantités finies » (68), il y voit encore un élargissement dû à leur foncière tendance à l'unité. « La meilleure méthode, pour l'intelligence mathématique de l'univers, n'est nullement celle qui, dans certains cas élémentaires présente l'application la plus facile ; car cette facilité même, de nature à séduire le philosophe, paralyse le savant en présence des problèmes complexes que la réalité ne peut manquer de poser. C'est celle qui, dans l'apparence du simple sait déjà discerner la complexité, l'« immense subtilité » caractéristique du réel ; les principes n'y sont plus des forces déterminées et closes, destinées à opérer la cristallisation du système scientifique ; ce sont des ressorts d'action, des armes pour l'extension illimitée du savoir positif » (69).

Ici, comme on le voit, il s'agit de l'unité au sein même de la mathématique (dont les problèmes « complexes », posés par le réel, mais n'en restant pas moins des problèmes « mathématiques », doivent être traités comme des « cas généraux » des problèmes plus simples et plus aisés) ; mais il s'agit surtout du fait que la mathématique est, du point de vue de la connaissance en général, un instrument d'unification. C'est que, ces deux aspects de la tendance à l'unité — unité « interne », et puissance d'unification de l'univers connaissable, — sont inséparables. Ils sont inséparables parce qu'ils tiennent tous deux à la nature même de l'esprit telle qu'elle se manifeste dans l'acte élémentaire du jugement, déjà. C'est dans la manière dont M. Brunschvicg conçoit cet acte, qu'il nous faut donc, en fin de compte, chercher le secret de l'extension une et indéfinie des mathématiques, ainsi que de leur conquête progressive du reste des sciences.

En effet, dans toute science (et on pourrait, avec l'auteur, dire : dans toute activité spirituelle), c'est une « vérité » d'un certain ordre que l'on recherche. Or, avant tout, vérité

---

(68) **Leibnitz.** « Mathesis universalis » M., VII, 69, cité par L. Brunschvicg.

(69) **L. Brunschvicg** « Les Etapes de la philosophie mathématique », pp. 207-208.

signifie intelligibilité (70). Et, à son tour, intelligibilité signifie unité, « intériorité » des idées les unes aux autres. « Tout jugement qui émane de l'intelligence, a pour raison d'être, pour principe constitutif, l'intériorité, par suite l'unité profonde des idées dont il exprime le rapport » (71). Et c'est cette unité interne qui est la caractéristique par excellence du jugement mathématique surtout, du type le plus parfait de ce que M. Brunschvicg appelle un jugement « d'intériorité » (72). « La forme essentielle du jugement, écrit cet auteur, est d'être un rapport... mais, pas un rapport entre termes préalablement posés l'un à part l'autre, qui seraient, eux aussi, des jugements antérieurs. *Le rapport précède ici les termes* (73) ; le jugement en est issu tout entier, il en est la manifestation, l'explication. Un tel rapport est un rapport primitif, il est le rapport absolu, pourrait-on dire ; par suite, il est unité ; car seulement l'unité ne supposant avant elle aucune multiplicité, peut se poser comme primitive et comme absolue. La forme du jugement peut donc être définie comme forme d'unité » (74). Et, plus loin, commentant plus particulièrement le jugement mathématique, et essayant de mettre en lumière sa nature intime, sur l'exemple banal « La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits », il revient encore sur l'unité profonde, — interne, — que ce jugement exprime. Pour lui, on ne saurait concevoir d'un côté le sujet, et de l'autre l'attribut, pour les raccrocher, après coup, l'un à l'autre, mais « les deux notions sont liées par une relation intelligible parce qu'elles sont unies dans un acte simple de la pensée qui est le jugement lui-même : la séparation de ces deux termes et l'expression de leur rapport dans la copule extériorisent, et trahissent, par suite, cette unité intelligible. Ce par quoi le jugement mathématique est intelligible, c'est la pure intériorité, c'est l'unification de la pensée » (75).

L'unité, donc, à laquelle atteint la science mathématique, est déjà réalisée, selon l'auteur, dans cette unité élémentaire,

---

(70) **L. Brunschvicg.** « Introduction à la Vie de l'Esprit », p. 87.

(71) **L. Brunschvicg.** « La Modalité du Jugement », p. p. 87.

(72) **L. Brunschvicg.** Même ouvrage.

(73) C'est nous qui soulignons cette expression.

(74) **L. Brunschvicg.** « La Modalité du Jugement », p. 80.

(75) **L. Brunschvicg.** « La Modalité du Jugement », p. 81.

antérieure à tout autre, du jugement en général — de cet « acte qui pose la copule » (76), (acte simple entre tous) — et du jugement mathématique en particulier, dans lequel l'« intériorité » des notions les unes par rapport aux autres atteint son maximum. Elle se trouve, d'ailleurs, au fond de tout corps de jugements mathématiques enchaînés les uns aux autres, et on peut dire que, tenant à l'activité constructive de l'esprit dans sa nature, elle se révèle dans ses œuvres à toutes les étapes. « Les mathématiques, dit M. Brunschvicg, se développent par une série de transformations entre jugements dont la copule est toujours identique, dont les termes se substituent indéfiniment les uns aux autres » (77).

Et, de même que l'unité de chaque « transformation », tient à l'unité primitive, à l'unité pure inhérente au jugement mathématique, de même on peut dire que, en elle est le principe de l'extension indéfinie des mathématiques et de leur unification progressive non du dehors, mais du dedans, par « un jeu de relations effectives qui fait d'une série de disciplines distinctes un tout organique, par une connexion de systèmes de connexions » (78), ainsi que de leur progressive pénétration dans des domaines scientifiques de plus en plus variés (79), de leur caractère d'« instrument pour la science plutôt que de science véritable » (80). En effet, plus la mathématique s'étend, plus le « système de connexions » dont parle l'auteur se complique, et plus ce rapport posé avant ses termes qui constitue l'essence du jugement tel que nous venons de le voir devient significatif ; les vérités les plus apparemment étrangères les unes aux autres, et les plus « distinctes » auparavant se trouvant unies de proche en proche — et unies du dedans. — plus il devient possible de concevoir toute la mathématique, et par elle, toute la connaissance exacte, en quelque sorte comme un vaste jugement, englobant une infinité de termes, mais ne perdant rien, de ce fait, de sa nature de « jugement », par conséquent de son unité interne ; plus, cette notion d'acte simple et original de l'esprit,

---

(76) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 15.

(77) L. Brunschvicg. Idem, p. 22.

(78) L. Brunschvicg. « Les Etapes de la philosophie mathématique », p. 550.

(79) Voir L. Brunschvicg « La modalité du jugement », p. 9, (sur les concepts en pure compréhension de la mathématique.)

(80) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 153.

devient donc expressive d'une puissance d'unification universelle, puissance qui n'est autre que l'intelligence elle-même (81).

L'unité se retrouve donc aux deux bouts de la mathématique : principe du jugement mathématique, — et, en général, du dynamisme de la pensée mathématique — ; principe de l'équilibre final vers lequel tend cette pensée à travers ses actes, d'autant plus visible que ces actes sont plus géniaux. En d'autres termes, plus l'œuvre la plus pure de l'intelligence devient complexe, et plus elle se montre une et simple dans son essence — de même nature, au fond, que le jugement mathématique le plus simple — car (et cela est particulièrement intéressant pour nous), pour M. Brunschvicg, unité et simplicité semblent aller de pair parce qu'elles sont de même nature.

Certes, cette idée d'une unité globale vers laquelle tendent les mathématiques, unité réalisée dans la complexité croissante, et, par essence, la même que celle de l'acte simple, peut n'aller pas sans susciter pour nous quelques difficultés dans l'examen de la question de ce que c'est, pour M. Brunschvicg, que la simplicité, en mathématique. En effet, nous ne voyons pas, au premier abord, semble-t-il (quoique nous soyons portés à chercher à le faire), comment nous pourrions donner à la notion de simplicité mathématique, chez notre auteur, telle qu'elle paraît de loin commencer à s'esquisser à travers ce que nous venons de dire, une expression parallèle, analogue d'une certaine manière, à celle que nous avons cru pouvoir donner de la même notion (du moins de la notion de même nom), et chez les Logisticiens, et chez ceux qui, comme Henri Poincaré et d'autres, ne séparent pas épistémologie de psychologie Mais il est certain que l'idée d'unité, avec la signification et l'importance qu'il lui donne, est bien ce qui à la fois complète et explique, chez M. Brunschvicg, la théorie des mathématiques, ni logistique, ni empiriste, qui se dégage de l'œuvre de ce philosophe, et dont nous avons essayé de donner un aperçu. Il est certain qu'elle est bien le principe de la conciliation profonde, de l'intérieur, non du dehors, du point de vue logique et du point de vue psychologique, que cette théorie paraît tendre à la fois à satisfaire.

---

(81) **L. Brunschvicg.** «Les Etapes de la philosophie mathématique», p. 550.

Les écoles précédemment évoquées avaient opposé, pour donner respectivement à chacune la première place dans leur conception des mathématiques, l'intuition, faculté inventive du mathématicien, et la logique, ensemble statique de lois régissant les jeux de l'intelligence pure. Pour M. Brunschvicg, comme, au fond, pour Descartes, dont il interprète la pensée en ce sens, l'intuition est « la vue synthétique qui rend simultanément présents à l'esprit les moments distincts d'un raisonnement, qui leur permet d'y agir simultanément et d'y engendrer toutes leurs conséquences. L'intuition est l'intelligence elle-même » ; elle « ne s'oppose nullement à la déduction puisqu'elle en est l'origine et la concentration » (82).

« Que l'esprit prenne directement conscience de cette synthèse, — dit-il ailleurs, en parlant de la synthèse des idées où réside l'unité et la valeur démonstrative d'une démonstration, — ou qu'il ait recours à des intermédiaires, il faut toujours qu'il en arrive à cette unité interne des idées ; l'effort de la déduction n'a d'autre but que de rendre possible cette unification interne, cette « intériorisation » qui est la source de toute intellection » (83). Mais, nous ne saurions trop le répéter : l'unité que conçoit M. Brunschvicg à la base, et de l'intuition mathématique, et de la déduction est une unité du dedans, le principe d'un dynamisme. Il ne s'agit pas plus, pour lui, d'une « intuition passive suspendue à l'existence de son objet » (84), que d'une logique qui tirerait sa valeur d'une vérité transcendante. « Le raisonnement mathématique est absolument autre chose qu'une série de concepts rigides enchaînés dans un ordre fixe. Le mathématicien voit les vérités dans leur ensemble ; le système rigide s'est résolu et confondu dans une unité ; au lieu de se suivre les vérités se sont unies, elles sont devenues intérieures les unes aux autres ; et la pénétration réciproque de ces premiers théorèmes, fait jaillir, dans l'esprit du mathématicien les aperceptions nouvelles, les synthèses originales qui forment autant de découvertes » (85).

(82) L. Brunschvicg. « Les Etapes de la philosophie mathématique », p. 451.
(83) L. Brunschvicg. « La Modalité du Jugement », p. 85.
(84) L. Brunschvicg. « La Modalité du Jugement », p. 85.
(85) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 86.

L'intellectualisme mathématique de l'auteur, est, en un mot « une doctrine positive, mais qui intervertira les formules habituelles du positivisme : au lieu de faire sortir le progrès de l'ordre, ou le dynamique du statique, il tend à faire de l'ordre logique le produit du progrès intellectuel. La science à venir n'est pas enfermée comme l'aurait voulu Comte, comme le voulait déjà Kant, dans les formes de la science déjà faite ; la constitution de ces formes révèle un dynamisme originel », — une tendance vers l'un déjà caractéristique de l'acte simple du jugement — « dont l'élan se prolonge par la génération synthétique de notions de plus en plus compliquées » (86).

Il nous reste maintenant, à la lumière de cette conception des mathématiques à examiner ce qui, pour M. Brunschvicg, constitue justement, mathématiquement parlant, la simplicité (et par suite la complexité), soit dans les « enchaînements », soit dans les notions, comme nous avons cherché à le déterminer pour les philosophies précédentes.

---

(86) **L. Brunschvicg. « Les Etapes de la philosophie mathématique »**, p. 567.

CHAPITRE XVII

QU'EST-CE, POUR M. BRUNSCHVICG, QUE LA SIMPLICITE DES « ENCHAINEMENTS » MATHEMATIQUES ?

D'après ce que nous venons de voir, il est certain que la notion de simplicité mathématique a, pour M. Brunschvicg, une signification et une importance, tant scientifique que philosophique.

Nous avons, tout au début de la présente étude, séparé la simplicité qui se conçoit dans les « enchaînements » mathématiques, de celle des notions, et vu que, bien souvent, il y a même lieu de les opposer l'une à l'autre, la première ayant surtout la valeur d'un idéal vers lequel le mathématicien tend de plus en plus. Il semble, d'après ce qui se dégage de sa philosophie mathématique, que, chez nul autre, cette préséance de la simplicité des « enchaînements (raisonnements, théories, corps de doctrine scientifiques) ne soit plus marquée que chez M. Brunschvicg. En effet, c'est vers l'unité que, pour lui, tend la mathématique. Ses moments importants, ses « moments solennels », comme écrit l'auteur (1) sont des pas vers l'unité. Or, dans sa conception, unité et simplicité vont de pair, si elles ne se confondent pas tout à fait ; et l'unité à laquelle il donne tant d'importance n'est pas celle seulement de telle ou telle partie de la science ; (on s'achemine vers elle quand « deux domaines qui étaient jusque-là cultivés pour eux-mêmes et qui paraissaient voués à une limitation définitive, entrent tout d'un coup en contact et se prêtent un secours mutuel » (2) ; elle est encore moins celle de notions particulières ; elle est non seulement celle de toutes les mathématiques, mais celle de toute la science, non seulement celle de toute la science, mais, en fin de

(1) **L. Brunschvicg.** « Les Etapes de la philosophie mathématique », p. 446.

(2) **L. Brunschvicg.** Même ouvrage, p. 446.

compte celle de toute l'activité humaine. « La loi qui oriente notre activité vers la vérité, vers la beauté, vers la moralité, se trouve dans une loi unique, la loi d'unité, qui est la « loi suprême » (3).

C'est si vrai qu'à cette unité, — à cette simplicité — du tout, est sacrifiée la simplicité des cas particuliers, comme nous l'avons vu à diverses reprises (4). Sans la complication progressive et de ses notions, et de ses opérations, la mathématique n'y parviendrait pas. C'est ce vaste corps de vérités enchaînées les unes aux autres que constitue l'ensemble des différentes disciplines mathématiques, qui tend, tout entier, en tant qu'enchaînement, vers l'unité, vers la simplicité la plus grande qu'il puisse atteindre. C'est lui dont l'unité tend, à son tour, à rejoindre celle de la science universelle, dont la mathématique est l'instrument, de mieux en mieux adapté à mesure que ses rouages se compliquent et que ses grandes lignes générales gagnent en simplicité ; — l'auteur dirait sans doute : à rejoindre l'unité de l'activité universelle. Savoir, donc, quelle est, pour M. Brunschvicg la nature de la simplicité d'un « enchaînement » mathématique, ce serait connaître l'idée qu'il se fait de son propre « idéal » scientifique, — qu'il se fait, plus explicitement, du « pourquoi » de la perfection d'une mathématique parfaite. La question est donc doublement intéressante ; en même temps que sa solution jettera une lumière nouvelle sur le problème général de la nature de la simplicité, elle nous permettra, du même coup, d'approfondir davantage le sens de la pensée de M. Brunschvicg, en précisant pour nous ce qui, à ses yeux, semble être essentiel dans sa philosophie : la « cause finale », si l'on peut ainsi s'exprimer, de son dynamisme mathématique.

Pour la résoudre, il est bon, semble-t-il, de rechercher ce pourquoi de perfection, cette cause de l'unité, c'est-à-dire de la simplicité d'un enchaînement mathématique, non pas, brusquement, dans l'examen, forcément superficiel, du vaste corps de science qui « tend » à cette unité, mais dans celui d'enchaînements moins imposants, en particulier, dans celui du

(3) **L. Brunschvicg**. « Introduction à la vie de l'esprit », p. 155.
(4) Voir plus haut, pp. 366 et 369.
(5) **L. Brunschvicg**. « Les étapes de la philosophie mathématique », p. 496.

raisonnement mathématique ordinaire, qui l'« atteint » pour son propre compte. Réalisée sur une vaste échelle, ou dans un domaine restreint, cette précieuse unité, — cette « simplicité » — est la même en son essence.

Qu'est-ce donc qu'un raisonnement ? C'est le passage logique, absolument rigoureux et explicite s'il s'agit d'un raisonnement mathématique, de certaines prémisses à certaines conclusions. Ce n'est pas un « acte simple » de l'esprit, comparable au jugement, mais un processus qui présuppose le jugement et apparaît même à l'auteur comme « complètement différent » de celui-ci, en tant qu'il est « une synthèse des jugements eux-mêmes » (6). Nous avons vu que l'unité que l'on retrouve aux deux extrémités, pour ainsi dire, de la pensée mathématique, réside, à l'origine, dans l'acte immédiat du jugement, cet « acte qui pose la copule » (7), et qui est « la traduction immédiate de cette perception d'un rapport, qui faisait la réalité du concept » (8). Chercher ce qui fait la simplicité d'un raisonnement rigoureux, c'est, semble-t-il, chercher comment une « synthèse » de jugements peut rester « une », bien qu'il y ait en elle, cela va de soi « plusieurs » jugements.

« L'addition, dit M. Brunschvicg, est le principe de toute synthèse et la substitution le fondement de tout raisonnement » (9). C'est, en effet, la substitution des concepts équivalents, c'est-à-dire des jugements équivalents, en fin de compte, les uns aux autres, qui permet au raisonnement d'« avancer », et cette substitution est, dans le raisonnement mathématique, d'autant plus parfaite — et le raisonnement par suite d'autant plus rigoureux — que les définitions des concepts, plus précises, permettent leur plus sûre identification.

Prenons, par exemple, le raisonnement classique par lequel se démontre que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, raisonnement rappelé par l'auteur (10). On arrive à établir cette vérité, comme tout le monde le sait, en partant du seul fait que la figure en question est un trian-

---

(6) L. Brunschvicg. « La Modalité du Jugement », p. 16.
(7) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 15.
(8) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 10.
(9) L. Brunschvicg. Idem, p. 149.
(10) L. Brunschvicg. Idem, pp. 81 et 85.

gle, et que la somme des angles adjacents d'un même côté d'une droite, dans un plan, est égale à deux angles droits. De là, on peut « passer » à la vérité concernant la somme des angles « d'un triange », justement parce que, à chacun des deux termes du jugement qui l'exprime, « se substitue une propriété commune » (11) — (celle qu'a la somme des angles occupant la position que nous venons de décrire, d'être égale à deux angles droits) —, et, « cette substitution se fait par le dedans, en vertu des définitions constitutives des concepts : les deux idées sont alors enveloppées dans une synthèse rationnelle qui en fait une idée unique » (12). En d'autres termes, ce qui fait le minimum d'unité nécessaire à la validité de tout raisonnement rigoureux, c'est le fait que, la conclusion à laquelle il aboutit, et les prémisses desquelles il est parti constituent, au fond, deux expressions, deux « explicitations » d'un seul et même jugement, ce fait étant mis en évidence par substitutions successives, comparables, chacune, à celle dont il vient immédiatement d'être question dans l'exemple précité. C'est d'ailleurs ce que dit M. Brunschvicg, en parlant de ce raisonnement élémentaire qu'est le syllogisme. « Le syllogisme parfait fait voir simplement qu'un même acte de l'esprit, un jugement, est susceptible de deux traductions différentes, et il le fait voir au moyen de jugements auxiliaires qui expriment, l'un l'identité partielle ou totale de deux sujets, l'autre l'identité partielle ou totale de deux prédicats, et qui sont ainsi des jugements d'identité permettant la substitution, totale ou partielle, d'un terme à l'autre. Mais la conclusion n'est pas un jugement nouveau » (13).

On objectera peut-être qu'il s'agit là de « syllogisme », et que personne ne saurait actuellement soutenir que le raisonnement mathématique se réduit à la forme syllogistique qu'il revêt : qu'il s'agit là de relations de sujet à prédicat, c'est-à-dire, en somme, d'une « logique de l'attribution », alors qu'en mathématiques c'est surtout une « logique de relations » qui joue ; que, en d'autres mots, des jugements tels que : « Socrate est juste », et « La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits », ne sont pas de même nature, et, par suite, ne sont pas comparables. Mais on peut, après avoir re-

(11) L. Brunschvicg. « La Modalité du Jugement », p. 85.
(12) L. Brunschvicg. Idem, p. 85.
(13) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 19.

connu le bien fondé de ces remarques, répondre que, ce qui est avant tout en question dans tout ceci, c'est, non le jugement lui-même, mais l'ensemble constitué par des jugements unis en synthèse, — le raisonnement ; et que, rien ne laisse prévoir, du seul fait, qu'il existe des jugements qui, individuellement, admettent de profondes différences de nature de l'un à l'autre, qui, pour ainsi dire, relèvent d'une logique différente, que ces jugements ne puissent pas, entre eux, dans leur catégorie fonctionnelle respective, être en vue d'une synthèse, liés les uns aux autres de la même manière, et suivant les mêmes lois. Les synthèses elles-mêmes pourraient être de nature différente quant à ce qu'on pourrait appeler leur contenu, ou leurs « éléments », et cependant, devoir leur existence de synthèse valable — de raisonnement rigoureux — aux mêmes principes logiques, ou aux mêmes lois psychologiques, de jeu entre ces éléments. D'autre part, si le raisonnement mathématique ne se réduit certes pas au syllogisme, en tant qu'il est une œuvre positive de l'esprit, un « progrès » de la connaissance, il n'en reste pas moins vrai qu'il se sert à chaque pas de la forme syllogistique. Si donc, l'âme du raisonnement, — la pensée vivante, qui, pour reprendre l'expression de M. Goblot, que, sans doute, M. Brunschvicg ne critiquerait pas, construit la conclusion à l'aide des prémisses ; la pensée qui « choisit » dans l'ensemble du déjà admis la majeure de chacun des nouveaux syllogismes, et « dirige » effectivement ceux-ci, — se tient au-delà du syllogisme, il reste vrai que cet instrument précieux, indispensable, avec les lois que comportent son maniement, lui est adapté d'une façon très adéquate.

Il n'est donc pas superflu de rappeler ce qui, dans un syllogisme parfait, est cause de validité, et en même temps d'unité, car cette unité pourrait bien être, plus profondément, assise sur le fait, que la pensée qui anime le raisonnement est inséparable de lui. Mais, si l'on y réfléchit quelques instants, dire que, pour M. Brunschvicg, pour lequel, comme nous l'avons vu déjà, unité et simplicité vont de pair, le raisonnement mathématique se réduit à une série de substitutions parfaitement légitimes ; que les enchaînements plus vastes que les démonstrations individuelles, qui constituent le développement même des mathématiques, se réduisent eux aussi, tous, de proche en proche, à des transformations « entre jugements dont la copule est toujours identique, dont les

termes se substituent indéfiniment les uns aux autres » (14), n'est-ce pas affirmer que tout raisonnement mathématique est simple ? — car, sans l'unité que confère au raisonnement l'intériorité des jugements qui s'y succèdent (qui s'y enchaînent), les uns par rapport aux autres, celui-ci ne serait plus absolument rigoureux, ne répondrait pas, par conséquent, à l'idéal du raisonnement mathématique... à moins que, il n'y ait, justement, lieu de distinguer entre la « simplicité » du raisonnement, et ce minimum d'unité qu'il est obligé, par son essence, de réaliser ; à moins que le raisonnement puisse fort bien être plus ou moins simple, pour nous du moins, sans que les jugements qui s'y succèdent ne cessent d'être suffisamment « intérieurs » les uns par rapport aux autres, pour que leur succession soit rigoureuse, c'est-à-dire, semble-t-il, conformément au point de vue de la philosophie de l'auteur, pour qu'une intelligence, extrêmement supérieure à la nôtre par définition, puisse les englober tous dans un seul et même acte.

Or il est évident que tout raisonnement mathématique n'est pas simple, ou, du moins, n'est pas aussi simple que tel autre ; il est évident aussi que tous n'atteignent pas l'idéal de simplicité — le maximum d'unité dont ils sont, apparemment, susceptibles —, sinon il ne saurait être question d'une « tendance » à l'unité de l'ensemble des raisonnements et théories qui constituent le corps des mathématiques. D'autre part, supposerait-on un instant, que, pour M. Brunschvicg, tous atteignent cet idéal, logiquement, sinon psychologiquement, que cette affirmation arbitraire, mettant, d'un certain point de vue, sur le même plan, des synthèses de jugements aussi différentes, et aussi inégales en tant que synthèses, que celles que représentent toutes les démonstrations mathématiques, depuis les plus élégantes, les plus transparentes », jusqu'aux plus embarrassées, choquerait suffisamment le sens commun pour nécessiter une explication. De toute façon, l'analyse qui fait de tout raisonnement une synthèse pouvant se décomposer en une série de substitutions de jugements les uns aux autres, laisse entière la question de la nature de la simplicité.

Où chercher les éléments qui nous permettraient de répondre convenablement à cette question ? Où chercher, ce qui,

(14) **L. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement », p. 22.

en ce qui concerne un raisonnement mathématique, distingue le « plus simple » du « moins simple » ?

Il est certain que, chez M. Brunschvicg, simplicité est liée à « unité ». Mais tous les raisonnements, y compris ceux qui ne sont pas mathématiques, participent d'une certaine unité. Tous les jugements admettent cette notion pour principe de leur existence, et cependant, les jugements mathématiques ont une place à part. Il en est de même des raisonnements. Cette place leur est due à cause de leur rigueur. Au point de vue logique, écrit l'auteur, le jugement mathématique ne diffère pas du jugement « complexe » seulement, la substitution entre les termes est, dans les sciences mathématiques, à la fois rationnelle et intégrale, ce qui donne une tout autre portée à la conclusion » (15). Et il semble que, dans ce privilège du rationnel, la simplicité, dont nous cherchons à déterminer la nature, ne soit pas étrangère. En effet, l'auteur n'ajoute-t-il pas immédiatement : « Et de même pour l'induction scientifique ; la valeur s'en mesure à la simplicité de la liaison observée » (16). L'induction vulgaire, elle, considère « le groupement accidentel des qualités qui forment les individus comme des réalités permanentes » (17).

Si on en juge d'après cela, il entre dans la simplicité mathématique quelque chose de l'essence du rationnel : une liaison nécessaire et permanente entre qualités, est « plus simple » qu'une liaison accidentelle, par suite non permanente ; une liaison qui s'explique de par la nature même de l'esprit, est « plus simple », qu'une autre dont l'existence, étrangère pour ainsi dire à l'esprit, demeure pour lui un fait inintelligible. Ce qui conférerait aux jugements mathématiques une simplicité que les autres n'ont pas, ce serait, non que leurs termes se substituent, mais qu'ils se substituent en raison d'une identité permanente et parfaite qui ne peut exister entre les termes des autres jugements, à moins que ce soit dans cette identité qu'il faille aller chercher le pourquoi de la « liaison simple » de ces termes. Et ceci paraît plus probable, puisque, selon M. Brunschvicg, le jugement, quel qu'il soit n'est autre chose que la liaison, le rapport, posé avant même ses termes (18).

(15) L. Brunschvicg. « La Modalité du Jugement », p. 23.
(16) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 23.
(17) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 23.
(18) L. Brunschvicg. Idem, p. 80.

Quoique l'acte que lie une conclusion à des prémisses soit, en tant qu'acte de synthèse, très différent de l'opération propre du jugement (19), il n'y a pas de raison pour que ce privilège de l'identité qui permet la substitution « intégrale » des termes des jugements les uns aux autres, ne se maintienne pas alors qu'il s'agit du raisonnement. Bien au contraire, la substitution constituant « le fondement du raisonnement » (20), il y a tout lieu de croire qu'à, tout ce qui facilite celle-ci, ou mieux encore, la justifie plus pleinement d'un point de vue logique, doit, en effet, être attribuée une valeur spéciale. « Ce que je pense, dit M. Brunschvicg, en pensant que Socrate est juste, c'est tout simplement que le philosophe est philosophe » (21), et, de même, pour lui, ce que l'on pense en pensant que $4 + 3 = 5 + 2$, c'est tout simplement que $7 = 7$, ou, comme il écrit que «7 est 7 » (22). Mais, la différence essentielle, qui fait que le raisonnement qui mène à la seconde affirmation est « mathématique », alors que celui qui mène à la première ne l'est pas — tout en étant, logiquement, irréprochable, — c'est que les termes $(4 + 3)$ et $(5 + 2)$ s'identifient totalement, et rationnellement au terme 7, d'après les lois de la formation des nombres, qui sont des lois permanentes, liées à la nature de l'esprit, des lois génératrices de liaisons nécessaires — de liaisons « simples » d'après ce qui a été dit plus haut, — alors qu'il n'en saurait être de même de l'identité des termes Socrate et philosophe, juste et philosophe, laquelle est le principe du raisonnement élémentaire :

Le philosophe est juste
Or Socrate est philosophe
Donc Socrate est juste.

Cette « identité » là, n'en est, en somme, pas une. C'est un lien de fait entre des termes suffisamment étroit pour permettre leur substitution raisonnable. La substitution ayant lieu, le passage des jugements prémisses au jugement conclusion est rationnel, le raisonnement est inattaquable en tant que raisonnement. Remarquons pourtant, qu'il le serait encore si la substitution n'avait aucun fondement dans les

(19) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 16 (Déjà cité).
(20) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 149. (Déjà cité.)
(21) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 19.
(22) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 23.

faits ni ailleurs, si les termes étaient tels qu'elle soit arbitraire jusqu'à être absurde. Ce qui est affirmé ici, c'est, avant tout, le lien qui unit, comme dit l'auteur, les deux traductions différentes dont est susceptible un seul et même jugement ; c'est que ces deux traductions explicitent en effet toutes deux le même acte « simple » de l'esprit — la même affirmation que A est A. Mais il n'est pas affirmé que ces deux traductions soient, elles, identiques l'une à l'autre, comme A l'est à A. Pour qu'elles le fussent, il faudrait, justement, que les termes de chacune puissent se substituer intégralement aux termes de l'autre, ce qui ne peut arriver que si ces termes sont eux-mêmes des êtres de raison, aux lois de formation rigoureuses, aux définitions précises, conditions qui, seulement en mathématiques, se trouvent remplies d'une façon parfaite. Autrement dit, le lien entre les prémisses et la conclusion d'un raisonnement est toujours rationnel, pourvu que le raisonnement soit rigoureux. Mais, la liaison entre les termes rapprochés dans chacun des jugements auxiliaires qui servent à expliciter la possibilité de traduire de deux façons différentes un même jugement d'identité (23), est, elle, plus ou moins rationnelle. Elle atteint son maximum de rationalité quand elle atteint son maximum de simplicité, et cela quand elle se réduit, à son tour, à une identité rigoureuse.

Or, quand est-ce que deux termes sont absolument identiques ? Cela se dit, semble-t-il, quand ils sont absolument interchangeables, quand leur « expression » différente, ou quelque signe propre à chacun, mais extérieur, étranger à son intime nature, permet seul de les distinguer — c'est-à-dire, quand, de par leur nature, ils sont « un ». Si donc l'identité absolue n'est qu'un idéal, on peut, d'après ce qui précède, dire que, plus la liaison entre deux termes est logiquement étroite, et permanente, — plus elle est simple (24), — et plus cet idéal est, tout de même, près d'être atteint. Certes, à y regarder attentivement, l'acte de l'esprit qui pose le nombre 7 diffère de celui qui pose la somme (4 + 3), ou la somme (5 + 2) ; mais, ces actes étant liés par des rapports absolument stables, par des rapports internes tenant aux lois même de la pensée constructive, l'identification de ces termes

(23) **L. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement », p. 19.
(24) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 23.

est d'une légitimité telle qu'il ne peut en exister de plus complète. C'est en raison de cela, justement que la liaison entre ces termes est dite plus simple que celle qui existe par exemple, entre « philosophe » et « juste » — pour cela que la synthèse de jugements qui, au fond, ne fait qu'expliciter que 7 est 7, est, elle aussi, plus simple, que celle qui explicite que le philosophe est philosophe.

Nous voici donc, pour avoir voulu examiner mieux la raison de la possibilité des substitutions parfaites de termes, pleine et entière seulement dans les raisonnements mathématiques, ramenés à la notion d'unité. Cette unité profonde des termes qui, par l'intégralité de leur substitution, crée l'unité de la synthèse de ces « jugements auxiliaires » (25), qui, dans un raisonnement, servent à traduire un seul et même jugement fondamental, c'est la simplicité de leur liaison. C'est elle le principe de la simplicité du raisonnement, et cette simplicité — tout comme celle de la liaison de deux termes identiques, — tout comme celle de toute liaison nécessaire, rigoureuse, — c'est toujours à l'unité qu'elle se ramène.

Tout raisonnement correcte comporte, avons-nous vu, un minimum d'unité, fut-ce une unité factice, arbitraire ; mais il ne s'ensuit pas que tout raisonnement soit simple, car il y a des raisonnements plus ou moins « uns », résultant d'une synthèse plus ou moins parfaite de ces « jugements auxiliaires » dont parle M. Brunschvicg dans son analyse du raisonnement élémentaire, due à une substitution plus ou moins complète et plus ou moins rationnelle, des termes de ces jugements. Les raisonnements sont « simples » dans la mesure où ils sont « uns ». Et le raisonnement mathémathique, à cause de la nature même des termes qui entrent dans les jugements dont il constitue une synthèse, est celui qui, en soi, comporte le maximum de simplicité, c'est-à-dire d'unité réalisée du dedans. Du moins c'est ce qui, jusqu'à maintenant, semble ressortir de l'examen des textes, que nous avons essayé d'interpréter dans l'esprit de la philosophie de M. Brunschvicg, autant que faire se peut.

Il reste, cependant, dans cette manière de voir les choses, des obscurités. La simplicité du raisonnement se ramenant à son unité intérieure, nous venons de voir que le raisonne-

(25) **L. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement », p. 19.

ment mathématique est le plus simple, en somme, des raisonnements, non qu'il revête une forme différente de la leur, mais en raison du caractère des substitutions qui sont le ressort de son développement. Mais on est, semble-t-il, en droit de se demander si, tandis que la confusion de la simplicité avec le minimum d'unité nécessaire à la validité de n'importe quel raisonnement, risquait de nous faire dire que tout raisonnement était simple, l'assimilation de la simplicité avec cette unité plus intime que seule la structure des termes mathématiques peut communiquer à un raisonnement, ne risque pas, elle, de nous amener à affirmer que tout raisonnement mathématique est également simple. En effet, sans cette unité plus intérieure et plus subtile dont nous avons abordé la notion à ce second stade de notre analyse, il ne saurait être mathématique.

Pourtant une telle affirmation ne laisse pas de nous choquer, sinon autant que la première, du moins suffisamment pour que nous hésitions à pousser notre esprit au devant d'elle, sans un examen plus sérieux. Outre cela, elle ne paraît pas plus que la première exprimer l'esprit de la philosophie mathématique de M. Brunschvicg. Car, en somme, d'après tout ce qui précède, cette « tendance à l'unité » dont l'idée revient si souvent chez lui, est une tendance à la réalisation du maximum de simplicité de ce vaste « enchaînement » que constitue l'ensemble du corps des mathématiques. Or, parallèlement aux remarques déjà faites lors de la critique de la première approximation que nous ayons atteinte de la notion de simplicité mathématique chez M. Brunschvicg, en ce qui regarde les enchaînements (26), si tout raisonnement mathématique était aussi simple qu'un autre et aussi simple qu'il peut l'être, du seul fait qu'il est, logiquement, irréprochable, et que les liaisons entre les termes des jugements qui s'y succèdent sont toutes « simples », au sens que nous avons vu ; et si tout enchaînement mathématique plus vaste l'était aussi, pour des raisons analogues de perfection logique, il ne saurait être question de « tendance » à l'unité, c'est-à-dire à la simplicité. Ceci nous incite à chercher la nature de la simplicité mathématique des raisonnements au-delà de l'unité que ceux-ci doivent à l'interchangeabilité des termes des ju-

(26) Voir plus haut, p. 377 et suivantes.

gements qui les composent, comme au delà de l'unité qu'ils tirent de la seule correction de leur forme.

Voyons s'il n'y a rien à tirer de ce que dit M. Brunschvicg au sujet de cette méthode unique et universelle de pensée qu'est la méthode d'analyse et de synthèse (27). Peu importe si, dans ce qu'il en dit, l'auteur ne vise pas spécialement les mathématiques. Les mathématiques, en fait, sont toujours visées, en tant qu'elles constituent, pour M. Brunschvicg, comme nous l'avons dit, l'instrument de la science universelle (28), la seule expression pure de ce double processus d'analyse et de synthèse qu'est le mécanisme propre de l'esprit, constructeur de vérité (29). Ce qui est vrai de l'analyse et de la synthèse en général, doit, apparemment, être vrai à plus forte raison de l'analyse idéale du mathématicien et de cette synthèse de jugements parfaitement intelligibles qu'est le raisonnement mathématique. Or que dit l'auteur ? « L'esprit n'a devant lui que les données sensibles ; mais par une analyse plus minutieuse et plus subtile, il lui appartient d'y pratiquer de nouvelles distinctions, d'apercevoir ce qui se dérobait à la vue spontanée ; par une synthèse plus complète et plus haute, il lui appartient de ramener ces données à l'unité, d'une manière plus simple, plus directement intelligible » (30). Il semble bien que cette synthèse que constitue le raisonnement mathématique (comme tout raisonnement, et encore mieux qu'un autre raisonnement), synthèse destinée à « ramener à l'unité » une certaine diversité, — en l'espèce, une diversité de jugements dont les termes sont susceptibles de substituer rigoureusement les uns aux autres, — soit, elle aussi, d'autant plus simple que cette unité idéale est atteinte de la manière la plus directe.

Ce n'est pas la première fois que, du moins en ce qui concerne les mathématiques, les adjectifs « direct » et « simple » nous ont parus être synonymes. Nous les avons trouvés tels chez les Logisticiens, aussi bien que chez ceux que H. Poincaré appelle les « pragmatistes ». Seulement, chez les uns et chez les autres, l'enchaînement mathématique n'avait menaient —, non plus ; par suite, le chemin le plus direct 3ème ligne de la p 3

(27) **L. Brunschvicg.** « Introduction à la Vie de l'Esprit », p. 83.
(28) **L. Brunschvicg.** « La Modalité du Jugement », p. 153.
(29) **L. Brunschvicg.** « Introduction à la Vie de l'Esprit », p. 86.
(30) **L. Brunschvicg.** Même ouvrage, p. 90.

pas la même signification ; le but à atteindre n'était pas le même ; les moyens qui y tendaient, — les « étapes » qui y pourrait ne pas être, pour les uns et pour les autres, le même chemin, mais il était toujours le plus simple parce que le plus direct, et le plus direct pour la même raison ; et, cette raison, c'était, on s'en souvient, le petit nombre d'étapes à franchir pour arriver au bout d'un enchaînement de vérités, que l'on peut qualifier de « linéaire », le petit nombre d'articulations à envisager dans un enchaînement comparable à un réseau d'éléments liés les uns aux autres par plusieurs points à la fois ; enfin, en un mot, le petit nombre de ce qui peut être appelé les « éléments » de l'enchaînement en tant qu'enchaînement, suivant la conception que chaque école se fait de la pensée mathématique en son essence ; — nous ne disons pas ; « le petit nombre d'éléments enchaînés », car cela n'aurait plus du tout le même sens.

Si, pour M. Brunschvicg, c'est dans le raisonnement mathématique, synthèse de jugements aux termes précis, que la réduction à l'unité d'une pluralité de « données » — qui, ici, sont les jugements eux-mêmes, — est la plus complète, et si cette réduction est d'autant plus simple qu'elle est plus « directement intelligible », la simplicité mathématique d'un raisonnement résiderait-elle, pour lui aussi, dans le fait du « petit nombre » d'éléments de celui-ci, et qu'est-ce qu'il faudrait alors, ici, entendre, par « éléments » ? Telle est la question que, tout naturellement, l'esprit est porté à se poser.

D'abord, semble-t-il, il faut nous pénétrer de ce qu'a de relatif cette notion de raisonnement plus ou moins direct. M. Brunschvicg spécifie « directement intelligible » ; et il a raison. Du point de vue, très particulier, relevant à la fois de la logique et de l'intuition, auquel l'auteur se place pour dire que c'est l'unité interne des idées qui constitue l'unité véritable, profonde, indispensable de la synthèse qu'est un raisonnement mathématique, il ne saurait certainement, en soi, être question de se préoccuper si l'esprit « prend directement conscience de cette synthèse », ou s'il a « recours à des intermédiaires » (31). Pour un esprit infiniment pénétrant, en même temps qu'infiniment vaste, qui saisirait, d'un seul coup, et le jugement unique que le raisonnement le plus

(31) **L. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement », p. 85.

embarrassé ne fait, au fond, qu'expliciter, et les « jugements intermédiaires » qui servent à cette explicitation, avec les liaisons exprimées ou inexprimées qui peuvent exister entre leurs termes et l'équivalence parfaite de l'ensemble précis de ces jugements avec le premier ; pour une intelligence divine, pour laquelle toutes ces choses seraient d'une transparence telle que cette dite équivalence serait en tout semblable à celle des termes d'une vaine tantologie, c'est-à-dire, pour laquelle l'acte logique et intuitif unique, principe de l'unité essentielle du raisonnement, compterait seul, il ne saurait être question de raisonnements plus ou moins « simples », plus ou moins directs, pas plus que de raisonnements (mathématiques, s'entend-il toujours) plus ou moins « uns ». Pour une telle intelligence il ne saurait y avoir de « degrés » dans l'intelligibilité, ni de route qui y conduise plus ou moins bien ou plus ou moins vite. Le raisonnement, quel qu'il soit, pourvu que la totale intériorité des idées y soit un fait, serait toujours « direct », puisque le passage par les « jugements auxiliaires » que nous sommes, nous, obligés de formuler avant de prendre conscience de son unité, est illusoire, en soi.

La notion de simplicité mathématique, en ce qui concerne les raisonnements, est donc suspendue à la nature discursive se notre esprit, — comme l'est, d'ailleurs, la notion de raisonnement elle-même. Est-ce à dire qu'il faille pousser encore son caractère relatif, au point de la considérer comme assimilable à la facilité avec laquelle un raisonnement est compris, voir même à la facilité avec laquelle, en fait, on prend conscience de son unité profonde ? Certes, non. Nous avons, déjà au début de cette étude, eu l'occasion de distinguer très nettement « simplicité » de « facilité », notions auxquelles il arrive souvent d'aller de pair, mais qui, plus d'une fois, se séparent, qui même, peuvent s'opposer. La facilité est relative à chaque esprit individuel. Elle ne dépend pas seulement de la nature du raisonnement qu'il s'agit de comprendre, mais aussi du degré d'intelligence de chacun ; et on ne saurait disserter sur elle en se plaçant à un point de vue général. Ce qui fait, au contraire, que nous croyons pouvoir parler de la simplicité d'un raisonnement mathématique « en général », c'est que, toute relative que cette notion puisse être, elle est relative à l'esprit — c'est-à-dire aux lois qui régissent toutes les intelligences, — et non à tel ou tel esprit. Un raisonne-

ment ardu, demandant, pour être suivi, une grande culture mathématique peut-être « simple » en tant que raisonnement, si la manière dont il devient intelligible à tous ceux qui sont capables de le suivre avec le sentiment net de son évidence, est « directe ». Par contre, un raisonnement que tout le monde comprendra aisément avec un peu d'attention, peut être très compliqué, si, logiquement, on n'arrive à saisir l'unité profonde qui en fait un raisonnement valable que par quantité de détours. Et cela, exactement de même qu'une route droite reste une route droite quels que soient les difficultés ou les dangers qu'elle réserve à ceux qui la parcourent, alors qu'une voie tortueuse qui mène tantôt à droite et tantôt à gauche, obligeant parfois, même, le voyageur à revenir sur ses pas, reste une voie tortueuse quelle qu'en soit la facilité — le voyageur, dût-il, en raison de cette facilité, arriver au même but, ou à un but encore plus éloigné, plus vite que par la première. Le «simple» et le «compliqué», sont qualités propres à l'enchaînement mathématique en tant que tel, comme le « droit » et le « tortueux », sont qualités de la route. Ce sont, semble-t-il, des qualités qui émanent de son intime nature logique. Son caractère d'être « plus ou moins directement intelligible », plus ou moins « rationnel », tient, apparemment à des facteurs, intrinsèques au raisonnement ; facteurs, certes, pas étrangers à l'esprit puisque le raisonnement est une fonction de l'esprit, mais indépendants sans doute de l'habileté de l'esprit à exercer sa fonction.

La question qui se pose est celle-ci : quels sont ces facteurs ? Et, étant donné tout ce que nous avons vu dans les chapitres précédents concernant la nature de la simplicité mathématique selon d'autres que M. Brunschvicg, nous sommes disposés à répondre en disant que, très probablement, il s'agit avant tout du nombre des « éléments » du raisonnement. Mais il nous faut nous demander si cette notion d'« éléments » du raisonnement correspond vraiement à quelque chose chez M. Brunschvicg. Ce n'est que dans l'affirmative, que nous pourrons faire un pas de plus, et voir si, oui ou non, la simplicité mathématique du raisonnement tient, pour lui également, au petit nombre d'« éléments » de ce dernier.

Le raisonnement mathématique « avance », avons-nous vu, par une suite de transformations entre jugements dont les termes se substituent les uns aux autres, indéfiniment, — d'autant mieux que, de par leur nature, ces termes sont sus-

ceptibles d'équivalences parfaites. Chaque transformation s'exprime, dans le langage, par un syllogisme. Un jugement d'identité inexprimé, acte de la même nature que celui « par lequel, à l'intérieur même du concept, l'attribut est rapporté au sujet » (32), est le principe dans lequel réside la validité de chaque syllogisme. Passer d'un syllogisme à l'autre, par l'intermédiaire d'une nouvelle vérité énoncée, c'est, à chaque fois, faire appel à un nouvel acte d'unification de termes au nom d'un nouveau jugement d'identité, de la forme : 7 est 7. Un jugement isolé ne fait en rien « avancer » un raisonnement. C'est le chaînon qui rattache, du dedans, ce jugement aux précédents, qui constitue un progrès. Or, ce chaînon n'existe que comme expression d'un jugement d'identité qui, lui, ne s'énonce pas, mais qui est l'acte véritable de la pensée, l'acte par lequel sa fonction de synthèse (et d'analyse, par suite), s'affirme, et qui sous-tend et justifie chacun de ses progrès. On ne saurait donc, apparemment, au delà d'un tel jugement, chercher » l'élément » du raisonnement, si l'on admet que, pour être plus ou moins « direct », il faut que le raisonnement ait des « éléments » ; et l'on dira, tout raisonnement mathématique pouvant être énoncé sous la forme d'un enchaînement de syllogismes, — ce qui ne veut pas dire qu'il se « réduise », logiquement, à cela, — que le raisonnement est d'autant plus simple (d'autant plus « direct ») qu'un plus petit nombre de syllogismes est nécessaire pour le traduire dans toute sa richesse. C'est là ce que semble penser M. Lemoine. Il écrit que « la simplicité d'une démonstration résulte du nombre fini et déterminé de syllogismes qui ont servi à l'établir » (33).

Remarquons encore une fois, car cela paraît utile, qu'une telle conception n'engagerait à rien, en ce qui concerne la théorie du raisonnement. L'activité constructive de la pensée qui choisit les jugements d'identité donc chaque syllogisme est, au fond, pour M. Brunschvicg, une « explication » ; qui, donc, « dirige » les syllogismes ; qui trace la voie qui la conduira à l'unité finale de la synthèse que le raisonnement mathématique, comme tout raisonnement et mieux que lui, constitue ; cette activité, disons-nous, peut bien se distinguer des

(32) **L. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement », p. 19.

(33) **Lemoine**. « La mesure de la simplicité dans les sciences mathématiques. »

syllogismes enchaînés dont elle se sert, de la voie qu'elle trace, sans que, pour cela, la rectitude de la voie cesse de se confondre avec la simplicité du raisonnement et qu'elle cesse de dépendre du petit nombre de syllogismes qui expriment celui-ci, qui extériorisent en différents actes, l'unité véritable qui donne à cette activité le principe de son élan. Le raisonnement peut très bien, en tant que raisonnement, tirer sa valeur d'autre chose que de la rigueur que comporte chacun des syllogismes, mais être, quand même, simple ou complexe, suivant que ceux-ci sont en grand ou en petit nombre.

Mais, de tout ce que nous avons vu jusqu'à présent, pouvons-nous tirer cette conclusion, sans plus de commentaires ? Les remarques que nous venons de faire sont-elles suffisantes pour que nous admettions que, pour M. Brunschvicg, il en est comme nous l'avons supposé ? — c'est-à-dire que la simplicité des raisonnements mathématiques tient, pour lui, uniquement au petit nombre de syllogismes dont ils se composent ; que, en d'autres termes, les différentes données dont dispose la pensée qui construit ces raisonnements, sont ramenées à l'unité « de la manière la plus directement intelligible » quand le nombre des syllogismes qu'elle enchaîne à cette fin, est le plus petit possible ?

Cela reviendrait à ne tenir aucun compte, ni de l'individualité des différents syllogismes, ni de la manière dont ils s'enchaînent, dans l'appréciation de la rectitude de leur enchaînement. Or, semble-t-il, il n'y a pas de doute que, plus les jugements qui composent les syllogismes successifs sont étroitement, intérieurement unis, les uns aux autres, et plus, aussi, leur lien est mis immédiatement en évidence par le choix heureux de ces syllogismes, et plus l'unité de l'ensemble éclate, sans que l'esprit ait à faire de détours pour la concevoir clairement ; plus, en quelque sorte, elle devient « évidente », et plus le raisonnement donne l'impression d'être ce qu'il doit, en effet, être, pour M. Brunschvicg : l'explicitation au moyen de plusieurs actes successifs de l'esprit, au fond, d'un seul et même acte : plus il est « directement » un.

Et ceci arrive, apparemment de préférence quand un raisonnement se réduit, quand à son expression, à ce que H. Poincaré appelait « une cascade de syllogismes » et à une seule : quand, c'est-à-dire, la conclusion de chaque syllogisme, sert de majeure au syllogisme suivant. En effet, les deux

premiers jugements, — les prémisses, — d'un syllogisme, sont en réalité, pour M. Brunschvicg, avons-nous vu, deux traductions différentes d'un seul et même jugement de la forme A est A. « Mais la conclusion n'est pas un jugement nouveau » (34). Dire, par exemple, que 4 + 3 est égale à 5 + 2, ce n'est pas dire « autre chose » que : 7 est 7. Or, si, partant de la conclusion que 4 + 3 est égal à 5 + 2 (ou de tout autre vérité mathématique déduite, de la même manière, de vérités déjà connues, au nom d'un jugement d'identité inexprimé), nous construisons un nouveau syllogisme, puis un autre, sur la base de la conclusion de ce dernier prise comme majeure, puis un quatrième, dans les mêmes conditions, — jusqu'à ce que nous aboutissions à conclure une certaine vérité à démontrer, que faisons-nous, sinon ramener de proche en proche la conclusion de notre démonstration, au jugement initial d'identité dont les prémisses du premier syllogisme énoncé servent à montrer déjà la multiple possibilité d'explicitation ? Que faisons-nous, sinon mettre en évidence et l'unité de notre raisonnement, et le caractère « interne » de cette unité, due à de successives substitutions intégrales de termes ?

Au premier abord, il semble qu'un raisonnement ne saurait, selon la conception de M. Brunschvicg, être plus directement intelligible que celui dont chaque articulation, dont chaque acte explicite d'unification, est la répétition uniforme du précédent (comme un chaînon l'est du chaînon qui vient avant lui dans une chaîne régulière), et rejoint, par là, sans interruption, la pensée unificatrice qui sous-tend le raisonnement dans son entier ; et l'on est tenté de dire qu'un tel raisonnement, comporterait-il un peu plus de syllogismes, est toujours plus simple qu'un autre dans lequel les syllogismes ne partent pas tous d'un même point de départ ; dans lequel, la conclusion finale, au lieu de découler de proche en proche, « linéairement » pour ainsi dire, d'un certain jugement d'identité inexprimé, principe d'unité et de validité du premier syllogisme, serait comme le résultat de la confrontation de deux ou plusieurs conclusions de raisonnements partiels, affectant, chacun pour son compte, la forme précédente, à partir de points de départ différents. Il semble que, quelle que

(34) **L. Brunschvicg.** « La Modalité du Jugement », p. 19.

soit la clarté d'un raisonnement de la seconde sorte — et, sans doute, elle peut-être grande, plus grande même que celle qu'atteint celui de la première, surtout si le raisonnement est court et si le lien entre ses parties est très évident — que celui-ci soit, en soi, « moins direct » qu'un raisonnement du type que nous venons de rappeler. Car le fait, seul, de faire appel à « différentes » vérités connues, pour déduire, de chacune séparément, des conclusions et confronter celles-ci, constitue déjà, en soi, un « détour » de pensée, apparemment absent dans la pure et simple « cascade de syllogismes », où l'unité foncière du premier syllogisme se transmet insensiblement, et, pour ainsi dire, automatiquement, à toute la chaîne, sans que l'esprit ait recours à aucune subtilité.

Et cependant, si on y regarde de plus près, on ne peut s'empêcher de constater que la pensée peut faire, et fait en effet des « détours » — quelquefois de grands « détours », — dans un raisonnement dont la forme se réduit à une « cascade de syllogismes ».

Le premier syllogisme d'un tel raisonnement, est l'expression de la possibilité, pour un certain jugement de la forme : 7 est 7, ou, plus généralement : A est A, de recevoir deux traductions. C'est le plus simple des raisonnements, puisque c'est par lui que l'unité de synthèse des jugements « auxiliaires » qui y entrent, — unité qui n'est autre que celle de l'acte qui joint, à l'intérieur même d'un concept l'attribut et le sujet, selon la théorie de M. Brunschvicg — est le plus immédiatement intelligible, grâce au plus petit nombre possible d'intermédiaires ; et la conclusion de ce raisonnement n'est pas, pour l'auteur, un jugement nouveau. C'est là un point acquis. Mais cela ne suffit pas, si on y réfléchit, pour que toute la chaîne des syllogismes successifs, dont la majeure de chacun, en tant que conclusion du précédent, ne constitue pas un « jugement nouveau » par rapport au jugement inexprimé au nom duquel ce syllogisme précédent est « un » et valide, se réduise, elle aussi, à n'être qu'une expression plus explicite, plus détaillée, de l'acte un et foncier auquel se ramène ce syllogisme-là.

Pour nous en persuader, voyons ce qui se passe dans une « chaîne » de syllogismes » comme celles dont il s'agit. Les termes des « jugements auxiliaires », étant, par hypothèse des notions mathématiques parfaitement déterminées, nous supposons leur substitution les uns aux autres intégrale, ce qui

ne constitue pas peu à resserer, du dedans, le lien qui unit un syllogisme au précédent et au suivant, et, par suite, à faire de leur ensemble un tout caractérisé, semble-t-il, par un maximum d'unité. Notre raisonnement prendra la forme suivante :

1° A est B — C est A — donc C est B.
2° (par exemple) C est B — Cest D — donc B est D
3° (par exemple) B est D — E est B — donc E est D.
etc...

Peu importe, semble-t-il, que les syllogismes successifs soient ou non de la même figure, puisque, quelle que soit la figure envisagée, c'est toujours au nom d'un jugement d'intériorité d'un terme à l'autre — de la même forme : A est A — que le syllogisme s'énonce, et puisque nous avons supposé, un moment, au raisonnement dans son ensemble, le caractère de « simplicité » — c'est-à-dire, suivant M. Brunschvicg, de raisonnement « direct » — à cause, justement, de sa possibilité d'être, au fond, réduit, à un tel jugement, et, en l'espèce, au jugement dans lequel le premier syllogisme de la suite, puise sa valeur de raisonnement, c'est-à-dire de « synthèse ».

Or, à l'examen de cette suite de syllogismes, il faut remarquer que, le fait, pour chacun d'eux, d'avoir pour majeure un jugement qui, par rapport au jugement unique qu'explicite le syllogisme précédent, n'est pas un jugement nouveau, ne lui empêche pas, lui, d'expliciter un acte unique de l'esprit, — un jugement — autre que celui grâce auquel ce syllogisme précédent est valable. En effet, dire que C est B, de ce que A est B et que C est A, ce n'est pas, selon M. Brunschvicg, dire autre chose que A est A (35). Comme nous l'avons répété, selon lui, le jugement C est B n'ajoute rien à celui-là. Mais, quand nous prenons ce jugement comme majeure dans un second syllogisme, et que nous disons, par exemple :

C est B, or C est D, donc D est B

(ce que nous sommes en droit de dire dans le cas où, entre C et B, il y a parfaite égalité, identité interne comme il peut en exister entre deux « objets » mathématiques, et ou,

(35) **L. Brunschvicg.** « La Modalité du Jugement », p. 19 et suivantes.

cette même égalité existe aussi entre C et D), alors, nous n'affirmons plus du tout la conclusion en vertu du fait que A est A, mais en vertu de ce que C est C. Et il faut bien reconnaître que, si nous n'avons affirmé que : C est B, que parce que nous avions, au fond, dans la pensée, que : A est A, nous n'affirmons pas que : C est C pour la même raison, mais d'une manière tout à fait indépendante. Même s'il n'était nullement question de A, cela n'infirmerait en rien le rapport « à l'intérieur même du concept » C (36), de l'attribut au sujet, que nous ne pouvons exprimer qu'en disant : C est C. Et, redisons-le, le second syllogisme de la chaîne, est l'explication de ce jugement-là. Le lien qui existe entre les deux syllogismes n'est pas dû à une identité entre les jugements profonds grâce auxquels on a le droit d'énoncer respectivement l'un et l'autre. Ces jugements sont indépndants. Ce lien est dû uniquement, semble-t-il, au fait de la substitution à certains termes de ces « jugements auxiliaires » par lesquels il est montré, dans le premier syllogisme « qu'un même acte de l'esprit est susceptible de deux traductions » (37), d'autres termes, propres, eux aux « jugements auxiliaires » du second. Selon la figure des syllogismes les termes ainsi substitués ne remplissent pas la même fonction ; le lien cependant qui les lie, et grâce auquel on dit que, d'un syllogisme à l'autre, le raisonnement a « avancé » est à chercher dans l'interchangeabilité, partielle ou totale, de ces termes.

Ici, la conclusion du second syllogisme, dit, en même temps que le jugement d'identité : C est C, qui permet de la déduire des prémisses, l'intégrité de la substitution de D à C. Or si D et C sont interchangeables, on aurait pu mettre D à la place de C, déjà dans l'énoncé de la conclusion du premier syllogisme — à condition d'avoir dans l'esprit le jugement : C est C, sans lequel, dans le second, la conclusion : D est B, ne peut se faire jour. C'est cela qui fait qu'on peut dire, dans un certain sens, que le second syllogisme « découle » du premier. Mais il n'en « découle » pas à la manière, dont, dans le premier ou dans le second syllogisme, ou dans tout autre qu'on peut construire, la conclusion « découle » des prémisses ; c'est-à-dire qu'il n'est pas.

(36) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 19.
(37) L. Brunschvicg. Idem, p. 19.

avec le premier, l'expression d'un acte « unique » de l'esprit. Il s'en déduit, grâce à une substitution de termes, au nom et en vertu d'un second acte, indépendant du premier, et que la substitution de termes en question donne simplement à l'esprit l'occasion d'extérioriser.

Et ce qui vient d'être dit du premier et du second syllogisme d'une chaîne peut être répété du second et du troisième, du troisième et du quatrième, et ainsi de suite jusqu'à épuisement de la chaîne. En d'autres termes, chacun de tous ces syllogismes correspond à un acte unique de l'esprit, — à un jugement de même nature, selon M. Brunschvicg, que celui qui constitue, au fond, le concept — indépendant aussi bien de ceux dont l'expression précède la sienne que de ceux dont l'expression la suit. Le seul lien effectif entre eux tient à la substitution que l'on fait entre les termes des jugements auxiliaires qui servent, dans les syllogismes successifs, à extérioriser l'unité interne fondamentale de chacun. L'unité de l'ensemble, sa valeur logique en tant que raisonnement, tient à la rigueur de toutes les substitutions ainsi effectuées.

Et ceci nous ramène à la question de laquelle nous étions partis ; à la question qui nous a amenés, on s'en souvient, à examiner plus en détail, autant que possible dans l'esprit de M. Brunschvicg, la structure d'une chaîne de syllogismes. Une telle chaîne est-elle, en tant qu'enchaînement mathématique, plus « directe », donc plus « simple », qu'un raisonnement qui affecterait une autre allure, moins continue ? qu'un « enchaînement » déductif de vérités dans lequel, l'esprit, après avoir établi, régulièrement, à partir d'un certain point de départ, une certaine vérité (qui n'est pas la conclusion de la démonstration), « sauterait » brusquement à un autre point de départ, sans lien au premier abord évident avec le premier, puis, après en avoir déduit ce qu'il entend en déduire, à un autre, puis à un autre, etc..., et enfin, après s'être servi de chacun comme base d'une déduction nouvelle, tirerait, de la confrontation des résultats de toutes ces déductions partielles, la conclusion du raisonnement dans son ensemble ? Est-elle plus simple, et cela à cause de ce que, la vérité de la conclusion de chaque syllogisme dépendant, si le raisonnement est correct, de la vérité de la conclusion du syllogisme précédent, on est tenté de la ramener tout entière, à n'être qu'une plus ou moins longue explicitation de l'acte

unique de juger, sous-entendu dans le premier de ses syllogismes ?

Nous sommes, semble-t-il, à présent, plus aptes à répondre à cette question, et la réponse — ou le pressent — sera la négative.

En effet, on ne saurait, nous nous en rendons compte, confondre l'unité de tout une suite de syllogismes enchaînés par leurs majeures et leurs conclusions, avec celle que donne au premier de ces syllogismes le jugement inexprimé d'identité qu'il ne fait qu'expliciter, selon la théorie de l'auteur. Cela est facile à comprendre, si l'on se rappelle que le jugement d'identité que l'on retrouve au fond de chaque syllogisme est indépendant de celui qu'exprime, et le syllogisme précédent, et le syllogisme suivant ; si l'on se représente que l'on passe d'un syllogisme à l'autre en vertu d'une substitution de termes que, seul, rend fructueuse, un nouveau jugement d'identité, inexprimé, ainsi que nous avons essayé de le mettre en lumière. Dans ces conditions, l'unité du raisonnement en tant que tel, qui lui vient de la substitution des dits termes, et qui est d'autant plus parfaite que ces termes sont plus intégralement interchangeables, ne saurait varier, quelque soit le nombre des substitutions, et, par suite, quel que soit le nombre des syllogismes de la chaîne. La neuvième substitution rejoint, de proche en proche, la première, et on pourrait y arriver tout de suite, à condition de sous-entendre toutes les autres, c'est-à-dire, de tenir compte du courant unique de pensée qui les suscite, et qui anime tout le raisonnement, sans prendre en considération les actes successifs par lesquels il se manifeste. Or ce sont justement ces actes, indépendants, en soi, les uns des autres, quoique, dans chaque raisonnement, suscités par un même élan de pensée, qui, suivant qu'ils sont en petit ou en grand nombre, font que cette unité de synthèse du raisonnement est « directement intelligible », ou l'est beaucoup moins ; ou, — conformément à l'idée que semble se faire M. Brunschvicg de la simplicité, — que le raisonnement est plus ou moins « simple ». Car il est très possible que, partis des mêmes données, on use, pour aboutir à la même conclusion, plusieurs chaînes de syllogismes ; on passera des données à la conclusion, ou prendra conscience de l'unité profonde qui les sous-tend l'une et l'autre par des chemins plus ou moins longs. Il semble évident que,

ici comme ailleurs, c'est le chemin le plus court qui est le plus direct. Et, du fait que, en raison de la manière dont les différentes « étapes » successives sur n'importe lequel de ces chemins, sont amenées à se suivre, — en raison de la manière uniforme dont les syllogismes s'accrochent les uns aux autres, — la « distance » d'une étape à la prochaine est toujours la même, il ressort que le chemin le plus court « est celui qui comporte le moins d'étapes », la chaîne de syllogismes la plus directe, la plus simple en tant que raisonnement, est, à point de départ et à conclusion identique, celle qui comporte le plus petit nombre de syllogismes.

Mais, après les éclaircissements précédents, il n'y a plus, semble-t-il, aucune raison de supposer qu'un raisonnement qui affecte la forme d'une chaîne, soit, par cela seul, plus direct et plus simple qu'un autre.

Pour mettre cela en lumière, essayons de nous demander comment il a pu un moment nous paraître qu'il en était ainsi. C'est l'apparente continuité dans l'activité de la pensée, à nous suggérée par l'uniformité du mode de liaison de chacun des syllogismes au précédent et au suivant, qui nous avait introduits en erreur, nous faisant prendre une succession d'actes indépendants pour une succession d'expressions d'un seul et même acte, nous leurrant sur la signifaction du passage d'un syllogisme à l'autre, c'est-à-dire, sur la nature de chaque « progrès » du raisonnement. Or, nous sommes revenus, pensons-nous, de cette méprise, après nous être rendu compte que l'acte de l'esprit qui constitue l'essence, pour ainsi dire, de chaque syllogisme, est un acte *nouveau*, une vraie *nouvelle étape*, un *progrès positif*, dans le raisonnement.

Dès lors, le fait que le raisonnement affecte, ou non, la forme d'une chaîne, ou, comme dirait, H. Poincaré, d'une « cascade » de syllogismes, n'a, en ce qui concerne l'intelligibilité plus ou moins directe de la pensée une qui l'anime, en ce qui concerne, en d'autres mots, sa simplicité à lui, raisonnement, qu'une importance tout à fait relative ; pratiquement, en soi, pas d'importance.

On objectera sans doute que, dans une « cascade de syllogismes », la substitution, les uns aux autres des termes des jugements, grâce à laquelle le raisonnement « avance », se fait sans interruption ; alors que, dans d'autres raisonne-

ments tels que ceux que nous avons évoqués (38), l'esprit, après avoir, par déduction, pris connaissance d'une certaine vérité, semble « sauter », comme nous disions, à une vérité tout autre, dont rien ne pouvait faire prévoir l'intervention dans le raisonnement, dont rien n'indique, apparemment, le lien avec les données, ni avec les conclusions déjà tirées ; et il continue avec son aide à construire son édifice logique comme « au petit bonheur ». Quelquefois même, la pensée est allée si loin, semble-t-il, chercher l'outil qu'elle désirait, que l'on est tout surpris, après sa réussite, de voir qu'elle ne s'était pas égarée de son but. Le raisonnement laisse une impression d'étonnement d'autant plus admiratif, que le but a été, grâce à l'artifice au premier abord inexplicable, atteint, plus rapidement, plus « directement ». Mais, de toute façon n'est-on pas obligé d'admettre que le recours à cette vérité, connue, certes, mais non rattachée au développement logique qui précède par un lien quelconque, constitue un « détour » de la pensée tel qu'une chaîne de syllogismes, n'en connaît pas, détour d'autant plus grand, que la dite vérité est, apparemment, plus étrangère, plus extérieure à celles dont ce développement comportait l'énoncé ?

Il ne semble pas. Car, à y regarder de plus près, ces « sauts » brusques de la pensée se rencontrent dans les chaînes de syllogismes tout aussi bien que dans tous les raisonnements. Quand, après avoir déduit que C est B, de ce que A est B et que C est A, nous passons, de là à la seconde conclusion, à savoir que D est B, *étant donné que* C *est* D (39), nous introduisons bien une vérité nouvelle : C est D. Que cette vérité se rapporte à C, comme l'une des précédentes, cela ne fait qu'en rendre l'introduction plus naturelle, plus facile à comprendre, plus légitime en apparence et au premier abord, pour quelqu un qui, sans avoir lui-même conçu le raisonnement, en suit le développement du dehors, en profane, pour ainsi dire ; mais cela n'en altère pas la nouveauté. Bien plus : plus cette vérité est nouvelle, et plus, le raisonnement gagne en concision et en élégance du fait de son introduction ; non pas que le pas franchi soit, en soi, plus grand ; — nous avons vu que, logiquement, les étapes

(38) Voir plus haut, p. 374 et suivantes.

(39) Dans les conditions dites plus haut, voir pp. 391 à 393. — Sinon, il faudrait dire que **quelque** D. est B.

sont équivalentes, — mais ce « pas » est accompli sur une voie plus directe, sur une voie par laquelle on arrive au but grâce à un moins grand nombre de pas.

Si l'on préfère, rationnellement — (ce mot s'opposant à « logiquement ») — il y a des étapes qui ont une valeur, bien plus grande que d'autres. Ce sont celles qui constituent vers la compréhension de l'unité profonde qui sous-tend et les données initiales et la conclusion d'un raisonnemment, un acheminement plus grand. La lourdeur et la longueur inutile de certaines chaînes de syllogismes, en mathématiques — comme de certains autres raisonnements, — semble venir justement de ce que les vérités auxquelles on a fait appel pour servir de transition entre la conclusion de chaque syllogisme et la suite, ne sont pas assez « nouvelles », pas assez étrangères en apparence aux vérités précédentes. Elles proviennent de ce que, le fait d'avoir pensé à celles-là, plutôt qu'à d'autres vérités plus fructueuses, prouve, de la part de l'esprit, une incapacité de voir, quand il le faudrait, des analogies lointaines mais profondes, de sentir « directement » l'unité latente en laquelle, en fait, se fondent des jugements mathématiques qui n'admettent, apparemment, entre eux, aucun rapport intéressant ; en un mot, une faiblesse dans l'exercice de sa fonction qui est l'unification des jugements. On a, en suivant un tel raisonnement, l'impression de piétiner sur place, de tourner en rond, faute d'une vision nette de la vraie nature et des vrais rapports des jugements que l'on manie, considérés dans l'ensemble de tout ce que l'on sait positivement, et même de ce qu'on devrait, pour raisonner d'emblée de la meilleure manière, savoir sans le savoir.

Dans ces conditions, comment déclarer, à priori, que les raisonnements qui se présentent comme des chaînes de syllogismes sont plus directs que les autres, en raison de ce que la pensée, en y marchant de conclusion en conclusion, ne fait soi-disant pas de « détours » ? Si on appelle : « faire un détour », le fait d'invoquer quelque vérité sans rapport apparent avec les précédentes, la mineure de chaque nouveau syllogisme dans une chaîne, constitue une vérité de cette sorte — plus ou moins, cela s'entend. Mais nous voyons combien, il est erroné de qualifier cet acte de « détour » de pensée, comme si, plus la vérité introduite dans le raisonnement est inattendue, et moins le but visé, c'est-à-dire la conclusion finale du raisonnement, est directement atteint ; alors

que, en général, c'est tout le contraire qui a lieu. L'erreur vient de ce que l'on est trop tenté de mêler la considération du contenu de la pensée à celle de sa forme, ici seule en cause. On est ainsi tenté de croire que, en changeant brusquement de sujet, l'esprit s'éloigne du terrain sur lequel il s'était placé au début du raisonnement. On oublie que, le vrai sujet dont il s'agit dans un raisonnement mathématique, c'est l'unité des données desquelles on part, et de la conclusion qui en sera tirée, et que le seul « détour » que l'on puisse faire, par conséquent, c'est de choisir les jugements intermédiaires « auxiliaires », destinés à mettre en lumière cette unité, par l'évidence de leur propre unité en elle, d'une façon telle, que ce but ne soit pas atteint aussi directement qu'il aurait pu l'être ; c'est, tout en raisonnant parfaitement en accord avec la pure logique, de ne pas raisonner aussi rationnellement qu'il serait possible, ou même désirable.

Si donc, nous nous contentons de considérer, dans un raisonnement mathématique, uniquement « l'enchaînement », comme le sujet de cette étude semble l'exiger, et si nous admettons avec M. Brunschvicg que cet enchaînement est d'autant plus simple que toutes les idées qui s'y trouvent dès l'abord en cause (les données, la conclusion encore inconnue mais déjà vraie, déjà liées aux données par plusieurs voies possibles), y sont « d'une manière plus directement intelligible » ramenées à l'unité, nous ne ferons pas aux chaînes de syllogismes, ni à aucune autre forme particulière de raisonnements, un traitement de faveur. Le raisonnement le plus simple, quelle que soit sa forme, sera tout bonnement celui par lequel l'unité profonde, — unité rationnelle et non seulement logique, — l'« intériorité », pour reprendre une expression de M. Brunschvicg, des données et de la conclusion, sera mise en lumière au moyen du plus petit nombre possible d'actes ; dans chacun de ces actes, l'esprit, saisissant, entre deux ou plusieurs jugements, une unité interne, dont la connaissance lui sert à approcher de plus en plus son but, et cela, au moyen d'un jugement unique, inexprimé, rapport simple pareil à celui qui pose un concept, et dont l'unicité sous-tend la diversité des jugements sus-dits. Et plus, grâce à sa clairvoyance, l'esprit est capable de saisir des rapports cachés entre les vérités, plus l'ensemble des vérités qu'il connaît, ou même qu'il peut découvrir, lui est présent, d'une ma-

nière latente, plus il peut voir, sous leur variété et leur diversité apparente l'unité, l'« intériorité » réelle, et plus aussi il sera capable, par un choix inconscient, qui n'est autre que la marque du génie du mathématicien, de s'arrêter au rapprochement justement des vérités dont la connaissance de l'unité interne sert, le plus directement, à mettre en lumière celle des données du raisonnement et de la vérité qui doit en être la conclusion, celle-ci lui fût-elle actuellement inconnue.

C'est pour cela que M Brunschvicg dit que le vrai mathématicien « voit les vérités dans leur ensemble », que, pour lui, au lieu de se suivre, elles se sont unies, elles « sont devenues intérieures les unes aux autres » (40), que « la pensée mathématique considérée dans sa genèse vivante est inexplicable si on n'admet pas cette intériorité des idées les unes aux autres, si on ne conçoit pas que l'ensemble de ses connaissances est toujours présent à l'esprit du mathématicien, et que c'est lui qui inspire toutes ses pensées et fonde tous ses jugements » (41). C'est pour cela que les rapprochements audacieux, qui laissent d'abord dans l'étonnement le profane qui suit un raisonnement du dehors, forcent son admiration quand il se rend compte qu'ils sont l'expression d'unités réelles, jusqu'alors, pour lui, insoupçonnées, et que en tant que tels, ils sont les jalons d'une route bien plus directe, — bien plus « simple » — qu'il ne l'aurait jamais imaginée, vers la conclusion du raisonnement, route qui n'exprime, elle aussi, que la recherche d'une unité un peu plus vaste. C'est que l'esprit, instinctivement, cherche la voie la plus simple, la voie ayant le moins de jalons, la voie qui, tout en restant une voie déductive, se rapproche le plus, par les qualités que l'esprit doit déployer pour la découvrir, de cette voie directe — et simple — par excellence (si directe qu'on ne peut même plus l'appeler une « voie »), que constituerait l'appréhension intuitive, nous ne disons pas de telle conclusion dans telles prémisses (comme si elle s'y trouvait « contenue »), mais de l'unité profonde, de l'intériorité mutuelle, des prémisses et de la conclusion, dans l'unité encore plus fondamentale en même temps que plus large, dans l'intériorité encore plus profonde, de toutes les vérités mathématiques — et, ajouterait, sans doute, M. Brunschvicg, de

(40) **L. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement », p. 86.
(41) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 86.

toutes les vérités. En d'autres termes, pour M. Brunschvicg, le raisonnement mathématique — et le raisonnement, en général — le plus simple, paraît être celui dans lequel l'esprit fait preuve d'un minimum de discursivité, d'un maximum de capacité d'intuition ; celui qui, tout en restant, logiquement, impeccable, en ne laissant dans l'obscurité du sous-entendu aucune liaison nécessaire importante, se rapproche le plus de l'acte unique par lequel, un esprit infiniment supérieur au nôtre — un esprit divin, — saisirait d'emblée l'unité que nous nous efforçons, plus ou moins péniblement, de mettre en évidence au moyen de ce raisonnement, — acte qui, pour un tel esprit, remplacerait tout raisonnement.

Pour chaque cas, il y a, semble-t-il, un maximum de simplicité, qu'un raisonnement, devant conclure à une vérité déterminée à partir de certaines données déterminées, ne peut dépasser, étant donnée la nature de notre esprit. Le raisonnement est aussi parfait qu'il lui est possible de l'être, quand ce maximum est atteint, c'est-à-dire, quand, à moins d'une intuition immédiate de leur foncière unité (ce qui nous ferait sortir du domaine de la logique et du raisonnement), il est impossible de passer de ces données à cette conclusion par un plus petit nombre d'actes, dont chacun, comme nous le disions plus haut, est une appréhension de l'unité de deux jugements en un autre jugement, inexprimé, mais réel. Mais il ne semble pas que l'on puisse concevoir de raisonnement plus simple, en soi, qu'un syllogisme, puisque, c'est lui qui, pour M. Brunschvicg, équivaut à l'extériorisation d'un seul de ces dits actes de l'esprit. Devons-nous tirer de là que le syllogisme correspond à ce que l'on pourrait appeler l'« élément » du raisonnement mathématique — comme de tout autre raisonnement rigoureux, d'ailleurs, — et, sans dire que celui-ci se réduise à cette opération de l'esprit, qui n'est que la traduction logique de la pensée vivante qui l'anime, admettre, comme nous avions d'abord, plus haut, été tentés de le supposer (42), qu'il est d'autant plus simple qu'il est composé d'un plus petit nombre de syllogismes, ceux-ci, formant ou ne formant pas une « chaîne » ?

Entre deux raisonnements mathématiques qui affectent également cette forme, il semble qu'en effet, le plus simple, soit,

(42) Voir plus haut, p. 387.

dans l'esprit de l'auteur, celui dans lequel entrent le moins de syllogismes juxtaposés ; en d'autres termes, le moins long. Et encore faut-il que les dits raisonnements partent des mêmes données pour aboutir à l'affirmation de la même vérité, sinon, ils sont beaucoup plus difficilement comparables, — à moins que la longueur et la lourdeur de l'un, forme un contraste par trop frappant avec la sobriété et l'élégance de l'autre. Mais, dans une telle appréciation, il entre déjà autre chose que la stricte évaluation d'un nombre donné de syllogismes. Et, d'une manière générale, il semble que la conception qui fait dépendra la simplicité du raisonnement mathématique uniquement du petit nombre de syllogismes qu'on peut distinguer en lui, soit insuffisante, et non-conforme à l'esprit de la philosophie mathématique de M. Brunschvicg ; — non conforme à l'esprit de la philosophie de M. Brunschvicg, justement parce qu'insuffisante de « son » point de vue, parce que, reflétant une attitude quelque peu étroite, qui, sous prétexte de logique rigoureuse, fait trop facilement fi du point de vue rationnel auquel M. Brunschvicg, lui se place. En effet, de ce point de vue-là, il est plus difficile qu'il ne paraît au premier abord, de déterminer, dans un raisonnement, un nombre précis d'actes d'unification successifs, conduisant à l'unification des données et de la conclusion, c'est-à-dire, à l'intelligibilité de leur lien. Non seulement un raisonnement, composé pour ainsi dire de plusieurs raisonnements distincts, dans lequel, le passage d'une conclusion que, faute de mieux, nous appelerons « partielle », à la vérité que l'on prend comme point de départ d'une nouvelle déduction, peut supposer, de la part de l'esprit, un acte d'une incontestablement plus grande portée unificatrice, que celui par lequel il passe de la conclusion d'un syllogisme à la mineure du syllogisme suivant, dans une chaîne de syllogismes, mais, déjà même dans une telle chaîne, les « étapes » que la pensée parcourt successivement dans la conquête de la compréhension claire de l'unité globale de son œuvre, bien qu'elles soient « logiquement équivalentes », *rationnellement*, ne le sont pas. Les unes représentent l'appréhension, par l'esprit, entre deux jugements, d'une unité plus grande, d'une intériorité plus réelle et plus parfaite, que d'autres, — plus parfaite parce que plus fondamentale, et, pour ce, plus cachée. On ne saurait donc les additionner pour en déterminer le *nombre*, car le caractère plus ou moins direct du raisonnement ne dépendrait

uniquement de leur nombre, que si elles étaient vraiment équivalentes, que si elles correspondaient toutes à un même « progrès », alors que, en fait, l'une seule peut fort bien, en tant que démarche unificatrice en valoir plus d'une autre. Bien plus, il semble que, de deux raisonnements, dans lesquels on pourrait compter, respectivement, un nombre égal de « passages » d'un jugement à un autre par l'appréhension de leur unité interne, il serait possible, d'après ce que nous avons vu jusqu'à présent, que l'un soit, selon M. Brunschvicg, plus simple que l'autre. En effet, admettons que sa conclusion soit plus éloignée de ses données initiales que ne l'est celle de l'autre raisonnement des siennes, c'est-à-dire, que l'unité en laquelle elle se trouve rattachée à elles soit *moins évidente au premier abord*, moins visible, plus fondamentale. N'apparaît-il pas que le raisonnement — qui est comme le « chemin » que prend l'esprit pour la faire ressortir, — est plus *direct*, à nombre égal d'étapes, tout comme un chemin de 1 mètre de longueur, par exemple, menant de A en B, serait, semble-t-il, plus direct qu'un autre chemin, également de 1 mètre, menant de C en D, si on pouvait supposer que A et B sont plus éloignés que ne le sont C et D.

Et encore, cette comparaison est-elle imparfaite, et ne donne-t-elle, si on l'interprète à la lettre, qu'une idée fausse de ce que nous voulons dire. Car l'éloignement qui sépare un jugement d'un autre — qui tient à la trature de notre esprit discursif, et dont la notion est assez malaisée à expliciter vu que cette nature nous échappe en ce qu'elle a de plus intime — ne peut s'assimiler qu'abusivement à une distance dans l'espace. En effet, A, B, C et D, étant des points dans l'espace, il tombe sous le sens que, si le chemin qui joint A à B est de même longueur que celui qui joint C à D, alors que A et B sont, par hypothèse, *plus éloignés* que C et D, au moins le chemin qui joint C à D — les points les plus rapprochés — n'est pas le plus direct possible. — car l'« éloignement », dans ce cas, s'évalue justement à la longueur du chemin le plus direct entre les points « éloignés » l'un de l'autre. Mais, dans le cas des enchaînements logiques dont nous parlions, il n'en est plus tout à fait de même. Deux raisonnements, deux démonstrations mathématiques peuvent être, respectivement, « les plus directs » possibles, et s'accomplir, de plus, au moyen d'un même nombre d'actes unificateurs. Et,

malgré cela, l'un des deux pourrait, semble-t-il, être plus direct que l'autre, s'il représente un travail de l'esprit plus hardi et plus pénétrant, exigeant une intuition plus profonde des rapports entre les jugements, un sens apparemment plus téméraire et plus vraiement intelligent de l'interchangeabilité de certains termes au premier abord étrangers l'un à l'autre un sens plus développé, comme dirait H. Poincaré, des analogies fécondes ; si, en d'autres termes, cette unité qui est en lui et par lui, rendue intelligible, s'y trouve, si l'on peut ainsi s'exprimer, plus « condensée », plus « compacte », et si elle donne le sentiment qu'elle est ainsi plus forte. — Du moins, il semble qu'il en doive être ainsi dans une philosophie dans laquelle l'idée d'unité constitue comme le pivot de la théorie du raisonnement, comme de celle du jugement et du concept ; dans une philosophie qui déclare que « l'effort de la déduction n'a d'autre but que de rendre possible cette unification interne, cette « intériorisation » qui est la source de toute intellection » (43).

Mais une question se pose à nous, après ces explications : que devient, dant tout ceci, la notion d'« élément » du raisonnement mathématique, que nous avions cru, au début de ce développement, pouvoir envisager ?

Le fait est que, plus nous cherchons à creuser ce que nous croyons bien être la pensée de l'auteur en ce qui concerne la nature du raisonnement dont l'unité interne est la plus directement intelligible, et plus cette notion d'« élément », d'abord si facile à concevoir, nous semble s'évaporer, jusqu'à perdre toute consistance par le fait de la non-possibilité de ramener ce raisonnement à un nombre déterminé d'actes d'importance évaluable et comparable.

Et, à la réflexion, cela ne doit nullement nous paraître extraordinaire.

Chez les Logisticiens, rappelons-nous, nous avons pu assez facilement séparer dans le raisonnement, ce que nous avons, faute de trouver une autre dénomination appelé des « éléments » logiques de pensée ; et cela, parce que, dans la philosophie mathématique de ces auteurs, qui est un prolongement, ou, si l'on préfère, une « partie » de leur logique, l'esprit est traité comme un ensemble impersonnel de lois rigides immuables, qui, si elles ne sont pas révélées intégralement par

(43) L. Brunschvicg. « La Modalité du Jugement », p. 85.

l'étude du langage, sont, du moins, telles, que l'on peut suffisamment connaître dans leur vraie nature les produits de leur application, (les démonstrations, les raisonnements, les théories), par une étude de ce que *serait* le langage, si tout le sous-entendu logique y était exprimé. Au fond, nous avons pu séparer des « éléments » dans les raisonnements, parce que ces éléments, à tout prendre, n'étaient autres que des éléments de langage, — ou, si l'on préfère, d'écriture.

D'autre part, chez H. Poincaré, pour qui « épistémologie est inséparable de psychologie, il n'a pas été, d'abord, trop difficile — quoiqu'il l'a été infiniment plus — de conserver, jusqu'à un certain point, la notion d'« élément » d'un raisonnement, en lui attribuant un tout autre sens ; en lui donnant le sens d'acte d'appréhension, dans l'enchaînement global des vérités, d'une unité partielle, contribuant effectivement au sentiment, si important, de l'unité totale du raisonnement (marquant qu'elle a été « comprise») sans toutefois se fondre en elle ; unité partielle psychologique et esthétique, comparable à celle d'un corps de bâtiment, dans un édifice à l'harmonie duquel elle est indispensable, sans, pour cela, perdre sa valeur propre, sans, pour cela, cesser d'être la qualité d'un « tout », qu'on peut, dans une certaine mesure, isoler. Mais déjà, comme nous venons de le reconnaître, cela a été bien plus difficile. Immédiatement, des flottements, des imprécisions plus grandes, se sont glissées dans cette notion d'« élément », dès que nous avons, quittant le terrain de la logique pure (qui, pratiquement, pour les Logisticiens, se confond avec celui des jeux d'écriture), abordé le domaine de la psychologie où les distinctions sont forcément moins nettes ; où, s'il y a encore des lois rigides et immuables, leur application aux cas singuliers, est, elle, beaucoup plus subtile ; où, en somme, l'idée d'« impersonnalité » n'a plus du tout la même signification, et où, à chaque pas, la « *qualité* » se substitue ostensiblement à ce qui, tout à l'heure, — au premier abord du moins, semble n'être que « quantité ». Et bien vite, nous avons été obligés de renoncer à cette notion factice d'« éléments » d'un enchaînement mathématique. Nous l'avons remplacé, on s'en souvient, par celle de *forme*, qui rend compte admirablement des « parties » qu'on peut distinguer dans un tel enchaînement, aussi bien que de l'unité réelle, vivante, du « tout » que constitue leur agencement.

Ici, le point de vue auquel se place l'auteur est à la fois

logique et psychologique. Cette notion d'unité profonde des idées, d'intériorité des termes les uns aux autres, est à envisager avec ces deux caractères, soit qu'il la place à la base de sa théorie du concept et du jugement, — du jugement, acte élémentaire, acte « simple » comme il dira lui-même, de l'intellection, — soit qu'il y cherche, et la condition nécessaire de la validité du raisonnement, et le principe de sa plus grande perfection rationnelle. Il ne peut être question, dans le raisonnement, d'« éléments logiques », dans le sens dans lequel nous avons pris ce mot dans l'analyse de la pensée logistique. Car ici, l'esprit, loin d'être pris comme un ensemble de lois impersonnelles, est traité comme quelque chose de vivant, d'humain, de dynamique, doué « d'une capacité indéfinie de progrès », donc, échappant par nature à la rigidité qu'une systématisation philosophique trop absolue voudrait lui imposer. Ici, la pensée ne se laisse pas enfermer strictement dans le moule du langage symbolique, voire même supposé le plus adéquat. Et, par conséquent, ces « éléments » dont nous parlions, s'il est vraiment légitime d'en parler, ne devront participer d'aucune rigidité. Mais qu'est-ce donc qu'un « élément » qui serait plus ou moins élastique ? Bien plus. Qu'est-ce donc qu'un « élément » qui, non seulement ne serait plus fixe, mais ne serait même plus à proprement parler une « quantité ». Car l'idée d'intériorité des idées les unes aux autres, se rapporte, ne nous le dissimulons pas, à une *qualité* des idées. Comment saisir un « élément » pareil ?

Et, au premier abord du moins, nous n'avons pas non plus à introduire, ici, pour en donner une idée, un critère esthétique comparable à celui de H. Poincaré. (En admettant qu'un tel critère, ne nous amènerait pas de nouveau, comme plus haut, à rejeter bien vite la conception de la simplicité liée au petit nombre des « éléments »). Il n'y a pas, semble-t-il tout d'abord, de comparaison empruntée à l'art, qui puisse correspondre suffisamment exactement à l'expression de l'idée de la simplicité mathématique d'un raisonnement, telle que nous croyons tout de même en entrevoir une chez M. Brunschvicg, et qui nous aiderait à préciser la signification d'un « élément de raisonnement ». Dirons-nous donc, qu'ici, tout recours à une telle notion est superflu, et que, sans plus, le raisonnement mathématique « simple », pour M. Brunschvicg, c'est celui dont l'unité interne est appréhendée par l'esprit le plus *directement*, en nous souvenant des explications

que nous avons pu donner sur ce que signifie un enchaînement « *direct* » de vérités ?

Il semble bien que cela suffise, à la base de toute étude sur ce qu'il entend par un enchaînement « simple », en mathématique.

Mais ceci demande qu'on s'y arrête. Et, d'après tout ce qui a été précédemment dit, au cours de ces pages, sur le caractère à la fois réel et idéal, — caractère de « fait » en même temps que de « but », — de cette « unité interne des idées », si importante pour notre auteur, ne sommes-nous pas amenés à considérer, sinon des « éléments » factices de raisonnement, du moins un raisonnement élémentaire, un raisonnement « simple » par excellence, qui a, lui, une existence bien nette ?

A ne considérer que sa seule forme logique, ce raisonnement, on le rencontre à chaque instant. Mais il existe comme un type parfait, qui ne serait autre, par sa perfection même, que le modèle du « raisonnement *simple* » ; qui, serait, c'est-à-dire, le raisonnement idéal vers lequel *tend* tout raisonnement. (N'avons-nous pas vu, en effet, que l'esprit du mathématicien *tend*, dans les enchaînements qu'il construit pour se rendre les vérités intelligibles, vers le maximum de simplicité ?) Et sa perfection tiendrait, semble-t-il, précisément à autre chose qu'à sa seule validité logique. Elle tiendrait à une qualité de la liaison entre les idées, qui, pour M. Brunschvicg, dépasse le domaine strictement logique.

Ce raisonnement « élémentaire », c'est, on le sait, le syllogisme. C'est le plus « simple » des enchaînements de vérités — la plus immédiate des inférences médiates, pour parler un langage paradoxal, mais suggestif. Etant données une vérité dont on part et une vérité que l'on conclut, et l'obligation, pour l'esprit de *passer* de la première à la seconde, il n'y a pas moyen, semble-t-il, d'y passer plus *directement*, c'est-à-dire, à première vue du moins, par un moins grand nombre d'intermédiaires, puisque ces intermédiaires se réduisent ici à un seul : la mineure du syllogisme.

Mais ce n'est pas parce que cet intermédiaire est seul que le raisonnement est simple. C'est, bien plutôt, parce que le raisonnement est simple, qu'il est seul ; car le raisonnement, — l'unification des idées, la « synthèse » des jugements, comme dit l'auteur lui-même — est antérieur aux moyens que l'esprit emploie pour l'extérioriser ; ou, si l'on

préfère réserver ce nom de « raisonnement » à l'énoncé du syllogisme (ou, d'une manière générale, de la suite des vérités), on dira que l'unification des idées est le principe du raisonnement et non son résultat. La proposition « intermédiaire » est précisément trouvée, grâce à l'appréhension par l'esprit de l'unité des vérités « hypothèse » et « conclusion » en l'unité plus profonde d'un seul et même jugement, comme nous l'avons vu de la forme : A est A. Ce raisonnement sera le passage le plus *direct* d'une vérité à l'autre, la synthèse la plus parfaite des deux jugements, quand l'unité qui, par lui, est mise en évidence (et qui comme nous venons de le dire est son principe même), sera la plus éclatante ; c'est-à-dire, encore, quand la vérité que l'on conclut est, en apparence, la plus étrangère possible à celle de laquelle on part, et qu'il a fallu, vraiment, pour extérioriser le lien qui les fond en un seul jugement, *directement,* que l'esprit fasse preuve de toute sa capacité unificatrice. C'est alors, en effet, que la déduction sera, — tout en restant une « déduction » — le plus près possible de l'acte « simple » par excellence d'unification, qui est l'intuition immédiate de l'unité dans ce qui paraît divers, pour ne pas dire disparate. C'est alors que logique et intuition se prêteront l'aide le plus effectif ; que l'esprit s'affirmera le plus parfaitement, à la fois, sous ses deux aspects dits « opposés ».

La pensée de M. Brunschvicg, souple et profonde à la fois, n'est pas aisée à expliciter en quelques formules nettes qui n'en laisseraient rien échapper. Si nous nous reportons à ce que nous avons dit plus haut (44) du raisonnement, selon lui, *simple,* à cela même qui a fait naître en nous des doutes quant à l'opportunité de considérer, chez lui, des « éléments » de raisonnement sans risquer de lui faire dire exactement le contraire de ce qu'il a voulu dire, nous voyons, d'abord, que les « actes » successifs dont l'un, dans un raisonnement, appelle l'autre, se rapprochent, par leur nature, de celui qu'explicite le syllogisme auquel il vient d'être fait allusion. A vrai dire, le « nombre » de ces actes n'a pas d'importance. Deux raisonnements qui correspondraient à un même degré de puissance d'unification, de la part de l'esprit, seraient, d'après ce qui précède, également directs — donc également

(44) Voir plus haut, pp. 398 et 399.

simples — à la manière dont deux lignes droites sont droites, quelles que soient leurs longueurs respectives.

Mais s'agit-il seulement d'actes successifs, du moment que « le mathématicien voit les vérités *dans leur ensemble* » ; que « le système rigide s'est résolu, et comme *fondu* dans une unité » ? (45). Ce n'est pas uniquement dans le syllogisme, mais dans tout raisonnement *simple,* qu'il n'y a, en réalité, semble-t-il, qu'un acte, dût-il y avoir autant de passages « logiques » d'une vérité à l'autre que l'on voudra. Cet acte, c'est l'appréhension de l'unité profonde de ces vérités, qui sont « vues dans leur ensemble » ; c'est la prise de conscience de leur synthèse. Ce qui rend si « simple » le syllogisme, raisonnement élémentaire type, ce n'est pas qu'il est le passage d'une vérité à une autre au moyen d'un seul intermédiaire, mais c'est que l'unité en laquelle se résolvent les vérités appelées l'une « majeure » et l'autre « conclusion » (les deux jugements entre lesquels l'intermédiaire — la mineure — sert, logiquement, de pont), est *immédiatement, directement* perçue, avec toute la force de l'évidence la plus brutale. Elle « éclate », littéralement, à l'esprit. Et ce qui fait aussi, semble-t-il, pour M. Brunschvicg, la simplicité de tout raisonnement, de tout enchaînement mathématique quelqu'il soit, c'est la *force,* la spontanéité, avec laquelle l'esprit se saisit de son unité profonde, de cette unité en laquelle les jugements dont il est une synthèse se résolvent.

Pour celui qui étudierait un raisonnement du point de vue purement logique, il persiste toujours, entre les idées, des antagonismes, du moins des dissemblances, en un mot, de la diversité, qui oblige le raisonneur de *passer* de l'une à l'autre.

Dire que le raisonnement est d'autant plus simple que le passage des prémisses à la conclusion, se fait en un plus petit nombre d'actes, d'étapes, ce serait encore se placer à un point de vue purement logique, accepter qu'une diversité irréductible subsiste entre les vérités, alors que, pour M. Brunschvicg le raisonnement « simple » est essentiellement *unité,* intériorité complète des idées, appréhendée par l'esprit comme quelque chose d'irrécusable, d'évident, et d'autant plus étonnant, au sens fort du mot, que les « idées », con-

(43) **L. Brunschvicg.** « La Modalité du Jugement », p. 85.

sidérées isolément sembleraient plus étrangères. Dans la conscience directe, brutale, « éclatante », de cette « intériorité », d'un certain nombre de vérités mathématiques (avant même que le mathématicien n'en ait logiquement combiné l'agencement), la notion même de « passage » disparaît. Tant qu'il y a dans l'esprit la conception d'étapes, de jallons, entre deux vérités, point de départ et aboutissant d'un raisonnement, l'esprit n'a pas réalisé *directement*, d'un seul coup, l'intériorité de ces vérités l'une par rapport à l'autre ; il n'a pas saisi entre elles, une parfaite unité avec une complète évidence, d'où le raisonnement qu'il imagine pour les y englober l'une et l'autre, ne saurait, selon M. Brunschvicg, être vraiment simple. Il est une « synthèse de jugements », sans doute, mais une synthèse où l'opposition originelle des éléments persiste, d'une manière plus ou moins atténuée. Il n'est pas une synthèse parfaitement homogène.

Or, c'est là, semble-t-il, ce que représente, pour l'auteur, la véritable unité, celle qui s'impose à l'intelligence comme un fait, clair par lui-même, ou, mieux encore (pour éviter de suggérer la passivité relative que ce mot de « fait » peut sembler contenir, de la part de l'esprit), comme un acte d'intellection spontanée, qui étonne par sa facilité même. C'est là la vraie « simplicité » dans les enchaînements mathématiques. Et c'est, répétons-le, dans l'absence de dissonance, d'antagonismes, dans la *fusion* des choses, en apparence très éloignées, les unes dans les autres, dans la disparition de « l'autre » dans le « même », qu'il faut la chercher, et pas ailleurs.

Il ne s'agit pas, dans l'idée que M. Brunschvicg se fait de la simplicité, du petit nombre d'actes ou d'étapes qui mènent à l'unité d'un enchaînement. Il s'agit de la conscience directe de cette unité, — d'autant plus directe que l'unité est plus lumineuse. Et si l'on devait absolument y faire intervenir l'opposition entre l'un et le multiple, le « petit nombre » ne serait sûrement pas, pour l'auteur, le médiateur entre ces deux pôles. Bien au contraire. Tout porte à croire que, pour lui, le grand nombre serait beaucoup plus près de l'un, par l'effacement des différences, devenues infinitésimales, car l'unité dont il s'agit ici est une unité *qualitative*. Le « petit nombre » des actes de « passage », ne ferait qu'accentuer l'importance de chacun d'eux ; ne ferait qu'accentuer la diversité des termes que chacun de ces actes « unifie », en principe, avec son voisin. Si *petit* soit-il, et se réduirait-il à deux

seulement, qu'il n'en marquerait que mieux la discontinuité du passage. Et, pour l'auteur, pour lequel, dans un raisonnement mathématique « un », c'est-à-dire simple, « au lieu de se suivre, les vérités se sont unies » (46), toute discontinuité, semble-t-il, s'oppose par nature à la vraie unité de l'intellection directe, qui est une unité dynamique, comme tout arrêt, fût-il rare (dans la mesure même où il est rare), détruit l'unité du mouvement.

Si, comme nous le disions plus haut, plus un raisonnement est *direct,* et plus il se rapproche de l'acte simple par excellence (accessible seulement à un esprit divin), que constituerait l'intuition immédiate de l'unité profonde de toutes les vérités, c'est que sa simplicité est le fait de l'intuition limitée, mais tout de même réelle du mathématicien, en général, du raisonneur. Celle-ci, par les rapprochements qu'elle permet, par l'unité qu'elle perçoit là où il y a apparemment diversité, va, pour ainsi dire, au devant du travail logique. Elle suggère à la faculté « logique » qui a pour fonction de « passer » d'une vérité à l'autre, par où il faut « passer » ; elle lui permet de remplir sa fonction avec le moins de peine. Mais ce n'est pas parce que, « *logiquement* », le « passage » d'une vérité à l'autre est plus direct, que le raisonnement est plus simple. Comme nous le disions plus haut (47), c'est parce que le raisonnement est plus simple, qu'il peut logiquement, se formuler avec moins de détours. Et cette simplicité vient de l'intuition primordiale, claire et sans détours aucuns, que toutes les divergences, toutes les dissonances, n'y sont qu'apparentes. Elle vient de ce que son unité profonde, telle que nous l'avons décrite, unité qualitative, unité dynamique, « *éclate à l'esprit* » pour reprendre une expression pascalienne que M. Brunschvicg affectionne.

Et il semble que, si, quittant maintenant l'examen du raisonnement, nous essayons de nous demander ce qu'il en est, pour M. Brunschvicg, des « enchaînements » mathématiques plus vastes, des « théories », nous devions être amenés à la même conclusion.

Nul doute que ces enchaînements-là aient, pour M. Brunschvicg, une importance très grande. Ce sont eux qui assurent la connexion entre les différentes parties de la

(46) **L. Brunschvicg.** « La Modalité du Jugement », p. 86.
(47) Voir plus haut, p. 406.

science ; par suite, c'est en eux qu'est rendue intelligible l'unité globale de celle-ci, sur laquelle l'auteur ne manque pas d'insister. La clarté et la simplicité de chaque domaine dont le mathématicien a à s'occuper, en particulier des domaines élémentaires. dit-il, ne doit pas retenir notre attention outre mesure, au risque de nous faire négliger l'« élargissement croissant des horizons que s'ouvrent les inventions de plus en plus complexes et raffinées des savants » (48). Pourquoi ? Parce que c'est par la complexité croissante des notions qu'ils inventent, que les mathématiciens en arrivent, d'une part, à établir, entre tous les domaines de leur activité, les connexions nécessaires à l'intelligibilité de l'unité profonde de tous ces domaines, — (grâce à l'ingéniosité des rapprochements qui leur viennent à l'esprit, et qui, souvent sans la richesse de certaines de leurs élaborations précédentes ne s'imposeraient pas à eux), — d'autre part, à rendre de plus en plus intelligible l'unité qui existe, entre la pensée et le réel, c'est-à-dire, entre la raison et l'expérience, engagées déjà toutes les deux, dans le plus élémentaire des processus arithmétiques : l'échange de un contre un, dont nous avons déjà parlé. Or, pour M. Brunschvicg, c'est, avant tout, cette unité qu'il s'agit de comprendre. Et, au sein des mathématiques pures elles-mêmes, c'est l'intelligibilité de leur tout en tant que tout, qu'il s'agit, peu à peu, de conquérir — tout comme il s'agissait, dans le raisonnement, avant tout de comprendre l'unité que sous-tendait, plus ou moins profondément, les prémisses et la conclusion. Le savoir vraiement scientifique, c'est-à-dire *rationnel* et pas seulement logique, « satisfait à l'exigence de l'unité totale, qui est l'exigence propre de la raison » (49).

Les « théories » mathématiques, ce sont des ensembles de « chemins de communication et de ramification » qui, entre les disciplines mathématiques « fondées sur des notions particulières, délimitées avec précision, enchaînées avec rigueur », viennent « montrer la coordination des méthodes, étendre l'horizon de leur application, susciter de nouvelles

---

(48) **L. Brunschvicg**. « Les Étapes de la Philosophie Mathématique », p. 495.

(49) **L. Brunschvicg**. « Les Etapes de la Philosophie Mathématique », p. 396.

solutions et de nouveaux problèmes » (50). Ce sont, en somme, de grands réseaux de correspondances profondes, tels que, l'esprit qui en appréhende clairement la structure, appréhende, par là même, l'unité globale de son œuvre dans le domaine mathématique.

M. Brunschvicg ne parle pas, explicitement, de ce que l'on doit entendre, selon lui, par la *simplicité* d'une théorie mathématique. Mais on est incité à se demander, si, par analogie, avec ce que nous avons déjà vu du raisonnement, la théorie la plus simple n'est pas, elle aussi, la plus « directe » ; c'est-à-dire celle qui, en montrant avec le plus d'évidence immédiate le caractère, au fond, illusoire, de l'hétérogénéité des diverses parties de la mathématique, permet à l'esprit de saisir l'unité totale des mathématiques de la manière la plus éclatante. Ou, plutôt, la théorie la plus simple n'est-elle pas celle que l'esprit ne peut qu'édifier quand il a saisi l'unité profonde de diverses parties, en apparence hétérogènes des mathématiques, avec la clarté de l'évidence la plus criante, — pour exprimer précisément, d'une manière adéquate, qu'il l'a saisie ? En d'autres mots, ne répéterons-nous pas, en nous souvenant de ce que nous avons dit au sujet du raisonnement, que la « théorie » la plus simple est la synthèse la plus *homogène* et la plus directement accessible, des parties des mathématitques qu'elle englobe ?

Sans doute, le raisonnement le plus simple, conçu à la façon que suggère M. Brunschvicg, est-il aussi le *meilleur,* étant donné que cette unité, cette « intériorité des idées » qui est mise en évidence en lui, est, pour l'auteur le but à atteindre le plus parfaitement et le plus vite. Si M. Brunschvicg ne parle pas de la théorie la plus simple, d'une façon expresse, du moins semble-t-il parler de la meilleure. Il faut voir ce qu'il entend par là. Et si par hasard, ses idées là-dessus sont telles qu'un rapprochement nous semble s'imposer entre elles, et celles que nous lui connaissons sur le meilleur raisonnement, — et en même temps le plus simple, — nous serons portés à conclure que, ce qu'il pense de la théorie la meilleure, il le pense aussi de la plus simple. Et cela, répétons-le, nous ne le déduirons pas des textes, qui ne sont pas explicites à ce sujet, mais des conjectures apparemment les

(50) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 447.

plus légitimes que l'on puisse faire, en se basant sur la similitude profonde de but (la conquête de l'unité intelligible) que l'auteur admet entre le raisonnement et la théorie mathématique ; mais de ce qui semble être la logique de sa philosophie.

Les théories, ce sont, avons-nous dit, des ensembles organisés de connexions, par la conscience desquels, l'esprit en vient, dans le domaine mathématique, à l'intelligence de l'unité totale et vivante de son œuvre. Or, que dit M. Brunschvicg de la conquête progressive de cette unité ? Nous y avons, croyons-nous, déjà fait allusion : « Les moments importants, les moments solennels dans le développement de la mathématique moderne, sont ceux, où deux domaines, qui étaient, jusque-là cultivés pour eux-mêmes, et qui paraissaient voués à une limitation définitive, entrent *tout d'un coup* en contact et se prêtent un secours *inattendu*. C'est le moment où Lagrange établit que l'étude des conditions générales de résolution pour les équations algébriques renvoie à la considération des échanges entre les racines d'une équation dite résolvante et à la détermination des fonctions que ces échanges laissent invariables : le problème posé par l'algèbre « se réduit à une espèce de calcul de combinaisons ». C'est le moment, encore, où Riemann s'empare de remarques en apparence « bien enfantines » et plus voisines du jeu que de la science, sur la possibilité de déformer arbitrairement une surface quelconque, « pourvu que la déformation soit parfaitement continue, pourvu qu'elle n'introduise ni déchirure ni soudure », et n'en tire rien de moins que le renouvellement de la théorie des fonctions algébriques » (51). En d'autres termes, la valeur d'une théorie mathématique se juge à l'apparent éloignement, au degré de complète indépendance jusqu'alors reconnue, des domaines mathématiques dont elle met en évidence l'unité profonde en les rapprochant d'une façon clairement compréhensible. Pourquoi cela ? Parce que plus de tels rapprochements sont effectués entre des domaines qui semblaient, l'un à l'autre, irrévocablement étrangers et plus l'unité totale des mathématiques devient intelligible d'une manière *directe, éclatante* ; parce que, dans chaque

(51) L. Brunschvicg. « Les Étapes de la Philosophie Mathématique », pp. 446-447.

effort fait pour la conquérir, cette unité totale, plus on néglige les obstacles, plus on fait fi des apparences, pour aller, sans détours, droit à l'appréhension de l'unité profonde de deux ou trois domaines « très différents » des mathématiques, et plus ces « différences » semblent subitement disparaître, et plus cette unité qu'elles recouvrent s'impose à l'esprit avec force.

Ne saisit-on pas là un parallélisme, entre la *meilleure* théorie et le *meilleur* raisonnement mathématique, parallélisme qui ne peut laisser d'être impressionnant ? Dans les deux cas, la plus grande perfection est envisagée comme le fait de rapprochements, fructueux parce que constituant des actes d'unification hardis — en réalité, on pourrait dire aussi bien, et même mieux, des actes d'unification « clairvoyants ». Etant donné, d'autre part, le sens que M. Brunschvicg attache à la *simplicité* du raisonnement, il n'y a pas de raison pour que nous ne disions pas aussi que, la théorie mathématique la plus parfaite, celle, c'est-à-dire, qui rend « le plus directement intelligible » l'unité interne d'une partie plus ou moins grande des mathématiques, — l'unité *des mathématiques* même, s'il s'agit d'une théorie assez vaste, — est aussi la plus simple. La mathématique dans son ensemble, tout en compliquant de plus en plus ses notions, et, d'une façon générale, tout en rendant de plus en plus subtils les instruments dont elle use, semble, selon M. Brunschvicg, *aller vers le simple*, c'est-à-dire, aller vers la conscience de son unité totale, de plus en plus évidente, dans sa perfection, — bien plus, vers la conscience de son unité cachée avec les autres disciplines (52).

---

(52) « L'observation montre à quel point sont transitoires et factices, dans l'ordre de la matière et même dans l'ordre de la vie, les formes d'agrégats qui donnent à telle ou telle chose l'apparence d'un individu autonome et simple. L'application de l'arithmétique pure à la nature est un coup d'essai que tente la pensée humaine ; elle obtient une première approximation. Le calcul des fractions, qui est un effort déjà plus complexe et plus heureux, est une seconde approximation.

Or, le succès, en quelque sorte illimité du fractionnement, montre que la réalité est encore au delà du fractionnement. Par les entiers positifs et par les fractions, nous n'avons fait que suivre la pente de la moindre action intellectuelle ; nous avons abstrait de l'univers ce qui était accessible à une intelligence qui ne se sentait bien assurée que de ses démarches élémentaires ; nous

Si cela n'est pas expressément dit par l'auteur, du moins, semble-t-il, cela rend-il fidèlement sa pensée ; du moins, cela paraît-il être tout à fait dans son esprit, si l'interprétation que nous avons essayé, jusqu'ici, de donner de sa philosophie mathématique, n'est pas fausse.

Que ce soit, donc, dans un raisonnement mathématique, « synthèse de jugements », ou dans une « théorie », synthèse bien plus vaste de domaines différents des mathématiques, la simplicité de ce que nous avons appelé un « enchaînement », réside, pour M. Brunschvicg, dans *l'homogénéité* de la synthèse que constitue celui-ci, dans son *unité qualitative*, et dans la capacité de cette unité de *s'imposer* à l'esprit avec la force de l'évidence. C'est d'ailleurs, dans la mesure où les dissonnances et les antagonismes disparaissent spontanément, dans la mesure où leur caractère illusoire ou superficiel apparaît avec une lumière plus vive, que l'unité de la synthèse est reconnue plus vraie. On n'a pas la peine d'imaginer des subtilités pour la faire apparaître bon gré, mal gré : *elle se voit*, pour ainsi dire. Et l'esprit droit qui la saisit comme une réalité, qui la recrée (car il ne s'agit pas d'un enregistrement passif), entre les prémisses et la conclusion d'un raisonnement, ou entre les parties d'une même théorie, et le mathématicien de génie, auteur du premier énoncé de ce même raisonnement, ou de la première élaboration de la théorie, disent, tous les deux, que « la démonstration est *simple* », que « la théorie est « *simple* ».

Mais qu'est-ce qui fait l'*unité* d'une synthèse, sinon la loi de composition de celle-ci ? Il n'y a, vraiment, que cela, en elle, qui soit « *un* » et stable. Et qu'est-ce qui fait que cette unité est plus ou moins directement, saisissable, plus ou moins

---

étions dans l'espace, sans encore avoir la force d'aborder de face la réalité spatiale avec toutes ses conditions et toutes ses propriétés. Mais nous essaierions en vain de nous masquer à nous-mêmes cette faiblesse, comme si elle était une supériorité, comme si c'était élever la dignité de l'arithmétique, que de transformer ses objets en pures entités logiques, soustraites au contact de la réalité, déracinées, par suite, de leur vérité. Puisque c'est le contact avec le réel qui fait de l'arithmétique une science au sens propre, au sens complet du mot, il faut étudier dans leur généralité les lois de ce contact, en reprenant à sa base même le processus d'activité intellectuelle par lequel se constitue la réalité. » — L. **Brunschvicg**. « Les Étapes de la Philosophie Mathématique », pp. 495-496.

lumineuse ? qu'elle « éclate », positivement, aux esprits, ou, au contraire, ne parvient pas à s'imposer nettement ? C'est encore, semble-t-il, à la *loi de composition* de la synthèse qu'il faudrait le demander, en d'autres termes, au schème intellectuel qu'elle suppose pour être pensable.

En d'autres termes, le pouvoir de s'imposer à l'esprit, avec la clarté d'une évidence, avec la force de quelque chose à quoi il n'y a rien à ajouter, rien à retrancher, et qui ne nécessite pas de commentaires, avec, c'est-à-dire, le prestige de la *perfection*, disons le mot, nous semble être le privilège de certaines lois de composition des enchaînements mathématiques (des lois « élémentaires » pourrait-on dire), de certains *schèmes*, en cela qualitativement différents des autres.

Et nous revenons ainsi à ce que nous disions dans les chapitres antérieurs de cette étude, à propos de la conception de la simplicité chez H. Poincaré, et, en général, chez les philosophes à tendances « subjectivistes » : la simplicité des enchaînements mathématiques, c'est, pour M. Brunschvicg, lui aussi, une qualité de certaines de leurs lois de composition ; c'est la qualité de certains *schèmes* de pensée qu'ils supposent, la caractéristique de certains modèles d'organisation du travail de l'esprit, de certains types d'*ordre* qu'il met dans l'ensemble des idées dont il perçoit l'« intériorité réciproque ».

CHAPITRE XVIII

QU'EST-CE, POUR M. BRUNSCHVICG, QUE LA SIMPLICITÉ DES « NOTIONS » MATHÉMATIQUES ?

Il nous reste maintenant à chercher à préciser ce que c'est, pour M. Brunschvicg, qu'une « notion » mathématique « simple » ; car si, pour lui, du point de vue de cette finalité de « l'un », en laquelle il voit la tendance des mathématiques (comme des autres sciences, quoique, pour ces dernières, à un degré moindre), la simplicité des « enchaînements » est particulièrement importante, il n'en reste pas moins, qu'il admet qu'il existe des notions mathématiques plus simples les unes que les autres, et que, si nous ne déterminons pas ce qui fait qu'elles sont, pour lui, « plus simples », nous n'aurons pas donné, des idées de l'auteur sur la nature de la simplicité mathématique, un aperçu complet.

Mais avant d'essayer de tirer cette question au clair, il semble qu'il faille bien nous entendre sur ce que représente, pour lui, une notion mathématique.

Comme nous avons pu nous en rendre compte au cours des chapitres précédents, où, indifféremment, nous avons, à la place du mot « notion », fait usage, aussi bien du mot « objet » que du mot « être » mathématique, ces « notions » semblent représenter, pour tous, les concepts qui entrent, comme matière, dans ces jugements spéciaux (non du point de vue strictement logique, mais de celui de notre étude), que constituent les vérités mathématiques ; représenter « ce » dont parlent les mathématiciens : nombres, rapports, figures, etc... Nous ne nous demandons pas si, pour M. Brunschvicg, les notions mathématiques peuvent désigner autre chose, — car, que désigneraient-elles ? — mais nous voulons, avant de chercher ce qui fait qu'elles sont simples ou complexes, chercher quelle est, pour l'auteur, leur structure, ce à quoi elles correspondent dans la pensée, persuadés que l'idée qu'il se fait de leur simplicité, en dépend.

Il semble que ce que dit M. Brunschvicg du concept en général, doive nous éclairer sur ce qu'il pense de la nature des concepts mathématiques — d'autant plus qu'il fait allusion à ces derniers, comme aux concepts les plus parfaits, et dans le but de préciser, justement, sa pensée. Or, que voyons-nous ? Que son premier soin est d'écarter la tentation d'identifier concept et images. Une telle identification d'ailleurs, choquerait bien plus s'il s'agit de concepts mathématiques, que d'autres. Puis, il se demande, ce que, dans ces conditions, il « reste » au concept. Il lui reste « de reposer sur un certain ordre, sur un certain plan qui unit certaines images entre elles, ou même sur un certain ordre entre certains groupements, déjà eux-mêmes abstraits. En d'autres termes, il y a comme une connexion organique, un schème dans l'espace, autour duquel se développent les images à la fois plus concrètes et plus vagues qui font vivre le concept devant nous, sans y rien ajouter, tout au contraire, puisque *les concepts réputés les plus parfaits « sont ceux qui se réduisent à ce schème, et se définissent par la loi suivant laquelle ce schème est formé, comme les concepts mathématiques* » (1).

Mais en quoi, au juste, ce « schème » consiste-t-il ? Comment se dessine-t-il ? Quel en est le fondement ? « Le fondement du concept, dit un peu plus loin l'auteur, — parlant, cette fois, de tous les concepts — c'est un acte dans lequel sont unis et identifiés les deux rapports que l'analyse a successivement discerné dans le concept et qu'elle ne pouvait poser qu'à l'état séparé » (2) — il s'agit du rapport de l'attribut au sujet et du sujet à l'attribut. En d'autres termes « le fondement du concept c'est ce que nous appelons un jugement, et on pourrait dire sans paradoxe que concevoir, c'est juger » (3). « Le concept est *postérieur* au rapport ; c'est par ce rapport qu'il se constitue » (4).

Nous voici donc amenés à envisager le concept en général, et, pour ce qui nous intéresse, le concept mathématique, la « *notion* » dont nous voulons déterminer les conditions de simplicité, comme le résultat d'un jugement, c'est-à-dire, de

---

(1) **L. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement », p. 6. C'est nous qui soulignons les dernières lignes.
(2) **M. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement », p. 8.
(3) **M. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 8.
(4) **M. Brunschvicg**. Idem, p. 8.

la perception d'un rapport (5). Le symbole, reconnu « nécessaire à la conception mathématique », n'est, toutefois, pas essentiel, comme certains le voudraient. Il joue le rôle d'un signe d'écriture, d'un nom ; et quelle que soit sa commodité, ce qui compte, pour le mathématicien, c'est l'acte de l'esprit qu'il désigne — ce qui compte, par exemple, ce n'est pas le « chiffre » (quelle que soit la mesure dans laquelle, dans les calculs, on ne songe plus qu'à lui), mais bien le « nombre ». Le symbole tout au plus, fournit au concept mathématique « tout en compréhension », un « minimum d'extension » (6), indique qu'il y a au moins un objet auquel il s'applique. Mais cet objet, est en quelque sorte, distinct du concept, de même que Pierre et Paul, tout en étant des échantillons d'humanité, sont, logiquement, distincts du concept d'« homme » ; ou plutôt, ici, la compréhension du seul « échantillon » peut bien ne pas dépasser celle du concept, mais lui être adéquate (comme dans le cas de la racine imaginaire, cité par M. Brunschvicg (7), et le symbole n'être que la pure désignation de la notion que l'esprit s'est forgée.

La définition, en laquelle nous avons, jusqu'à présent, cherché toute la réalité d'une notion mathématique (8), « ne signifie pas autre chose que ceci : le groupement de certaines qualités en un tout, qui en fait, dans l'esprit tout au moins un objet, et cet objet idéal, constitue au concept un minimum d'extension qui représente la possibilité, dans l'application ultérieure à l'univers, d'une extension indéfinie » (9), en d'autres termes, l'indication de la manière dont l'esprit doit procéder pour concevoir un « échantillon » de la notion.

Mais ceci semble assez peu s'accorder avec ce que nous avons vu, plus haut, il y a un instant. Nous avons, en effet, cru devoir séparer la notion, le « concept » mathématique, de l'objet qui lui constitue un minimum d'extension. Et voici que la définition se rapporte, elle, nous dit l'auteur, à cet « objet ». Or il n'y a pas d'autre moyen pour nous de concevoir la notion elle-même, que de nous en rapporter à la défi-

---

(5) **M. Brunschvicg**. Idem, p. 10.
(6) **M. Brunschvicg**. Idem, p. 9.
(7) **M. Brunschvicg**. Idem, p. 9.
(8) Voir plus haut, les chapitres qui se rapportent à la simplicité des « notions » mathématiques.
(9) **M. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement », p. 9.

nition. C'est là un fait. La définition du cercle est tout ce qui peut nous permettre de concevoir, « un » cercle, n'importe lequel, et non tel ou tel cercle de centre o, ou o'.

Devons nous dire que l'objet mathématique qui forme l'extension du concept, ou de la notion, est toujours « unique », et se confond, pratiquement, avec cette notion elle-même ? Que l'interprétation que nous venons de donner de la pensée de M. Brunschvicg est abusive, et que, contrairement à elle, — et conformément à ce que, dans les chapitres précédents, nous avons admis, confondant toujours « objet » et « notion » mathématique, — le symbole peut n'être qu'un nom, si l'on veut, qu'une abréviation (qu'une manière concise de rappeler ce dont on parle), sans que cette « chose », désignée par lui, soit autre que la notion elle-même ? Que, en un mot, puisque ce dont il est question en mathématiques, n'a jamais qu'une existence idéale (indépendamment, il s'entend des sources, et de l'appui expérimental du travail de l'esprit), il n'y a pas lieu de distinguer du tout, le concept de l'« objet auquel il s'applique », de séparer le moins du monde, le point de vue de la compréhension du point de vue de l'extension à propos de lui ? Cette distinction n'apparaît-elle pas déjà comme beaucoup plus artificielle, dans le cas des termes qui désignent des êtres singuliers, — comme les noms propres, — que dans celui des termes généraux, comme celui d'« homme » auquel nous avons fait allusion précédemment ?

Mais, objectera-t-on, les termes singuliers, ne désignent, justement, pas des concepts, des « notions », mais des individus. Nous répondrons qu'on a pu maintenir cette opposition parce que, généralement, ces individus ont une existence matérielle qui est refusée au concept, par définition. Mais, ici, dans le cas des « objets » mathématiques, la difficulté disparaît, car les conditions ne sont plus les mêmes. Ce n'est plus, en effet, l'existence d'un « individu » qui oblige l'esprit à concevoir l'assemblage de toutes ses qualités, mais c'est l'activité pure de l'esprit qui constitue un « objet », par « le groupement de certaines qualités en un tout » (10), indiqué dans la définition mathématique, telle que l'auteur nous la présente. Cet « objet » a toute la compréhension du concept et n'en a

(10) L. Brunschvicg. « La Modalité du Jugement », p. 9 (déjà cité).

pas d'autre, — car il faut bien se rendre compte que l'« objet » qui constitue à la notion de cercle, par exemple, un « minimum d'extension », n'est pas tel ou tel cercle, comme un instant nous avons eu l'air de le croire, mais le cercle idéal, fait uniquement de la conception simultanée, par l'esprit, de certains rapports caractéristiques. On ne peut même pas, à proprement parler, le comparer à cet individu factice, à ce « type » que constitue, par exemple, un personnage de roman, lui aussi assemblage de certaines qualités, qui, quoique d'une tout autre espèce, n'en sont pas moins réunies par l'activité spirituelle de l'écrivain ; type qui, apparemment, peut être considéré à la fois comme un « concept », une « notion », et un individu. En effet, les qualités que l'on peut concevoir ajoutées aux caractéristiques sans que, pour cela, le « type » s'évanouisse, sont, quoiqu'il en soit, du même ordre que ces dernières ; ce sont toujours, dirons-nous, des qualités psychologiques, et, partant, elles déterminent un individu — un « échantillon » du « type » ou de la « notion », — psychologiquement nouveau jusqu'à un certain point, sans qu'il cesse d'être représentatif du type. Il le faut, car la nature du « domaine psychologique » est tel que, s'il en était autrement, le dit type cesserait, du fait même de sa rigidité, de lui appartenir. Tout au contraire, les qualités qui peuvent, dans un cercle individuel, par exemple, ne pas faire partie de la compréhension de la « notion de cercle », sont des dimensions, et non des rapports, en d'autres termes, ne sont pas du même ordre que les « qualités » caractéristiques groupées en un tout par la définition de cette figure. Tout ce qui est « rapport », c'est-à-dire tout ce qui *mathématiquement* constitue le cercle, se retrouve dans tout cercle ; et, inversement, tout ce qui fait l'existence de chaque cercle individuel, *en tant que « cercle »*, *objet mathématique* (ou « notion » mathématique, si l'on préfère ; cela revient au même), n'est autre que ce qui, strictement, compose la compréhension du cercle. Voilà pourquoi, au lieu de dire que la définition mathématique nous donne le moyen de concevoir un « échantillon » d'une notion (11), un « objet idéal donnant au concept un minimum d'extension » (12), mais, logiquement distinct de lui, nous aurions pu, — nous aurions dû, — semble-t-il, dire

(11) Voir plus haut, pp. 419-421.

(12) L. Brunschvicg, « La Modalité du Jugement, p. 9.

tout simplement, comme dans nos chapitres précédents concernant la notion, qu'elle permet de concevoir la notion elle-même. Et nous aurions, apparemment, été fidèles à la pensée de l'auteur, pour qui la distinction logique entre le concept et l'objet auquel il s'applique, se réduit, il y a tout lieu de le croire, à une distinction purement verbale, quand, comme c'est ici le cas, en dehors de l'existence qu'ils reçoivent de l'esprit en tant qu'« êtres de raison », les objets en question, n'en admettent pas d'autre ; quand, du point de vue auquel on se place (comme ici du point de vue *mathématique*), il n'y a aucune différence entre concevoir un « objet » auquel le concept s'applique, et donner naissance à ce concept, du fait que celui-ci est absolument rigiureux, — « être de raison », et non d'imagination, ni abstraction tirée d'êtres naturels, — et que, dans un objet qui n'existe que pour lui fournir la plus petite extension qu'un concept puisse avoir, toutes les particularités, qui découlent nécessairement de la définition, ne sont autres que celles dont l'affirmation simultanée, forme, en fait, l'existence du concept lui-même.

Mais une autre difficulté paraît surgir. Nous avons trouvé, n'est-il pas vrai, l'essence du concept dans le rapport, immédiatement perçu à l'intérieur de celui-ci, de l'attribut au sujet ; c'est là, comme dit l'auteur, l'« acte constitutif du concept » (13). Mais on peut se demander si le rapport, dont la perception est un jugement, ne serait pas, par nature, toujours identique à lui-même, car, enfin, « au point de vue logique, la copule est une et identique : est » (14), et le jugement, comme nous l'avons déjà vu, c'est « l'acte qui pose la copule » (15). Et, dans ces conditions, comment pourrait-il être question de concepts ou notions « simples », et de notions qui ne le sont pas ?

Il semble que, pour répondre à cette question, une distinction soit à faire. Quand M. Brunschvicg dit que c'est par un rapport, auquel il est postérieur, que le concept se trouve constitué, il n'a pas en vue autre chose que ce rapport d'attribut à sujet de la forme A est A, l'homme est homme (ou le cercle est cercle), dont il est à plusieurs reprises question dans la première partie de son ouvrage sur la Modalité du

(13) **L. Brunschvicg.** Même ouvrage, p. 19 (déjà cité).
(14) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 13.
(15) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 15.

Jugement. Car, c'est lui qui, en quelque sorte, donne au concept son existence logique ; lui qui fait qu'il est concept. Et si, dans le présent essai d'analyse, on ne prenait en considération rien autre que lui, il est probable, en effet, que la distinction des concepts mathématiques « simples », et ceux qui ne le sont pas, pêcherait par absence de base. Mais on est conduit, en dehors de cette perception directe d'un rapport interne, qui fait que le concept est concept, — ou, que la notion est notion — à envisager ce qui fait que les notions se distinguent les unes des autres ; ce qui leur donne, pourrait-on dire, leur « individualité », ce qui leur constitue, si l'on peut ainsi s'exprimer, une « matière » — ce mot étant pris ici, simplement, par opposition à la « forme », dans le sens de principe d'individuation. Or, cela, il semble que ce ne puisse être que ce qui est exprimé par leur définition. L'acte qui pose que le cercle est cercle peut être constitutif de cette notion en tant qu'elle entre dans la catégorie logique, dans la « classe » des concepts, que M. Brunschvicg détermine par ce moyen. Mais, mathématiquement, et, disons plus, rationnellement, cet acte tient sa signification à un ensemble d'actes, à un « groupement de qualités » (16), antérieur à lui, et tel que, si nous en avons une idée nette, nous savons ce que nous voulons dire en disant que « le cercle est cercle » ; ensemble d'actes, groupement de qualités que la définition du cercle suffit à déterminer, mais qu'il n'est pas possible de préciser en dehors d'elle. Dans ces conditions, l'affirmation que le « cercle est cercle », en dehors du fait qu'elle constitue la perception d'un rapport, marquée par la copule, entre un sujet (cercle) et un attribut (cercle), en somme, indéterminés l'un et l'autre, signifie : « ce que je pense (c'est-à-dire, le cercle), est, ce qui se pense de la manière que l'on sait », — en d'autres termes, est le «-schème » dont la loi de formation n'est autre que la définition que l'on donne, du cercle. Le mot « cercle » est là pour rappeler de quelle définition il s'agit.

C'est là ce que M. Brunschvicg semble avoir voulu exprimer, en écrivant que « l'acte simple du jugement ne contient pas une détermination expresse de l'extension du sujet ; cette détermination ne serait obtenue que par un jugement ulté-

(16) L. Brunschvicg. « La Modalité du Jugement, p. 9.

rieur » (17). En effet, c'est, pour lui, la définition qui, par la détermination d'un objet idéal, crée au concept mathématique, au concept le plus parfait, « en pure compréhension », un minimum d'extension, comme nous l'avons vu un peu plus haut. Et c'est cet objet idéal qui, comme nous le disions, se confond avec chaque notion mathématique individuelle, parce que, vu l'indétermination de l'acte qui pose le rapport interne, constitutif — logiquement — de la notion, quant à la signification mathématique de l'attribut et du sujet si rigoureusement unis, il est impossible de concevoir cette notion autrement qu'en le concevant, lui. Ce qui porte à croire que, *mathématiquement,* les notions sont plus ou moins simples suivant leur définition, suivant, c'est-à-dire, les « jugements ultérieurs » qui, en elles, s'ajoutent à l'« acte simple » qui consiste à affirmer qu'elles sont elles-mêmes, acte qui, lui, se retrouvant identique dans tout concept, ne saurait, par conséquent, apporter entre eux aucune distinction. Ceci nous ramène à la distinction, déjà faite, pour ce qui est du raisonnement mathématique au chapitre précédent, entre le point de vue strictement logique, et le point de vue rationnel, la mathématique étant elle, du domaine du rationnel, et non pas, exclusivement, de celui de la logique pure — et la « simplicité mathématique » devant, il s'entend, se chercher elle aussi, dans ce domaine. Car, pour celui qui analyse le concept en pur logicien, et en cherche à déterminer l'essence, il n'existe que l'acte qui pose le rapport, interne, antérieur à lui, et par lequel il est constitué ; et cet acte, si l'on ne prend pas souci des termes du rapport, peut, en effet, être considéré le même dans tous les cas, — y compris dans celui des concepts, non mathématiques. La loi de formation particulière par laquelle ils se déterminent — se « définissent » — n'intervenant pas, il n'y a, en effet, pas moyen de les distinguer. Mais, pour M. Brunschvicg, pour qui le point de vue rationnel prime, non seulement, à cet acte, il s'en ajoute d'autres, précisant la manière dont l'esprit interprêtera l'affirmation pure qui est, en lui, exprimée, mais ce sont eux qui donnent, mathématiquement, à la notion son vrai sens, qui en font ce « schème », cette « connexion organique » à laquelle elle se réduit, mais sans perdre rien de son

(17) L. Brunschvicg. Même ouvrage, p. 13.

individualité — bien au contraire ; — c'est, en particulier, d'eux, que dépend sa plus ou moins grande simplicité.

Ces actes, ce sont des jugements. Ceci est important. On ne peut pas dire que le concept, en tant qu'élément logique, réduit au rapport interne qui en forme l'essence, ne soit pas aussi un jugement, ou, au moins, le produit d'un jugement. Car, si juger c'est poser un rapport, « concevoir, c'est juger » (18). M. Brunschvicg le dit bien. Mais, c'est, pour ainsi dire, un jugement réduit, à sa plus simple expression. Et la place plus grande, incontestablement, donnée par l'auteur, au point de vue mathématique, à ces jugements qui forment la définition d'une notion — jugements, eux, qui en entraînent d'autres et qui en supposent d'autres, — est, dans sa propre philosophie scientifique, une illustration de cette « primauté du jugement sur le concept » (19), qu'il ne cesse d'appuyer dès la « Modalité du Jugement », dans la théorie du concept elle-même, comme nous venons de le rappeler, et, qui apparaît à ses yeux « le trait le plus significatif quoique le plus rarement reconnu ou le plus rarement utilisé de l'intellectualisme moderne » (20). D'ailleurs, il affirme lui-même qu'« il n'y a pas de concepts mathématiques, il n'y a que des jugements» (21). Et c'est en la tenant pour une synthèse de de jugements (différente, il s'entend, de celle que nous avons trouvée à la base du raisonnement), qu'il précise ce qu'est, pour lui, l'existence mathématique. « La nécessité de la loi intérieure qui préside à la formation des jugements mathématiques, suffit pour mettre leur valeur au-dessus des atteintes du scepticisme ; la synthèse de deux jugements intelligibles, celui qui définit l'opération constitutive de la racine, et celui qui définit l'opération constitutive du nombre négatif, conférera *l'existence mathématique* à la quantité imaginaire, qui semble pourtant le symbole de l'impossibilité radicale. C'est que la science mathématique se définit par sa forme, non par son objet ; elle est indépendante, indifférente, si l'on veut, quant à la réalité de son objet » (22). En parlant, comme il le fait dans d'autres passages, « d'objets mathé-

(18) **L. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement », p. 8.
(19) **L. Brunschvicg**. « Les étapes de la Philosophie mathématique », p. 550.
(20) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 550.
(21) **L. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement, p. 152.
(22) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 152.

matiques, d'objets idéaux », l'auteur entend, évidemment des « schèmes » dont les contours et les lignes principales sont tracés, pour ainsi dire, par un certain nombre de jugements, dont tout, en eux, ensuite, dépend. Ces jugements sont ceux qui entrent dans leur définition ce qui a fait dire encore a l'auteur que « l'objet arithmétique » — et il aurait pu dans l'esprit de sa philosophie ajouter : l'objet mathématique, d'une façon générale, — s'« épuise dans la loi de sa définition » (23).

Il paraît donc naturel de nous poser la question : Qu'est-ce, pour M. Brunschvicg, qu'un jugement simple ?

Nous avons vu qu'il nomme « un acte simple », ce jugement rudimentaire qui sert de fondement au concept, et qui laisse planer sur ses termes la plus grande indétermination, la détermination n'en pouvant être obtenue qu'à l'aide d'autres jugements. Mais *en quoi,* cet acte-là, est-il simple ? Ceci est à élucider, avant que nous nous demandions comment une notion, un objet mathématique dont l'existence n'est autre que celle, à lui conférée, par le ou les jugements dont l'affirmation simultanée constitue sa définition, peut, lui, être simple. Or, l'auteur répond à la première de ces questions sans aucune équivoque, et de façon, semble-t-il, à nous mettre sur la voie qui doit nous faire trouver la solution de la deuxième, conformément à l'esprit de sa philosophie. « Nous n'acceptons pas, dit-il, comme un acte simple, le jugement qui impliquerait, comme sa condition et comme son élément, un jugement antérieur » (24). Si donc, le jugement qui sert au concept de base, est tel, c'est qu'il jaillit immédiatement de l'esprit, sans que rien l'y précède, ou, du moins, qu'il nous apparaît avec ce comportement si nous nous plaçons strictement au point de vue logique, sans faire intervenir d'autres considérations que celle de l'essence du concept, par conséquent si nous séparons celui-ci de l'objet auquel il s'applique.

Si, partant de là, on admet aussi cette idée que les notions, tiennent leur existence mathématique des jugements dont leur définition forme une synthèse, on est conduit à penser que, plus ces jugements sont *en petit nombre,* et moins chacun d'eux suppose de jugements antérieurs « comme sa condition et comme son élément », et plus la notion est simple

(23) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 147.
(24) **L. Brunschvicg.** « La Modalité du Jugement », p. 11.

plus, en effet, alors, l'activité de l'esprit qui la crée se rapproche de ce qu'elle serait si sa manifestation se bornait, en tout, à l'affirmation d'un rapport du type « le cercle est cercle », comme c'est le cas dans le concept ; de ce qu'elle serait, en d'autres termes, dans un acte que l'auteur qualifie de « simple ». Et, il semble que l'on soit conduit à la même conclusion si, d'une part, on se rappelle que, pour l'intellectualisme mathématique — qui est la doctrine de M. Brunschvicg, — l'ordre logique, est le produit du progrès intellectuel, la constitution des formes de la science à venir, non contenues dans celles de la science déjà faite, révélant, un dynamisme originel dont l'élan se prolonge par la génération synthétique de notions de plus en plus compliquées (25), et si, d'autre part, on s'en rapporte à ce que dit ailleurs l'auteur, des définitions qui constituent les notions mathématiques numériques et de leur ordre de succession : « C'est engendrer 5, écrit-il, que de le poser comme équivalent à $4 + 1$; cette relation, affirmée dans le jugement, fait toute sa réalité. Et 4, à son tour, sera formé d'un jugement de même nature. En fin de compte, la série des définitions fondamentales de l'arithmétique, se ramène à un système formé de jugements, qui peuvent être conçus comme intérieurs les uns aux autres ; à partir de l'unité, chacun de ces jugements est déterminé par le fait qu'il contient les précédents. Ainsi il n'y a rien dans ces jugements qui les diversifie, si ce n'est qu'ils correspondent chacun à un acte nouveau de l'esprit. L'ordre idéal de leur succession est exactement tout ce qui les constitue » (26).

Ces « définitions fondamentales de l'arithmétique » et les notions qu'elles posent, sont, comme celles que la mathématique se crée à mesure qu'elle « avance » et auxquelles il vient d'être fait allusion, plus haut, de plus en plus compliquées, à partir de l'unité. En effet, la notion d'unité peut bien être « le terme de l'abstraction numérique » (27), c'est-à-dire que, ce peut bien être, en fait, *historiquement,* le dernier nombre dont on se soit avisé d'isoler l'idée en tant que nombre. Cela n'empêche pas que *mathématiquement,* ce soit la

(25) **L. Brunschvicg**. « Les étapes de la Philosophie mathématique », p. 567.

(26) **L. Brunschvicg**. « La Modalité du Jugement », p. 147.

(27) **L. Brunschvicg**. « Les Etapes de la Philosophie mathématique », p. 479.

notion numérique la plus simple. « Le jugement d'existence réduit à son principe simple et un, l'acte qui pose l'objet : voilà ce que c'est que l'unité numérique » (28) dit M. Brunschvicg. Et chacun des jugements en question (chacune des définitions numériques), contenant, supposant comme sa condition les jugements précédents, à partir du premier, ne peut que s'éloigner de plus en plus de la simplicité idéale que réalise celui-ci.

C'est pour la même raison que l'auteur met en relief la complexité croissante des notions — ainsi que du symbolisme qu'exige leur représentation — du nombre entier à la quantité incommensurable, en passant par le nombre fractionnaire. « La moindre démarche de l'arithmétique en dehors du calcul des entiers positifs, par exemple le partage d'un entier en deux ou en trois parties, suffira donc à faire évanouir la relation du sujet et de l'objet qui a été le principe et la garantie du savoir humain. De la sphère de réalité on tombe dans la région des symboles » (29). Mais les notions que ces symboles représentent, nécessitent pour être conçues, toutes les démarches de l'esprit — avec la base expérimentale qu'elles comportent, comme nous l'avons vu, — qu'avaient au préalable exigé les entiers. Parmi les jugements simultanés qui les constituent en tant que concepts mathématiques, il en est qui admettent, comme les conditionnant, les jugements qui avaient servi à bâtir ce « schème » qu'est la notion de nombre entier. Si l'on veut, on peut fort bien concevoir le nombre entier, sans avoir une idée des fractions, tandis que, pour concevoir un nombre fractionnaire, il faut « savoir ce que c'est qu'un entier », c'est-à-dire, s'en être assimilé la notion. C'est pour cela, — c'est en cela — que la notion de nombre entier est plus simple. Et, quand, de l'étude des fractions, on passe aux quantités incommensurables, qui « par leur définition même excluent toute représentation de rapports par des nombres ou par des fractions »... « le problème sera plus complexe que le problème relatif aux fractions ; mais la solution sera de même nature, elle exigera seulement la constitution d'un symbolisme plus compliqué, symbolisme du second degré. En effet, dans la fraction $\frac{b}{a}$, tant que les ter-

(28) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 479.
(29) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 350.

mes sont commensurables, b et a sont des nombres ; il n'en est plus de même dans l'hypothèse de l'incommensurabilité. Il n'existe plus de rapport entre les quantités b et a ; « mais (30) un rapport existe toujours entre l'une d'elles, soit a, et une autre quantité $b \pm \varepsilon$ variable, que l'on peut toujours supposer différente de b, de moins que d'une quantité assignée, quelque petite que soit cette dernière. Les rapports de la forme $\frac{b}{a}$ seront le symbole des rapports possibles $\frac{b \pm \varepsilon}{a}$ » (31). En d'autres termes : la définition de la notion de nombre fractionnaire que symbolise $\frac{r}{b}$, représentant « r unités b fois moindres que celles qui servent à estimer la quantité r, dividende proposé » (32), suppose celle du nombre entier — sans quoi « r unités » ne signifierait rien, ni « b fois » non plus. Et de même, celle de la quantité incommensurable suppose la connaissance de ce que c'est qu'une fraction, dont les termes, commensurables, sont des nombres entiers. La complexité croissante de ces notions vient de ce que chacune tient son existence mathématique, en partie de jugements qui supposent, antérieurement à eux, comme condition de leur concevabilité, tous les jugements qui font de la précédente notion un objet de la pensée mathématique.

De la même manière, et, peut-on dire, semble-t-il, pour une raison analogue, la circonférence est « la plus simple des courbes » (33) ; une relation, établie entre deux nombres seulement, est dite « une relation simple » (34) ; la notion euclidienne, enfin, de l'espace, est « intellectuellement la plus simple » (35), parmi les notions d'espace possibles, — pour ne prendre, au hasard, que trois exemples, aussi différents que possible, de notions mathématiques. Ceci demande quelques explications, car le parallélisme entre ces comparaisons, et

---

(30) **L. Renouvier.** « Premier Essai », p. 402, cité par Brunschvicg.

(31) **L. Brunschvicg.** « Les Etapes de la Philosophie mathématique », pp. 350-51.

(32) **Renouvier.** « Premier Essai », p. 397, cité par L. Brunschvicg, « Etapes de la Philosophie mathématique », p. 350.

(33) **L. Brunschvicg.** « Les Etapes de la Philosophie mathématique », p. 180.

(34) **L. Brunschvicg.** Même ouvrage, p. 416.

(35) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 520.

celle, faite plus haut entre les différentes sortes de quantités arithmétiques, peut ne pas être si frappant qu'il éclate au premier abord. On comprend que, pour concevoir une relation à plus de deux termes, il soit nécessaire de concevoir une relation de deux termes, car, poser une relation de ce type plus « complexe », se ramène, au fond, à poser simultanément plusieurs relations binaires, ayant certains de leurs termes en commun. Ce travail constructif de l'esprit, consiste en une série de jugements simultanés, dont chacun, par nature, est analogue, identique même, à celui que l'on forme en établissant une relation binaire, c'est-à-dire « simple ». C'est, en somme, le même travail, le même acte, répété, en même temps, plusieurs fois, tandis que, par exemple, dans le passage de la notion de nombre entier à celle de fraction, il s'agissait, comme nous l'avons vu, aux jugements qui constituaient cette notion d'entier (quels qu'ils fussent), d'ajouter des jugements nouveaux, qui donnaient à la nouvelle notion formée, peut-on dire, un caractère qualitativement différent. Mais, d'une façon comme de l'autre, il s'agit toujours, pour la notion plus « complexe », de comprendre : les jugements auxquels la notion la plus simple, qui lui est comparée, doit son être en tant que telle, et *d'autres jugements*, en plus ; d'être une synthèse de ces jugements-là, et de ceux-ci.

Il en est de même de l'exemple de la circonférence, comparée à une autre courbe — du second degré ou de degré supérieur, car les « courbes » du premier degré sont des droites, et ne sont pas ici en cause. — qu'on en conçoive la notion du point de vue purement algébrique, ou du point de vue géométrique. En effet, algébriquement, 1° c'est une courbe du second degré, donc, par cela seul déjà, *plus simple* que celles de degré supérieur. A chaque degré nouveau n, en effet, l'équation d'une courbe s'enrichit au moins d'un élément en x^n, ce qui, dans la notion de ladite courbe à laquelle l'équation sert en quelque sorte de définition, ajoute aux rapports constitutifs déjà conçus, une série de nouveaux rapports, ou (pour conserver le langage jusqu'ici employé par l'auteur), aux jugements mathématiques correspondants de nouveaux jugements ; 2° l'équation qui la représente, $x^2 + y^2 = a^2$, ou, d'une manière générale (sans que le centre soit à l'origine) : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$, ou encore, $A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (si l'on pose $x_0 =$

$-\frac{D}{A}$, $y_0 = -\frac{E}{A}$, $a^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}$), n'est autre que l'équation générale du second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

à laquelle manquent les termes rectangles, et dont les coefficients de x^2 et de y^2, sont égaux. Et il n'y a pas de courbe du second degré dont on puisse ramener l'équation à la somme d'un plus petit nombre d'éléments de l'équation générale — (si, en effet, on supprimait aussi les termes en x^2, l'équation cesserait d'être du second degré pour devenir du premier, c'est-à-dire qu'elle représenterait une « droite » et non ce que l'auteur appelle une « courbe » quand il déclare le cercle la plus simple d'entre elles). De sorte que, la notion algébrique de toute courbe du second degré (et de degré supérieur à fortiori), est formée de tous les rapports qui entrent dans la conception de celle de cercle, et d'autres encore, qui s'y ajoutent. Ces autres peuvent être conçus à part, à condition que l'esprit ne vise pas à donner naissance à la notion d'une « courbe » au sens où l'auteur prend ce mot, et cela empêche le parallélisme entre la présente comparaison et celle des nombres entiers et des nombres fractionnaires, faite plus haut, d'être parfait. Mais, de toute façon, dès que l'on pense une « courbe », c'est que l'on a au moins posé, les éléments algébriques du cercle, c'est qu'on a fait une certaine synthèse de jugements mathématiques comprenant, au moins, tous ceux auxquels la notion représentée symboliquement par $x^2 + y^2 = a^2$, doit son « existence ». Ou, pour s'exprimer différemment, la notion de n'importe quelle « courbe » (c'est-à-dire courbe du second degré ou de degré supérieur) implique, rationnellement la possibilité, — c'est-à-dire l'existence, car il s'agit ici d'existence idéale, — de celle de cercle ; du point de vue algébrique, celle-ci lui est antérieure, c'est-à-dire, d'après l'auteur, elle est plus simple. — Si nous voulions reprendre la même comparaison en nous plaçant, maintenant, sur le terrain de la géométrie, nous aboutirions à justifier la simplicité attribuée au cercle, d'une façon analogue, quoique, peut-être, un peu moins frappante. Géométriquement, le cercle est, comme on le sait, le lieu des points à égale distance d'un point fixe ; c'est-à-dire que, pour que la notion en existe, pour que l'on puisse la concevoir, il faut et il suffit que l'on en connaisse un seul élément, que l'on pose un seul des jugements mathématiques qui le composent, à eux tous ; et ce

seul jugement exprime une relation d'égalité, si bien qu'on n'a même pas besoin, antérieurement à lui, de concevoir autre chose qu'un seul terme : celui de distance entre deux points. Les définitions géométriques des autres « courbes » contiennent cet élément, c'est-à-dire que, parmi les jugements mathématiques dont chacune d'elles compose une synthèse, il y en a un qui pose la distance entre deux points, l'un de ces points étant, par hypothèse, fixe.

Bornons-nous à rappeler, pour ce qui concerne les courbes autres que le cercle, que « le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe, a une valeur constante e, est une ellipse, si $e < 1$, une hyperbole, si $e > 1$, une parabole, si $e = 1$. Le point fixe donné est un foyer de la courbe; et la droite fixe donnée est la directrice qui correspond à ce foyer » (36). Si, de là, nous voulions passer à d'autres courbes, nous aurions affaire à des définitions plus complexes, pour exactement la même raison pour laquelle celles-ci sont, comme nous allons le voir, plus complexes que celle du cercle. Elles le sont, en effet, d'après ce que nous avons vu précédemment, du fait que, il ne s'agit plus seulement, en elles, de la constance du rapport des distances de points à un point fixe, mais de la constance du rapport des distances à un point fixe, d'une part, et *à une droite fixe,* de l'autre, si bien que, par cela seul, dans chacune de ces trois notions, aux jugements mathématiques impliqués dans la notion du cercle, il s'en ajoute d'autres, — d'autres auxquels elles doivent, justement, d'être par rapport au cercle, des notions nouvelles.

De plus, si on admet que l'égalité, cas-limite de l'inégalité qui tend à s'annuler, est, en tant que rapport plus simple qu'elle, parce qu'elle permet en quelque sorte de confondre ce que l'inégalité oblige à distingueur, parce que, tout ce qui est vrai d'un certain terme est aussi vrai du terme qui lui est « égal », on peut, semble-t-il dire que, parmi ces notions elles-mêmes, la parabole est, mathématiquement, la plus simple, d'après l'auteur ; car, dire que le rapport des distances de ses points à un point fixe et à une droite fixe est 1, c'est-à-dire que toutes ces distances, sont égales, deux à deux, ce qui fait que, d'un certain point de vue, il n'y a pas lieu de

(36) **E. Vessiot et P. Montel.** « Cours de Mathématiques générales », 1re partie, p. 333.

les concevoir séparément, et que, de ce même point de vue, il entre dans la notion d'ellipse et celle d'hyperbole, tous les jugements mathématiques dont la synthèse donne la définition de la parabole, *plus*, ceux que suppose la non égalité des distance respectives des points de la courbe, au point fixe d'une part, à la droite fixe d'autre part — (et cela, bien que la seule chose prise en considération, ici, dans les trois définitions ainsi que dans celle du cercle, soit le rapport des distances, et non les distances elles-mêmes ; car ce rapport, suivant ce qu'il est, peut admettre comme sa condition plus ou moins de jugements sur ses termes). Mais nous n'entrerons pas dans la discussion que cette digression sur l'égalité pourrait ouvrir.

Quelque différentes que puissent être les notions comparées, des précédentes, c'est toujours au nom de la même conception de la simplicité mathématique, que M. Brunschvicg déclare la notion d'espace euclidien, « plus simple, intellectuellement », que celles d'espace riemannien ou d'espace lobatschewskien. L'espace euclidien, que l'auteur considère comme un « cas-limite » (37) des deux autres, — ou, si l'on préfère, un cas particulier de la notion plus générale d'espace, — a sur ces derniers un privilège de simplicité, un peu, semble-t-il, du même ordre, que celui que possède par exemple, le cercle sur l'ellipse. Du fait même du « passage à la limite », certains éléments constitutifs, caractéristiques de ces notions, disparaissent ; certains jugements qui entraient dans la « synthèse de jugements » qu'elles formaient, sont absents, de cette synthèse-ci ; et, par là même, la possibilité de concevoir l'espace comme riemannien ou lobatschewskien suppose la possibilité de le concevoir comme euclidien, alors que la réciproque de ceci ne serait pas vraie, c'est-à-dire alors que l'inverse n'a pas lieu.

Pour ne pas nous étendre davantage et nous répéter, nous pouvons, à présent, semble-t-il dire que, de quelque façon que nous nous y prenions et quel que soit l'exemple auquel nous nous rapportions pour essayer de comprendre la pensée de M. Brunschvicg au sujet de la simplicité des notions mathématiques, nous aboutissons à la même affirmation, déjà formulée plus haut, à savoir que : moins les jugements mathé-

(37) L. Brunschvicg. « Les Etapes de la Philosophie mathématique », p. 523.

matiques qui composent une notion sont nombreux, et moins ils admettent, chacun, de jugements antérieurs qui les conditionnent, et plus cette notion est près, par sa nature, de l'« acte simple » de juger, dont l'appréhension du rapport de sujet à attribut, à l'intérieur même du concept, fournit un exemple, et plus, en un mot, cette notion est « simple ». Il en résulte que, le cas dans lequel on puisse le mieux affirmer qu'une notion mathématique est plus simple qu'une autre, — le seul cas dans lequel il semble qu'on puisse le faire avec une pleine et entière certitude, — est celui où cette autre notion est constituée par un certain nombre de jugements, desquels, font partie tous les jugements qui forment l'existence de la première, ou, parmi lesquels il en est de tels, qu'il faille nécessairement, antérieurement à eux, poser tous les jugements constitutifs de la première. C'est ainsi qu'il est aisé d'affirmer en toute certitude, parmi des notions qui dérivent l'une de l'autre par additions progressives, à leur être, de rapports nouveaux, c'est-à-dire de jugements nouveaux, laquelle est la plus simple. On peut même, jusqu'à un certain point, les classer par ordre de simplicité mathématique. Une notion dérivée d'une autre, sera toujours moins simple que cette autre. Et, parmi les notions de la même catégorie, — notions de « courbe », notions d'espace, notions de « nombre », au sens large, notions de polygone, etc., — les plus simples sont, mathématiquement, celles qui, rationnellement antérieures aux autres, constituent, du point de vue de la notion plus générale de la catégorie (courbe, espace, nombre, etc.) qui les enveloppe toutes, les « cas spéciaux privilégiés ». Nous rejoignons par là, semble-t-il, ce que nous avons vu dans l'un des chapitres précédents, concernant la conception « pragmatiste » de la simplicité mathématique, telle que la représente M. E. Goblot. Mais il serait, d'autre part, très difficile, sinon presque toujours totalement illusoire, de vouloir comparer entre elles deux notions mathématiques qui ne devraient pas leur existence à des jugements communs, auxquels s'ajouteraient, dans l'une d'elles seulement, des jugements nouveaux ; deux notions qui, en d'autres termes, et, pour employer une métaphore, ne s'emboîteraient pas, en quelque sorte, l'une dans l'autre. C'est, là encore, une remarque à laquelle nous avons déjà été conduits, au cours des chapitres précédents.

Pourtant, elle n'est pas d'une portée absolument générale.

En effet : admettre qu'elle le fût, ce serait admettre qu'il peut y avoir des notions mathématiques plus simples les unes que les autres, mais qu'il ne saurait exister, pour M. Brunschvicg du moins, de notion mathématique simple, — ou compliquée, il s'entend, — sans idée de comparaison ; car, si ces notions simples existent — quelles qu'elles puissent être, — elles ne pourraient, semble-t-il, moins faire, que d'être « plus » simples, que les notions nettement compliquées, quelles que puissent être celle-ci de leur côté. La question qui se pose maintenant est donc celle-ci : y a-t-il, pour l'auteur, des notions mathématiques, simples en dehors de toute comparaison avec d'autres notions, et, si oui, qu'est-ce qui les caractérise à ses yeux ?

A cette question, il semble que l'on puisse tout de suite répondre par l'affirmative. Une seule citation, prouverait que M. Brunschvicg admet, en effet, que point n'est besoin de rapprocher deux notions, pour attribuer, à certaines notions mathématiques, la qualité de simplicité, quand celle-ci, en elles, est particulièrement frappante. Parlant du « nombre entier », par exemple, l'auteur dit que « rien ne répond mieux à l'idéal de la notion claire et distincte, de *l'élément intellectuel simple* » (38), et il ajoute, d'après Cournot : « Un nombre est une collection ou un groupe d'unités, décomposable en d'autres groupes, ou susceptible d'être formé de diverses manières par la réunion d'autres groupes. De là, les idées de l'addition et de la soustraction des nombres, idées si simples qu'il suffit de les indiquer » (39). Et si ceci semblait encore vague, on pourrait se rappeler ce que M. Brunschvicg écrit, non plus d'une notion simple, mais, au contraire, d'une notion qui ne l'est pas : « Si précise qu'en soit la formule mathématique, la notion d'énergie n'est pas une notion simple et elle n'est pas formée d'éléments simples ; l'existence d'une force potentielle n'est donnée, ni par l'expérience, car elle échappe, par définition même à toute tentative d'observation, ni non plus par *une vue directe de l'esprit*,

---

(38) **L. Brunschvicg.** « Les Etapes de la Philosophie mathématique », p. 344.

(39) **Cournot.** « De l'Origine et des Limites de la Correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie », p. 3. Cité par L. Brunschvicg, « E. P. M. », p. 344.

car l'idée d'une puissance, c'est-à-dire, de ce qui existe sans se manifester, n'est pas une *idée claire* » (40).

On pourrait objecter que l'idée d'énergie est ici mal choisie, du fait que ce n'est pas une notion purement mathématique. Cela peut être vrai jusqu'à un certain point. Mais aussi, l'auteur a-t-il soin de distinguer les deux raisons qui l'empêchent de la considérer comme une notion simple. En tant qu'elle serait liée à une réalité extérieure, elle n'est pas simple du fait qu'elle n'est pas le résultat immédiat de l'observation ; du fait que, par rapport aux « données expérimentales » elle constitue un produit d'élaboration intellectuelle suffisamment poussée pour que l'observation originelle n'y paraisse plus. Et c'est, apparemment, en tant que concept *mathématique*, que la simplicité lui est refusée parce qu'elle ne constitue pas « une vue directe de l'esprit », une « idée claire ».

On le voit, M. Brunschvicg, qui, comme Descartes, considère plus simple qu'une autre, une notion qui sert à « expliquer » cette autre — en d'autres termes, qui est nécessaire à sa conception, par l'esprit ; qui lui est, rationnellement, « antérieure » (41), — fait, comme Descartes encore, semble-t-il, résider la simplicité (du moins en ce qui concerne les notions « mathématiques »), dans l'*idée claire*. Est simple, pour lui, « la relation initiale qui peut être saisie dans l'acte un et indivisible de l'intuition » (42) ; est simple, l'idée qui est *directement saisie par l'esprit* ; qui a, de ce fait, pour reprendre une expression cartésienne, employée par lui, un caractère d'« absolu » (43).

Il ne s'agit pas, bien entendu, dans l'acte ou les actes que constitue la conception d'une notion par l'intelligence, de tenir compte de tout le travail sous-terrain — inconscient, — qui peut avoir été, lui, très long et très pénible, même s'il aboutit à un résultat remarquable par sa simplicité. Des notions comme celle de nombre entier, considérée par l'auteur comme « l'idéal de la notion claire et distincte » comme nous le rappelions tantôt, cachent, sous leur simplicité « la com-

(40) **L. Brunschvicg**. « Introduction à la Vie de l'Esprit », p. 81.
(41) **L. Brunschvicg**. « Les Etapes de la Philosophie mathématique », p. 112.
(42) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 108.
(43) **L. Brunschvicg**. Idem, p. 108.

plexité des efforts qui en ont préparé l'avènement » (44) ; de même, la notion d'unité, la plus simple des notions de nombres, n'en reste pas moins, en fait, *historiquement,* « la notion qui apparaît la dernière dans le développement de la pensée arithmétique, parce qu'elle marque le terme extrême de l'abstraction numérique » (45). Cela ne l'empêche pas d'être simple, car, comme nous l'avons vu plus haut (46), elle se réduit au pur jugement d'existence, « à l'acte qui pose l'objet, en son principe simple et un » (47). L'ordre rationnel, en effet — le seul qui compte quand il s'agit de simplicité mathématique, qui est, pour l'auteur, comme nous l'avons dit, une notion rationnelle, — s'il lui arrive quelquefois de suivre l'ordre historique, ne se confond pas forcément avec lui. Et, dans l'appréciation de la simplicité d'une notion mathématique, prise en elle-même, indépendamment des notions auxquelles on pourrait la comparer, une seule chose, donc, demande à être prise en considération : c'est le fait, pour la notion, d'être, ou non, l'effet d'une « *vue directe de l'esprit* » ; d'être, ou non, le résultat d'un acte unique et « indivisible », que rien, logiquement, ne conditionne, mais dans lequel, la puissance unificatrice, caractéristique de l'intelligence, effaçant tout le processus physiologique, expérimental, sans doute, et psychologique aussi, qui lui a permis de se manifester, trouve une expression si adéquate, qu'il se suffise, en quelque sorte, à soi-même.

Il semble superflu de dire, que, conçue de cette façon, une notion mathématique vraiement simple ne se définit pas ; car toute définition est déjà une « synthèse » de jugements ; la notion simple, elle, au terme de sa perfection, se réduit à un seul jugement. C'est, en somme, le concept réduit au rapport interne qui le constitue, avons-nous vu, en tant que concept, et dont, sans le secours d'aucune explication, on appréhenderait l'objet, directement ; c'est, en d'autres termes, le résultat d'une « *intuition* ». On ne voit pas bien comment on éviterait ici, d'employer ce mot.

Ceci nous rapproche, dans une certaine mesure, de H.

---

(44) **L. Brunschvicg.** Idem, p. 478.

(45) **L. Brunschvicg.** « Les Etapes de la Philosophie mathématique », p. 479.

(46) Voir plus haut, p. 428.

(47) **L. Brunschvicg.** « Les Etapes de la Philosophie mathématique », p. 479 (déjà cité).

Poincaré. Parmi les remarques que cet auteur fait sur les définitions que les Logisticiens, dans leur souci de rigueur, se sont efforcés de donner des notions mathématiques, semble-t-il les plus intuitives, et entre autres celles du « nombre » et de l'unité, il y a que ces définitions contiennent toutes des pétitions de principes. « Il est impossible — en effet — de donner une définition sans énoncer une phrase, et difficile d'énoncer une phrase sans y mettre un nom de nombre, ou au moins le mot plusieurs, ou au moins un mot au pluriel » (48). L'ironie même avec laquelle il parle, par exemple, de la définition laborieuse que Burali-Forti donne du nombre 1. « définition éminemment propre à donner une idée du nombre 1 aux personnes qui n'en auraient jamais entendu parler » (49), suffit à montrer que, pour lui, aucune définition n'est nécessaire pour introduire dans l'arithmétique ces notions fondamentales de nombre et d'unité, sur lesquelles elle repose tout entière, et que, ces notions sont *claires par elles-mêmes*. Et ceci, — est-il besoin d'y insister longtemps ? — nous rapproche encore des propos du « Discours de la Méthode », et d'une façon générale, de Descartes, pour qui l'idée « simple », n'est autre que l'idée claire et distincte, l'idée « primitive » qui n'a besoin de s'étayer sur la connaissance d'aucune autre, qui s'impose d'emblée à l'intuition et qui se suffit.

Mais il nous faut répéter, ici la remarque que nous avons déjà faite lors de notre étude du raisonnement mathématique, précédemment. L'intuition dont il s'agit, chez M. Brunschvicg, dans l'appréhension, par l'esprit, d'une notion « simple », pas plus que celle qui permettrait de saisir immédiatement les conclusions dans les prémisses (dans l'acte d'intellection parfait qui tend, à la limite du raisonnement simple, à se substituer à celui-ci) n'est « une intuition passive suspendue à l'existence de son objet » (50). C'est, contrairement à la conception cartésienne, un acte *positif* de l'esprit, qui, pour ainsi dire, crée son objet, un acte d'unification si parfait, si spontané, que les termes « unifiés » sont, en réalité (dans la conscience), confondus. De là vient qu'il est

(48) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 166.

(49) **H. Poincaré.** Même ouvrage, p. 168.

(50) **L. Brunschvicg.** « La Modalité du Jugement », p. 85 (déjà cité).

quelquefois très difficile de les séparer de nouveau par l'analyse. De là vient que, comme le remarque M. Brunschvicg lui-même, la simplicité de certaines notions, en particulier des notions fondamentales de la mathématique, comme celles de nombre, de droite, etc..., cache l'extrême complexité des efforts qui ont, historiquement, amené peu à peu leur avènement. — Ce qui n'empêche pas ces notions de demeurer, *mathématiquement* « simples ».

Ce qui mathématiquement, donc, en fait la simplicité, c'est la frappante unité de l'acte qui les constitue. Et ce qui fait qu'une notion mathématique est plus ou moins simple, c'est qu'elle résulte de l'unification plus ou moins complète de toutes les démarches positives, qui, en fait, indépendamment de la conscience qu'on peut en avoir, forment sa genèse. C'est que *l'intériorisation* réciproque des idées rapprochées dans sa définition, pour reprendre une expression de M. Brunschvicg, se fait plus ou moins *directement*.

Et, si toutes les notions ne sont pas également simples, s'il en est de rationnellement « antérieures » à d'autres, supposant, en apparence un plus petit nombre de jugements (51), cela tient (comme la plus ou moins grande simplicité des raisonnements), à la nature discursive de notre esprit. Il est certain que, pour un esprit affranchi, par définition, de cette discursivité qui empêche le nôtre de saisir, — M. Brunschvicg dirait : de créer, — la vérité d'emblée, pour ce que nous avons appelé, plus haut un « esprit divin », il ne saurait pas y avoir de notions plus ou moins simples, pas plus que de raisonnements plus ou moins simples. Pour une telle faculté d'intuition pure, l'antériorité et la postériorité rationnelles n'existeraient pas ; l'intériorité réciproque de toutes les idées serait un fait banal, actuel, — et non pas une vérité à conquérir plus ou moins péniblement, un terme de la connaissance ; et toutes les notions seraient également, et au même titre, parfaitement simples, et, partant, indéfinissables.

Nous voici ramenés, peu à peu, à une formule assez semblable à celles que nous avions employées à propos de la simplicité des raisonnements, et, en général, des enchaînements mathématiques (52).

Et il n'est pas sans intérêt de constater, chez M. Brunsch-

(51) Voir plus haut, pp. 426, 427.
(52) Voir plus haut, pp. 400, 408, 409, 410.

vicg, un parallélisme particulièrement étroit entre la conception de la simplicité des notions mathématiques, et celle des raisonnements. Ce parallélisme est beaucoup plus étroit que chez les auteurs précédemment étudiés, et cela se conçoit. Il provient, en effet, non seulement de ce que M. Brunschvicg entend, comme ces auteurs, la simplicité mathématique de la même manière, qu'elle lui apparaisse dans les « êtres », les « objets » mathématiques, ou dans ce que nous avons appelé les enchaînements, mais encore de ce qu'il repose, semble-t-il. sur une conception, chez lui *analogue* (encore plus que chez eux), de la structure intime et des notions, et des raisonnements mathématiques, — bien plus, sur une conception, chez lui analogue, de la structure des notions et des raisonnements en général. En d'autres termes, non seulement pour lui comme pour eux, la simplicité mathématique tient, visiblement, au caractère « direct » des notions comme des raisonnements, mais encore. chez lui, la signification de cette rectitude découle naturellement de l'une des idées maîtresses, non seulement de sa philosophie mathématique, mais de sa philosophie en général : de la prédominance du jugement sur le concept. Et cette idée elle-même n'est qu'une conséquence de l'une des vues les plus personnelles et les plus intéressantes de M. Brunschvicg, selon qui, par nature, l'intelligence est, avant tout, une « capacité d'unification ».

Par suite, pour lui, dans le cas de la notion tout comme dans celui du raisonnement, la plus grande simplicité est atteinte quand le travail de l'esprit se rapproche le plus de l'acte d'intuition, de l'appréhension lumineuse et spontanée ; quand l'intelligence, c'est-à-dire, « capacité d'unification », tout en gardant le caractère de discursivité inhérent à sa nature humaine, fait preuve, comme nous le disions plus haut, d'un minimum de discursivité. L'acte qui consiste à concevoir une notion « simple » est même si peu discursif, que l'esprit est incapable de distinguer et de replacer les éléments du processus de pensée qui *logiquement,* devait conduire à la notion conçue (telle par exemple que celle de nombre, de droite, etc.) Au fait, il n'y a pas besoin de les distinguer. Chercher à les distinguer, peut être, du point de vue logique, un exercice curieux. Mais, du point de vue rationnel, c'est un non sens. La notion simple, *claire et distincte,* se suffit telle qu'elle est, puisque l'unité. « principe de toute intellection », est atteinte, en elle, au plus haut degré.

. Mais ceci doit nous faire revenir, en partie semble-t-il, sur ce que nous avons dit plus haut — du moins sur ce que nous avons paru dire. Nous avons, en effet, paru admettre que « plus les jugements, dont la définition d'une notion constitue une synthèse, sont en petit nombre, et moins, aussi, chacun d'eux suppose de jugements antérieurs, comme sa condition et son élément, et plus la notion est simple » (53). Nous avons paru penser que, ce qui rend « complexe » une notion dérivée d'une notion plus simple, c'est qu'elle comporte, qu'elle englobe, tous les jugements dont est faite la signification mathématique de celle-ci, *plus* d'autres (54) ; en un mot, que le caractère « direct » d'une notion claire et distincte, est lié à un petit nombre de jugements, actes d'unification considérés en quelque sorte, comme les « éléments » de la notion.

La notion de nombre entier, antérieure à toutes les notions telles que celles de nombre fractionnaire, nombre irrationnel, nombre imaginaire, etc., comporterait seulement moins de jugements qu'aucune d'elles, dans sa signification. De même la notion de cercle, par rapport à celles des autres courbes du deuxième degré. De même celle d'espace euclidien, par rapport à celles des autres espaces.

Si nous y regardons de plus près, il semble que, si, en effet, des notions, comme celles de nombre irrationnel, ou imaginaire, qui peuvent être considérées comme « postérieures » à celles de nombre entier, parce qu'il est nécessaire de concevoir la dernière pour concevoir les premières, semblent englober dans leur réalité mathématique davantage de jugements, rien, par contre, de tel qu'un nombre de jugements, — ou d'éléments quelconques, — ne saurait, logiquement, justifier la simplicité frappante de la notion d'entier, ou de celle de cercle, ou de droite, ou d'espace euclidien. Ces notions sont simples parce qu'elles sont lumineuses, parce qu'elles donnent à l'esprit une impression particulière de perfection, voisine de celle que lui procure une évidence rationnelle, ou une ligne esthétiquement irréprochable. Et, si elles sont antérieures à d'autres, il est certain qu'un long travail souterrain de l'esprit leur est, à elles-mêmes, antérieur. D'après la vue rapide qui avait d'abord pu sembler la nôtre, elles de-

(53) Voir plus haut, p. 426.
(54) Voir plus haut, pp. 428, 429, 430.

vraient être « moins complexes » que les notions qui leur sont postérieures, et non pas « *simples* ».

N'est-ce pas plutôt que leur simplicité n'est pas la conséquence du *nombre* de jugements qu'elles comportent ou supposent, mais, seulement, le synonyme de leur caractère de rectitude rationnelle, de leur qualité de notions claires et distinctes, parfaitement « unes », et, partant, s'imposant à l'esprit comme des individus absolus ? Et n'est-ce pas, inversement, parce qu'elles frappent l'esprit comme des individus absolus, qu'il est impossible, *rationnellement,* sinon logiquement, de leur assigner des notions « antérieures », et qu'elles semblent, dès l'abord, jaillir d'un jugement spontané, se suffisant à lui-même ? Et si les notions « complexes », supposent, elles, *en plus* de tous les jugements que supposent les simples, dont elles dérivent, d'autres jugements, n'est-ce pas, de même, parce qu'elles sont complexes, c'est-à-dire parce que, l'esprit ne parvient pas à se saisir d'elles d'emblée, comme d'un objet d'intuition claire et distincte ? La véritable simplicité des notions mathématiques comme de toutes les notions, résiderait uniquement dans la capacité de ces notions de s'imposer, ou, comme nous le disions plus haut en parlant de celle des « enchaînements », *d'éclater à l'esprit.* Et toutes les difficultés, toutes les contradictions peut-être, tous les tâtonnements du travail souterrain qui a pu préparer leur conception, — travail que le logicien ne saurait reconstituer tel quel, mais dont il essaye de donner une image intellectualisée quand il parle de la genèse d'une notion « simple », — tout cela, disons-nous, s'efface en une unité organique, profonde, structurelle. Et c'est la perfection de cette unité qui donne à la notion simple tant d'éclat, qui lui permet de se présenter comme un individu absolu, comme un « tout » élémentaire.

Dans la notion « complexe », la notion dérivée, il ne saurait être question de nier l'existence d'une certaine unité profonde sans laquelle la notion ne serait pas cohérente. Mais c'est une unité moins frappante, moins lumineuse, qui ne « saute pas aux yeux » dès l'abord, pourrait-on dire. C'est l'unité d'une composition *à partir* de quelque chose que l'on peut considérer comme le noyau, l'élément fondamental, du nouveau tout.

Au fond, ce qui fait la différence entre une notion simple et une notion complexe, c'est la loi secrète selon laquelle

chacune d'elles est bâtie par l'esprit et, par suite, saisie par lui. C'est le *schème*, autrement dit, autour duquel se groupent les idées qui s'y fondent en une « intériorité » réciproque : le schème de l'unification opérée par l'esprit, lors de cet acte d'intellection, qu'est la conception de chaque notion nouvelle.

Sans doute, cette idée de schème, semble, au premier abord, sous entendre quelque chose de statique qui répugnerait à la philosophie de M. Brunschvicg, qui irait à l'encontre de sa conception, essentiellement « dynamique » de l'intelligence. Nous n'essayons nullement, en l'employant, de nous masquer le caractère de la pensée de l'auteur. Il nous semble seulement qu'en y regardant de plus près la notion de « schème », de « forme », n'est pas aussi incompatible qu'elle pourrait le paraître avec celles d'action, de tension continue, de progrès indéfini qui tiennent, dans la philosophie de l'auteur une place essentielle. Ce que nous appelons le schème inhérent à une notion, c'est la loi de composition d'un édifice rationnel tel que celui que l'esprit construit, quand il pense « un nombre fractionnaire », ou « un carré », ou tel autre « être » mathématique qu'on voudra. C'est, autrement dit, la loi d'action de l'esprit entrain, conformément à sa nature, d'unifier les idées éparses qui servent de matériaux à ses jugements. C'est, en termes plus suggestifs, le rythme de l'esprit dans son élan vers l'*un*, c'est-à-dire, dans chacun de ses progrès. Et, par suite, une interprétation de la simplicité mathématique faisant intervenir l'idée de forme, ne nous paraît pas, en réalité, contraire à l'esprit de l'auteur. Elle semble plutôt éclairer sa pensée, parfois difficile à saisir dans sa souplesse, outre qu'elle a l'avantage de jeter un jour nouveau sur les points communs que peut présenter sa philosophie mathématique avec celle des auteurs que nous avons appelés, plus haut, « subjectivistes ».

CINQUIÈME PARTIE

Conclusions

CHAPITRE XIX

LA CONCLUSION APPARENTE DE CETTE ETUDE : LA NOTION DE SIMPLICITE SE REDUIRAIT, EN MATHEMATIQUES, AU FAIT D'UN PETIT NOMBRE D'ELEMENTS DANS TOUT CE QUI EST « SIMPLE ».

Que tirer de toute cette étude, en ce qui concerne la nature de la simplicité mathématique ? Telle est maintenant la question qui se pose à nous. Car quoique nous soyons loin de penser que cette étude soit complète, nous croyons que la diversité des quelques théories qu'elle embrasse est suffisante pour que la conclusion qui commence à s'en dégager, — si conclusion il y a, — ne puisse, apparemment, qu'être confirmée par l'examen possible de nouvelles philosophies mathématiques.

Qu'avons-nous donc vu, jusqu'à présent ? Nous avons d'abord établi qu'en recherchant la nature de la simplicité mathématique, nous ne nous posions pas un faux problème. La simplicité mathématique n'est pas une notion arbitrairement forgée par la fantaisie du philosophe en quête de subtilités : elle existe. Elle est, pourrait-on dire, une réalité scientifique. Les mathématiciens eux-mêmes, — les seuls à consulter, en l'espèce, — non seulement admettent que leurs démonstrations, leurs constructions, etc., et les notions qui s'y rencontrent sont plus ou moins « simples », mais encore, tant pour ce qui est des démonstrations, que des constructions géométriques, que des formules et des définitions mathématiques en général, ils *recherchent le plus de simplicité possible*. Nous avons vu que la simplicité des « enchaînements » mathématiques, peut fort bien ne pas toujours aller de pair avec celle des notions, que nous avons appelées, encore, des « êtres » ou « objets » mathématiques ; que, parfois même, elle ne s'obtient qu'au prix du sacrifice de celle-ci. En conséquence, nous avons distingué ces deux simplicités,

nous demandant si elles étaient ou non, au fond, de même nature, et nous réservant, pour nous en rendre compte, de les étudier à part. Nous avons aussi, tant dans les enchaînements que dans les notions distingué la possibilité de diverses conceptions de la simplicité ; simplicité d'écriture, simplicité esthétique, simplicité « pratique », qui, d'ailleurs, pourraient coexister.

Puis, nous avons passé en revue trois types de philosophie mathématique, correspondant à trois points de vue différents sur la nature et la signification des mathématiques, et, par suite, sur celle de la simplicité qu'on peut y rencontrer. Nous avons vu les Logisticiens écarter délibérément toute considération historique ou psychologique, et faire des mathématiques un prolongement, en quelque sorte de la Logique pure. Ils s'efforcent d'en aborder les problèmes comme des problèmes de logique, uniquement et voient la simplicité dans les « faits » mathématiques, pris en eux-mêmes. Puis, nous avons envisagé la doctrine de H. Poincaré, qui, comme il le dit lui-même, conssidère épistémologie et psychologie comme naturellement liées, donc inséparables à moins d'arbitraire, et voit la simplicité des faits mathématiques dans l'esprit du mathématicien. D'autres philosophes, que l'on peut appeler des « pragmatistes », dans le sens où H. Poincaré opposait ce mot au terme de « cantoriens », envisagent les mathématiques à la lumière du même principe. Non seulement ils laissent à l'intuition du mathématicien sa part entière dans la genèse du raisonnement réel (chose que même les Logisticiens sont obligés de faire), mais encore, ils se refusent à concevoir, en droit, une mathématique, indépendamment de l'esprit tel qu'il fonctionne en fait. Ils voient, d'autre part, jusque dans les abstractions apparemment les plus arbitraires des mathématiciens, des symboles dont il faut, pour la saisir, rechercher la vraie signification dans les actes manuels qui sont à la base de tout calcul, de toute construction mathématique. Enfin, nous avons parlé de M. Brunschvicg, pour qui, la pensée mathématique, profondément enracinée dans l'expérience sociale, de laquelle ses procédés les plus fondamentaux tiennent leur vérification (et, partant, leur « valeur de vérité », leur « valeur de science »), n'en dépasse pas moins l'expérience, dès l'origine, grâce à son dynamisme interne qui tient à la nature de l'esprit. Ce dynamisme, la rend capable d'un progrès indéfini dans le sens de l'unifica-

tion de plus en plus complète de ses productions (1) ; unification en laquelle l'esprit prend, de plus en plus complètement, conscience de lui-même, l'unité étant sa « loi suprême » (2) ; cette philosophie est intellectualiste, certes — appelée par l'auteur lui-même, « intellectualisme mathématique » — mais fondée sur une conception de l'intelligence selon laquelle celle-ci est, avant tout, une activité créatrice, — activité qui donne à l'expérience elle-même son sens. Le point de vue purement logique, et le point de vue dit « pragmatiste » y apparaissent tous deux comme insuffisants en regard d'un point de vue « rationnel » qui les dépasse. Pour elle, les règles de la logique semblent, loin d'être « primitives », se dégager peu à peu des progrès de l'esprit qui cherche sa formule, tandis que l'intuition, réhabilitée, prend le sens de puissance créatrice de vérité, d'expression de l'esprit dans sa perfection.

Il était naturel que les « enchaînements » mathématiques, d'une part, les notions ou « êtres » mathématiques, de l'autre, ne soient pas, dans chacune de ces philosophies, conçus de la même manière. Et nous avons vu qu'en effet, ils ne le sont pas du tout. Il était naturel aussi que le caractère de simplicité ne soit pas, de part et d'autre, attribué uniformément aux mêmes enchaînements et aux mêmes notions, et que les arguments au nom desquels il leur est attribué, se présentent différemment, dans une même philosophie, suivant qu'il s'agit d'un enchaînement mathématique (d'un raisonnement, d'une démonstration), ou d'une notion, et, — qu'il s'agisse de l'un ou de l'autre, — dans chacune des philosophies différentes.

Nous avons vu qu'en fait, il en était ainsi. Nous avons vu des notions comme celle, par exemple, de nombre infini, paraître à M. Couturat, suivant sa conception logisticienne des mathématiques, relativement « simples » (plus simple, en l'espèce, que celle de nombre fini), alors que, pour M. Poincaré et les théoriciens des mathématiques de mêmes tendances que lui, elles ne le sont pas du tout, et vice-versa. Nous avons, au cours de l'examen successif des philosophies mathématiques, été amenés à faire intervenir dans nos explications, la

---

(1) **L. Brunschvicg**. « Introduction à la Vie de l'Esprit », p. 91. « Tant qu'il y aura lieu de remonter à des principes plus simples et plus compréhensifs, de s'élever encore dans l'ordre de la synthèse, il y aura un progrès à accomplir. »

(2) **L. Brunschvicg**. Même ouvrage, p. 155.

notion d'« élément » soit d'un enchaînement, soit d'un « objet » ou « être » mathématique.

Il suffirait de reparcourir les pages qui précèdent, pour être frappé, semble-t-il, des différences de signification, très profondes, que prend ce mot d'« élément », tandis que nous considérons, dans une même philosophie, soit des « enchaînements » mathématiques, soit des « notions », et surtout, tandis que nous passons, de l'école des Logisticiens, à H. Poincaré et aux autres « pragmatistes » (qui, d'ailleurs admettent, entre eux, des différences), et, de là, à M. Brunschvicg. Ces « éléments » de pensée impersonnelle, « éléments logiques » autrement dits, que nous avons cru trouver à la base des notions mathématiques, conçues d'une manière toute statique, telles que les entendent les Logisticiens, n'ont, certes, rien de commun avec les « éléments », étapes de la pensée unificatrice dans son élan vers l'appréhension idéale, unique, que serait celle d'une intuition élémentaire parfaitement claire, éléments que M. Brunschvicg met, lui, apparamment, à la base des notions mathématiques que nous appelons « les mêmes », parce qu'elles portent le même nom, mais dont le contenu, en fait, varie d'une conception des mathématiques à l'autre. Ils ne sont, pas davantage à rapprocher de ceux que nous avons aperçus, toujours à la base des notions, à travers les théories dites « pragmatistes » selon l'expression de H. Poincaré.

Cependant, cette diversité même de sens, ne fait que rendre plus suggestif le fait que, quelle que soit l'idée qu'ils se font de « l'enchaînement », d'une part, et, de l'autre, de la « notion » mathématique ; quel que soit, par suite, le contenu qu'ils attribuent à ces données plus fondamentales de l'un et de l'autre, que nous avons, ne trouvant pas d'autre mot, appelées leurs « éléments » respectifs, tous les mathématiciens, ou philosophes, théoriciens des mathématiques, dont nous avons examiné les idées (autant que faire se peut, à la lumière de leurs propres doctrines), sont d'accord pour appeler « simple », soit un « enchaînement », soit un « être » ou « objet » mathématique, quand celui-ci comporte un petit nombre de ces dits « éléments », et pour déclarer « plus simple » qu'un autre, un « enchaînement » ou un « être » mathématique, dès qu'il est possible d'affirmer avec certitude qu'il comporte moins de ces dits éléments que cet autre. Pour tous le « simple », en mathématiques, est synonyme de « ce

qui est direct ». En d'autres termes, si les arguments qu'ils invoquent pour déclarer « simple » une démonstration, une théorie, une notion mathématique, paraissent, au premier abord, différer, voire même s'opposer ; si les mêmes démonstrations, les mêmes théories mathématiques, les mêmes notions, ne sont pas aussi incontestablement simples, pour tous les auteurs que nous avons vus, tous, au fond, quand ils en déclarent une « simple », le font pour la même raison ; tous, quand ils les comparent entre elles du point de vue de leur plus ou moins grande simplicité, le font au nom du même principe, qu'ils ne se formulent peut-être pas — (car le problème de la simplicité ne semble pas avoir attiré spécialement leur attention ; ils n'y font allusion, pour la plupart, que très incidemment), — mais qui nous semble être celui que nous venons d'exprimer. Ce qui nous a portés à croire qu'il fallait, à ce principe, demander le secret de la nature du simple, — du moins pour ce qui est du simple mathématiquement parlant.

Et il nous a paru plausible d'expliquer, si l'on peut ainsi dire, la simplicité, par lui seul, parce que toutes les idées auxquelles on pourrait, semble-t-il, faire appel, pour en rendre compte : idée de rectitude, idée d'élégance, sont postérieures à cette idée de petit nombre d'éléments. Cette idée, loin de se surajouter à elles dans l'explication de ce qui fait la simplicité, nous est apparue comme se trouvant, au contraire, à leur propre base. Au fond, la rectitude, à laquelle nous avons toujours vu se ramener la simplicité mathématique, est conséquence du fait, pour ce qui est « direct », d'avoir un petit nombre d'éléments. De même l'élégance, à laquelle, en particulier chez H. Poincaré, mais aussi chez M. Brunschvicg, la simplicité mathématique est intimément associée, quand elle ne se confond pas avec elle, est conséquence du fait, pour ce qui est élégant (toujours au sens mathématique, bien entendu), d'avoir un petit nombre d'éléments. Peu importe d'ailleurs si ces « éléments » sont de nature purement psychologique, ou pratique, ou rationnelle.

Ce sont, ces « éléments » pourrait-on dire, des formes d'unité. Or, l'unité, dans sa perfection, c'est le caractère de ce qui, du point de vue auquel on se place, ne se laisser diviser en aucune façon. C'est le caractère de ce qui est indivisible pour la pensée, quelle que soit la manière particulière dont on conçoit celle-ci ; de ce qui, soi-même, constitue le

seul élément qui le compose, quelle que soit la nature que l'on attribue à cet élément.

Il semble, au premier abord, que nous ayons été amenés à développer cette idée tout au long de l'étude qui précède. Autrement dit, il semble que nous ayons été, sur le terrain des mathématiques, ramenés à l'affirmation de Leibnitz : « J'appelle simple ce qui n'a pas de parties ».

Il ne s'agit plus que de s'entendre sur ce que sont ces « parties ».

C'est là l'affaire des philosophes, théoriciens des mathématiques. Et leurs divergences, en effet, éclatent à ce propos. Apparemment, le seul moyen de concilier leurs théories pour ce qui regarde la simplicité, c'est, comme nous venons de le dire, en y insistant, de considérer celle-ci comme le caractère de ce qui comporte, en mathématiques, un petit nombre d'éléments.

Il s'agit de savoir si nous devons rester sur une telle conclusion ; si telle est vraiment, la conception de la simplicité qui se dégage avec le plus de force, de tout ce que nous avons pu voir dans ces pages.

Or, malgré l'évidence avec laquelle elle paraît s'imposer, elle ne laisse pas de provoquer une certaine déception. La simplicité : caractère de ce qui comporte peu d'éléments. C'est là, vraisemblablement la définition qu'en fournirait le premier venu. C'est, en d'autres termes, l'idée que s'en fait le sens commun dans son expression la plus superficielle, le sens commun qui ne se pose même pas de problème à son sujet. Et comment s'en poserait-il ? Il ne s'imagine pas que la simplicité puisse être autre chose que cela. Tout le monde, semble-t-il, — y compris les mathématiciens, — admettrait qu'un triangle ou un carré est une figure « plus simple » qu'un octogone, par exemple. Et si l'on demandait au premier venu « pourquoi » il en est ainsi, il est à peu près certain qu'il répondrait sans hésiter : « C'est parce que le triangle a moins de côtés que l'octogone ; de même le carré. »

Il y a, il est vrai, au sujet de la simplicité, des questions plus embarrassantes que celle-ci. Soit, par exemple, la suivante : pourquoi le nombre 100 est-il plus simple que le nombre 97, ou 96 ? Pourquoi, d'une manière plus générale, les nombres « ronds » sont-ils plus simples que ceux qui ne le sont pas ? (La recherche de la simplicité, dont nous avons vu la constance en mathématiques, se manifeste, semble-t-il,

à ce propos, par la conversion des fractions ordinaires en fractions décimales, en laquelle le mathématicien voit, la plupart du temps, un avantage. Elle se traduit, dans les calculs de tout le monde, par la tendance générale à « arrondir » les comptes, toutes les fois qu'on le peut.)

Il n'est pas sûr que le premier venu répondrait à ces questions avec la même spontanéité que tout à l'heure. Mais nous croyons que sa réponse définitive ne fait pas de doute. Il ne tarderait pas à trouver que, dans un nombre « rond », qui comporte, c'est-à-dire, un nombre donné, exact, d'unités supérieures (de dizaines, de centaines, etc.) et rien de plus, on ne considère pas autre chose que ces unités supérieures. Dans un nombre quelconque, au contraire, on considère les unités proprement dites, les unités ordinaires. Le nombre le plus simple paraît celui qui comporte le moins d'unités, quelles que soient les unités considérées (ce peut être des dizaines, des centaines, etc.). Et le nombre « rond » est plus simple, en général que le nombre quelconque auquel on le préfère parce qu'il comporte moins d'unités supérieures (dizaines, centaines, etc.) que le nombre auquel on le préfère ne comporte, lui, d'unités au sens propre. Le nombre 97 évoque l'idée de 97 unités ou de 9 dizaines et 7 unités, tandis que « 100 » constitue un tout que l'on regarde comme d'un seul bloc, comme une centaine, une seulement. Le nombre « rond » est plus simple parce qu'il comporte moins d'éléments, le sens du mot « élément » s'élargissant ici au point de ne plus englober que les « unités » proprement dites, les unités arithmétiques.

Telles seraient sans doute les conclusions de l'homme interrogé. Ce serait, — comme nous, — dans le petit nombre des éléments de ce qui est dit « simple », qu'il placerait l'essence de la simplicité mathématique. Ce serait aussi dans l'élargissement progressif, et la diversification croissante du sens du mot « élément » qu'il chercherait, — comme nous, — le maintien de cette conception en dépit des difficultés de plus en plus grande qu'elle suscite.

N'aurions-nous donc réussi, à travers l'examen des principales philosophies mathématiques, qu'à confirmer, au sujet de la nature de la simplicité, un lieu commun ? Est-ce là ce que nous devons nous avouer ?

Il ne faudrait pas, non plus, exagérer cette impression de déception qu'une telle constatation pourrait, comme nous le

disions plus haut, provoquer au premier abord. Le fait, en soi, n'a rien de décevant, à moins qu'on ne postule un certain mépris à l'égard de ces intuitions que traduisent les affirmations du sens commun. Et l'on ne voit pas, logiquement, au nom de quoi on justifierait un tel mépris. Il nous semble que l'esprit ne doit être insatisfait qu'au cas où, dans notre examen raisonné du problème de la simplicité en mathématiques, il trouverait mal étayé le lieu commun auquel nous paraissons aboutir ; qu'au cas où les arguments qui ont l'air d'y conduire, lui apparaîtraient, à la réflexion, sans vraie valeur.

Il s'agit donc, avant tout, de voir s'il en est ainsi. Car, répétons-le, le seul fait, après avoir posé et discuté un problème en apparence assez complexe (3), d'en entrevoir une solution dans un lieu commun, ne doit pas suffire à nous faire rejeter cette solution, à priori. Il existe tant de circonstances où le bon sens de tout le monde a raison, contre les subtilités des discuteurs. Ce serait peut-être, ici, le cas.

Mais, en l'espèce, c'est par la discussion que nous sommes arrivés à formuler l'opinion banale que l'on sait, consistant à identifier la simplicité au caractère de ce qui a peu d'éléments. Notre discussion est-elle exempte, elle, de ces subtilités qui ne servent qu'à trahir une pensée ferme ? Devait-elle, logiquement, aboutir en effet là où elle semble le faire ? Notre notion de simplicité fondée, en mathématiques au moins, sur le petit nombre des éléments dans les choses dites « simples », ne cache-t-elle, vraiment, aucune pétition de principe ?

Ces points sont à examiner de près.

Si nous pouvons, après étude, y répondre par une affirmative sans réserve, alors, nous devrons, semble-t-il, accepter ce qui, au premier abord, paraissait se dégager de tout ce qui précède, en ce qui concerne la nature du simple. Et tout ceci aura servi à confirmer une intuition du « premier venu ».

Sinon, il nous faudra chercher ailleurs la solution du problème qui nous occupe. Et l'intuition du premier venu, — qui est une réalité, — restera à justifier.

---

(3) Voir plus haut : Ire partie, chapitre IV.

CHAPITRE XX

INSUFFISANCE DE LA CONCEPTION SUIVANT LAQUELLE LA SIMPLICITE SE REDUIRAIT, EN MATHEMATIQUE, AU FAIT, POUR TOUT CE QUI EST « SIMPLE » DE COMPORTER UN PETIT NOMBRE D'ELEMENTS.

Si l'on relit les pages de cette étude consacrées à la détermination de l'idée de simplicité, successivement du point de vue de chacune des philosophies mathématiques exposées, on peut, d'abord, se laisser impressionner par l'insistance avec laquelle semble s'imposer une certaine conclusion facile. De quelque côté en effet qu'on essaye d'envisager la question, on rencontre toujours la conception banale de la simplicité, comme fait de comporter un petit nombre d'éléments. Mais ce n'est là, nous l'avons vu, qu'une apparence.

Il existe d'énormes différences entre les sens que prend le mot « élément » dès que l'on modifie le point de vue général auquel on s'était placé, à la suite de tel ou tel philosophe, et déjà, à l'intérieur même d'une seule philosophie mathématique. Il semble que l'on doive en être non moins impressionné.

Ici, chez un Couturat ou un Russell, il s'agit, avons-nous dit, d'« éléments logiques de pensée » (1). Là, chez un H. Poincaré, ce qu'il nous faut admettre pour rendre compte, soi-disant, de la simplicité, c'est, dans les enchaînements de même que dans les notions mathématiques simples, l'existence d'un petit nombre d'« éléments » esthétiquement parlant, — d'éléments comparables aux grandes lignes fondamentales d'un édifice d'où se dégage l'impression reposante de la beauté (2). Là encore, chez un Goblot, ou un Rignano, il ne peut être question que d'« éléments » opératoires, correspondant à ces opérations manuelles que symbolisent, en dernier

(1) Voir plus haut, pp. 157, 168, 181, 190, 216.
(2) Voir plus haut, pp. 266, 268.

ressort, aussi bien un enchaînement mathématique simple, qu'une notion simple. Ailleurs encore, — chez M. Brunschvicg, — les éléments en question ne sont autres que les étapes de l'esprit dans son travail d'unification de deux jugements (3). Ces différences de signification seraient déjà suffisamment suggestives. Mais elles ne se bornent pas là. A l'intérieur d'une même philosophie mathématique, il est nécessaire, il est indispensable de faire varier le contenu du mot « élément », si l'on veut maintenir la conception de la simplicité qui semble d'abord dominer ces pages. Chez Couturat, ou Russell, et les Logisticiens en général, un de ces « éléments » dont il vient d'être question, c'est tantôt un axiome (4), tantôt une notion, tantôt un principe logique (5), tantôt un syllogisme (6), tantôt une relation (7). L'espace le plus simple, on s'en souvient, c'est, pour ces philosophes, celui dont la conception exige le moins d'axiomes. L'espace projectif absolu (8). est considéré comme plus simple que l'espace à trois dimensions parce que sa notion est constituée par l'affirmation simultanée d'un moins grand nombre de postulats. La théorie « relativiste » de la grandeur est plus simple que la théorie dite « absolutiste », parce qu'elle comprend moins d'axiomes (9). La théorie des nombres infinis est « plus simple » que celle des nombres finis, parce qu'elle ne suppose pas, comme elle, le principe d'induction (10). La théorie ordinale des nombres basée sur trois notions fondamentales, à savoir celle de 0, celle de N (nombre) et celle de « nombre suivant », est moins simple que celle qu'a imaginée, dans la suite, Padoa. Celle-ci, en effet, ne comporte que deux notions fondamentales (au lieu de trois), la troisième (la notion de 0), étant définie à l'aide des deux autres (11).

Pour H. Poincaré, ces éléments dont le petit nombre équivaut à la simplicité mathématique, — avons-nous dit, — changent non moins constamment de signification. Dans le

---

(3) Voir plus haut, p. 400.
(4) Voir plus haut, pp. 151, 154.
(5) Voir plus haut, pp. 151, 157, 189.
(6) Voir plus haut, p. 188.
(7) Voir plus haut, p. 214.
(8) Voir plus haut, p. 204.
(9) Voir plus haut, p. 154.
(10) Voir plus haut, p. 151.
(11) Voir plus haut, p. 150.

cas de l'espace, par exemple, ce sont des dimensions. Les raisons que nous avons, de choisir, de préférence aux autres, l'espace euclidien, c'est que c'est, parmi les espèces isomorphes que l'expérience suggère, celui qui a le moins de dimensions. Dans le cas d'une démonstration, les « éléments » intéressants, ce sont les « parties » de cette démonstration, avec tout l'indéfinissable qu'elles comportent, — car leur détermination est, ne l'oublions pas, affaire de sensibilité du mathématicien, affaire « d'art », non de logique rigoureuse (12). Mais, d'autre part, cette notion de « parties » elle-même est élastique. Car une démonstration simple, c'est aussi bien celle qui n'a pas de parties tellement elle est directe, que celle dont les parties, quoique multiples, sont si bien agencées qu'elles donnent l'impression de l'élégance dans l'unité, à son plus haut degré.

Et il ne serait pas difficile de trouver, en feuilletant ces pages, d'autres sens, tous différents, du mot « élément », qu'il s'agisse de « l'élément de pensée logique », ou de l'élément avec une acception psychologique.

Une notion qui admet tant de significations diverses, n'est-elle pas déjà bien suspecte aux yeux de celui qui voudrait se faire une idée nette des choses ? On ne peut que se demander : à quoi correspond-elle donc, au juste ?

Pour répondre à cette question, il faudrait trouver, semble-t-il, ce que toutes ces acceptions cachent de « commun » sous leurs différences flagrantes. Il faudrait trouver pourquoi, ici, et là, et encore ailleurs, il est question d'éléments, — car il doit y avoir à cela une raison, si le mot « élément » n'a pas été employé par nous tant de fois, absolument arbitrairement. Il faudrait, avant cela, essayer de préciser ce que couvrent ces rubriques générales d'« éléments logiques », d'« éléments psychologiques ou esthétiques de pensée », d'« éléments rationnels », sous lesquelles nous avons réuni tous les sens du mot « élément », que nous avons cru rencontrer dans chacune des trois grandes philosophies mathématiques examinées, — sans compter ce que nous entendons par ces « éléments pratiques », dont le petit nombre ferait la simplicité mathématique, tant des démonstrations et constructions, que des notions elles-mêmes, pour ceux qui placent l'essence des mathématiques dans les opérations ma-

(12) Voir plus haut, p. 267 et suivantes.

nuelles, qu'il faut aller chercher tout au fond de leur symbolisme.

Ce n'est pas là, une tâche facile.

Nous avons vu que, pour les Logisticiens par exemple, les « éléments logiques » d'une théorie mathématique sont toutes les propositions, exprimées ou non, qui sont à sa base, comme condition de légitimité de l'ensemble des vérités qui la constituent (13) ; ce sont les axiomes, les principes logiques présupposés, y compris les plus généraux, indispensables au développement rationnel du système en réseau de propositions vraies (14), en définitive les « opérations de logique pure » nécessaires pour asseoir la théorie (15). Ailleurs, toujours dans la même philosophie, nous avons vu ces « éléments » identifiés avec chaque « étape logique » de la réduction progressive d'une proposition à une autre (par démonstration). Ailleurs, nous avons été amenés à les identifier aux syllogismes (exprimés ou sous-entendus) qui s'enchaînent dans un raisonnement (16). Quant il s'agit d'une notion mathématique, nous avons vu en eux les notions antérieurement conçues, qu'il est, logiquement, nécessaire de poser avant elle (17), et, quand il s'agit d'un postulat, les postulats sur lesquels il repose (18). Enfin nous avons, semble-t-il, considéré comme « éléments logiques » d'une définition mathématique, à la fois les postulats qu'elle suppose et les notions auxquelles elle fait appel (19).

En admettant que, sous cette diversité d'acceptions, il y ait une notion réelle d'« élément logique », quelle est-elle ?

Ce n'est pas la proposition, ce n'est pas le principe logique, ce n'est pas le syllogisme, ce n'est pas la notion, ce n'est pas le postulat. Chacune de ces acceptions est précise et ne saurait englober les autres dans une unité. D'autre part, si l'idée d'antériorité logique est aussi liée que nous avons cru le reconnaître, chez les Logisticiens, à celle de plus grande simplicité, il faut bien se dire que toutes les notions qui « composent » une certaine notion mathématique ne sont

---

(13) Voir plus haut, pp. 157, 168.
(14) Voir plus haut, pp. 157, 168.
(15) Voir plus haut, p. 168.
(16) Voir plus haut, p. 188.
(17) Voir plus haut, pp. 195-196 à 199.
(18) Voir plus haut, p. 199.
(19) Voir plus haut, p. 201.

pas équivalentes. Il en est qui sont antérieures à d'autres. De même, tous les postulats qui servent de base à un postulat donné, moins simple que chacun d'eux, ne sont pas équivalents. Il en est qui sont antérieurs à d'autres, par suite plus simples. Comment donc, des notions plus ou moins simples les unes que les autres, peuvent-elles être également, les unes et les autres, considérées comme éléments d'une autre notion ? De même, comment des postulats plus ou moins logiquement primitifs, c'est-à-dire, plus ou moins simples, toujours du même point de vue, peuvent-ils être également tenus pour « éléments » d'un certain postulat ? Ou bien le mot « élément » n'a ici aucun sens, ou bien il n'a qu'un sens extérieur à la structure même (fût-ce la structure « logique »), des entités qu'on désigne par ce mot : un sens verbal, un sens « d'écriture ».

Mais ne serait-ce pas la notion d'« étape logique », celle que l'on devrait, au fond, identifier avec la notion d'« élément », ici du moins ? Nous pourrions à la rigueur, dire que les syllogismes dont se composent les raisonnements plus longs en sont des « étapes » — quoiqu'on puisse dans un raisonnement, en distinguer d'autres. Nous pourrions même considérer les notions logiquement antérieures à une autre, et qu'il faut concevoir l'une après l'autre, pour arriver à la former, en sont les « étapes » logiques. Dans un cas comme dans l'autre, ici, nous sommes en face d'un chemin parcouru par l'esprit. Il serait plus difficile de considérer de la même façon, les propositions qui fondent une « théorie » mathématique, propositions entre lesquelles il n'y a pas de relation d'avant et d'après, ni logiquement, ni psychologiquement, mais qui sont, pour ainsi dire, simultanément supposées.

Mais, en admettant que même cela soit possible, qu'est-ce qu'une « étape logique » ?

Qu'est-ce, surtout, qu'une « étape logique », dans une philosophie « objectiviste » des mathématiques, qui ne considère pas l'esprit en action, mais les choses — en l'espèce les enchaînements et les notions mathématiques — indépendamment de l'activité qui les saisit progressivement ? une philosophie pour laquelle ce sont, en quelque sorte les donnés d'un monde intelligible qui est, et que le mathématicien découvre ? (C'est dans ces donnés, non dans l'esprit du mathématicien, que se trouverait la simplicité — cette simplicité due, soi-

disant, au petit nombre d'éléments, au petit nombre d'étapes). On ne se le représente absolument pas. Toute « étape » suppose une voie semble-t-il, c'est-à-dire un trajet à parcourir. On peut, certes, s'imaginer une longueur, marquée de distance en distance par certains signes (par des accidents naturels, par exemple, s'il s'agit d'un trajet dans le monde physique), sans concevoir forcément qu'elle soit à parcourir. Mais alors les points marqués ne peuvent être que des subdivisions, non des « étapes ». L'« étape » marque une finalité dans le mouvement. Placer dans quelque chose de tel, ces « éléments » au petit nombre desquels la simplicité des démonstrations mathématiques serait due, c'est semble-t-il, oublier le caractère « objectif » que la simplicité mathématique a pour les Logisticiens ; car, on a beau torturer cette notion d'étape, l'appeler étape « logique », dire qu'il ne s'agit en rien, là, d'une division « psychologique » des démonstrations, on n'arrivera pas à lui enlever ce qu'elle a de subjectif. On n'arrivera pas à en faire une division naturelle, de la démonstration, un « élément » objectif de celle-ci. A moins qu'on ne lui donne un fondement subjectif, — trahissant ainsi la pensée de tous ceux des mathématiciens dont les tendances sont celles des Logisticiens, — on ne peut que la déclarer arbitraire. Et nous avons eu beau vouloir nous en garder, il semble que, inconsciemment, nous ayions, plus haut, en faisant appel à cette notion pour rendre compte de la simplicité mathématique, fait intervenir dans notre argumentation, des considérations quasi-psychologiques.

Une « étape logique », du point de vue des Logisticiens, cela ne veut rien dire. Que devient, dès lors, cet « élément logique », cet « élément de pensée » en soi, opposé à ce que pourrait être un élément de pensée « psychologique », de pensée « réelle », pour reprendre certains termes employés au cours des premiers chapitres ? Il a tout l'air d'être un inconcevable.

Mais nous disions que la simplicité mathématique, tant des enchaînements que des notions, est due au petit nombre d'éléments de ces derniers, aussi bien pour les théories « subjectivistes » que pour la précédente. Arriverons-nous mieux à préciser ce que nous entendions par un « élément » quand nous essayions de nous placer du point de vue d'une de ces théories, et, en particulier, du point de vue de H. Poincaré ?

Pour H. Poincaré, comme nous l'avons vu, c'est surtout la simplicité des « constructions » au sens large du mot, et des démonstrations qui importe aux yeux du mathématicien. Et leur simplicité est, avant tout, une simplicité esthétique. Une construction est belle, quand elle est simple, et simple, toutes les fois qu'elle est belle. C'est, comme nous l'avons vu, à « l'harmonie des parties, à leur heureux balancement, à ce qui y met de l'ordre, à ce qui leur donne de l'unité » (20) que simplicité et beauté sont dues. Nous avons essayé d'interpréter. Chacun de ces « heureux balancements », avons-nous dit, introduit pour le mathématicien, la possibilité d'embrasser au moyen d'un moins grand nombre d'actes, la compréhension totale de la construction (21). L'idéal, ce serait sans doute de l'embrasser d'un seul coup. Car c'est le sentiment que le mathématicien a de l'unicité de l'acte par lequel il appréhende le sens profond d'une construction quelconque (d'une démonstration, par exemple), qui lui fait dire qu'elle est simple et élégante, tout comme nous disons qu'un monument est harmonieux (22). Or nous avons cru, un moment, pouvoir donner le nom d'« élément » à toute subdivision d'une construction, qui correspond à un tel acte de l'esprit, acte non de logique pure, mais d'intuition mathématique, et duquel le sens esthétique est inséparable.

Mais cette notion d'« élément » existe-t-elle vraiment dans la pensée de H. Poincaré ? En tout cas, il n'en parle pas. Nulle part le nombre des parties d'une construction mathématique, n'est mentionné, chez lui, comme lié à sa simplicité. Seule « l'harmonie entre ses parties » est prise en considération. C'est nous qui, pour expliquer la cause de cette harmonie avons essayé de substituer aux parties d'une construction, telles que chacun les conçoit (et dont le nombre, certes, n'est pas lié intimément à une simplicité d'ordre esthétique), des « parties » hypothétiques, des « éléments » psychologique, dont chacun correspondrait à une sorte d'acte d'appréhension esthétique. Peu importe que H. Poincaré n'explique pas lui-même sa pensée en ces termes, si l'explication est plausible et si elle cadre bien avec cette idée de sensibilité esthétique qu'il fait juge, chez le mathématicien

(20) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 25. Déjà cité.
(21) Voir plus haut, p. 271.
(22) Voir plus haut, p. 270.

véritable, de la simplicité des constructions créées par l'esprit. Peu importe que ce ne soit qu'une interprétation de la pensée de l'auteur, si elle est juste. Mais est-elle juste ? Voilà la question. Et, avant de correspondre exactement à ce que H. Poincaré a pu vouloir dire, correspond-elle seulement à quelque chose de concevable du point de vue psychologique ?

« L'harmonieux balancement des parties » permet, disions-nous, au mathématicien d'embrasser en un moins grand nombre d'actes, la totalité de la construction. Si ces « actes » étaient des opérations logiques, purement, on ne voit guère comment cette sorte de symétrie esthétique avec laquelle se présente la construction mathématique aux parties heureusement balancées, pourrait influencer leur nombre. Par bonheur, avons-nous spécifié : il s'agit d'actes « d'intuition ».

Mais alors, une autre difficulté surgit ; c'est celle, pour n'importe quel psychologue, de concevoir des « éléments » d'intuition. Une intuition est nécessairement une. Comment des « éléments » pourraient-ils s'y distinguer ?

Pour H. Poincaré, c'est sous la forme du sentiment esthétique de l'unité dans l'agencement des parties, que la notion de simplicité sert de guide au mathématicien, non seulement dans la compréhension d'une construction, quelle qu'elle soit, mais dans sa création. Il a donc, d'avance, d'une façon, pour ainsi dire latente, le sentiment de cette unité. Il a donc déjà appréhendé ce qu'il y a d'essentiel, mathématiquement parlant, dans cette construction, en un seul acte. Il ne s'agit plus pour lui, d'en acquérir progressivement la notion, par une pluralité d'actes. Et l'on ne conçoit pas comment on pourrait décomposer cet acte unique que nous venons de rappeler, sans lui faire perdre toute signification. S'il y a vraiment pluralité d'actes, il faut se représenter chacun de ceux-ci comme séparé des autres. Dans ces conditions, on a affaire à une pluralité de constructions. Dès que les parties de la construction s'enchaînent, — et il le faut bien, sinon la construction n'existerait pas ; — dès que ces « actes » que représentent soi-disant chacune de ces parties que nous avons imaginées pour rendre compte de la simplicité du tout, ne sont plus indépendants les uns des autres, il n'y a, s'il faut parler d'intuition, qu'une seule intuition qui les englobe tous, et qui leur donne, aux yeux du mathématicien, leur sens, leur place, leur valeur. C'est cette intuition qui crée la

construction. Les subdivisions qui apparaissent après coup dans celle-ci, se surajoutent au sentiment un et primitif de cohésion entre elles, que le mathématicien en a, à l'intuition de leur tout, comme d'un édifice « simple ». Elles apparaissent comme les grandes lignes d'un monument dont l'harmonie frappe, dès l'abord. L'intuition de leur tout les domine et les justifie. Et c'est de sa qualité, à elle, que dépend la simplicité de la construction ; du fait, c'est-à-dire, qu'elle est plus ou moins lumineuse, ou, au contraire, plus ou moins confuse.

Mais à quoi correspondent ces subdivisions que tout mathématicien reconnaîtra aisément dans une démonstration, ou dans une construction quelconque ? subdivisions qui semblent « naturelles », « rationnelles », et que chacun apparemment conçoit de la même façon, dans une construction donnée, quand celle-ci est claire, et simple autant qu'elle peut l'être ? A des articulations logiques du dit enchaînement ? Peut-être. Mais, semble-t-il, pas forcément.

Elles ne correspondent, en tout cas, certainement pas à des actes d'intuition successifs par lesquels le mathématicien prendrait conscience de l'ensemble de l'enchaînement. Que celui-ci soit aussi simple que l'on voudra, ou qu'il ne le soit pas, dès qu'il est conçu par celui qui le construit (avant même que les détails en soient fixés), ou dès qu'il est compris par celui qui l'étudie, il est pour le psychologue, — et par suite pour H. Poincaré, — appréhendé en un acte unique. On sait, en effet, le cas que fait H. Poincaré des données fournies par la psychologie. Pour lui, l'épistémologie ne saurait que s'appuyer sur elles. Dans ces conditions, qu'une construction mathématique soit très simple ou qu'elle le soit moins, il ne saurait être question de distinguer, derrière ses parties, des « éléments » psychologiques — ou esthétiques, — correspondant à quelque chose de fondé. De tels « éléments », sont, pour le psychologue (et pour l'esthéticien), des inconcevables, non moins, sinon davantage encore, que ces « éléments de pensée logique » que nous supposions tout à l'heure dans l'étude d'une autre philosophie mathématique. Ils n'ont pas de sens, et par suite ne peuvent exister. Moins qu'aucune autre doit conduire à les poser à titre d'hypothèse explicative, une attitude philosophique comme celle de H. Poincaré, qui ramène la simplicité mathématique à une simplicité esthétique, sentie profondément par le vrai mathématicien.

La simplicité d'une démonstration, ou d'une construction mathématique en général, est due, comme H. Poincaré l'exprime lui-même, à une adaptation parfaite de l'esprit à son œuvre (23). Adaptation plus ou moins aisée, plus ou moins immédiate, plus ou moins complète, donne constructions plus ou moins simples. Mais jamais on ne doit faire intervenir un « nombre » quelconque d'actes d'appréhension, de la part de l'esprit, car, outre que, comme il ressort de tout ce qui précède, l'essentiel d'une construction est appréhendé en un seul acte d'intuition « esthétique », nombre et adaptation ne sont pas, semble-t-il des idées qui se complètent naturellement. Il n'est pas du tout prouvé que l'esprit éprouve forcément la plus grande aisance, là, où les actes successifs qu'il devra fournir, sont le moins nombreux. C'est la qualité des actes qui intervient là — dans le cas présent, la qualité de l'acte. Les « parties » de la construction dont la belle harmonie se confond avec la simplicité même de l'ensemble, comptent, sans doute. Mais, encore une fois, ce n'est pas leur nombre qui importe, mais leur disposition, leur « *agencement* ».

On ne voit pas, en définitive, sur quelle réalité solide pourrait reposer la conception d'« éléments psychologiques », caractérisés comme nous avons cru pouvoir le faire dans les premiers chapitres de cette étude (24), éléments dans le petit nombre desquels il faudrait chercher le secret de la nature de la simplicité dans les démonstrations mathématiques, et, d'une façon plus large, dans les enchaînements.

C'est, pour H. Poincaré, la simplicité dans les démonstrations, et en général dans les enchaînements, qui est de beaucoup la plus importante. C'est même, a remarqué J. Nicod (25), la seule dont il s'occupe, et à laquelle il attribue le rôle prépondérant de guider l'intuition du mathématicien. Nous avons nous-mêmes noté que les définitions les meilleures, pour lui, sont celles qui servent le plus dans les démonstrations. Cela n'empêche pas la simplicité des définitions d'être distincte de celle des démonstrations.

Or, pour le mathématicien, l'existence d'une notion est celle que lui donne une bonne définition. La simplicité des

(23) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 16, p. 27.
(24) Voir plus haut, IIIe partie.
(25) **J. Nicod.** « La Géométrie dans le Monde sensible », p. 29.

définitions, c'est la simplicité même des notions mathématiques.

Nous avons vu plus haut (26) que, pour H. Poincaré la notion la plus simple est celle qui, d'après sa définition comporte toujours le plus petit nombre d'éléments, en donnant, cette fois, à l'« élément », un sens très différent de celui dont nous venons de montrer l'inconsistance. Ces « élément », ce seraient des relations actuellement affirmées (27), relations toujours plus nombreuses dans une notion définie que dans celles, plus simples, qui servent à la définir (28). Est-il possible, pour ce qui est des notions mathématiques, de leur conserver cette signification, et d'affirmer, en définitive, que la simplicité de ces dernières est due, elle au moins, pour H. Poincaré, à « un petit nombre d'éléments » ?

Il semble encore que non.

Nous avons tiré cette idée de l'identification de l'« élément » d'une notion mathématique avec l'une des relations dont l'ensemble la constituerait, de la comparaison des notions que l'on définit à l'aide d'autres notions, avec ces autres. Encore, ces autres, ne leur sont-elles, bien souvent, qu'à demi comparables. Elles ne sont, en effet, pas des espèces d'un même genre qu'elles, mais des genre qui les dominent justement parce qu'ils les dépassent en indétermination, et qui sont, forcément, plus pauvres qu'elles. Cela nous a amenés à identifier, sur ce point, simplicité, et, pauvreté quant au contenu. Mais il paraît incontestable que l'on peut, en mathématique, comparer des notions qui ne s'englobent pas à la façon d'un genre et d'une espèce. Il semble que H. Poincaré accorderait, par exemple, volontiers, qu'un triangle est, en tant que notion géométrique, plus simple qu'un décapentagone, comme il dit lui-même qu'une équation du premier degré est, en soi, plus simple, qu'une équation de degré supérieur. Dans ce cas, sur quoi se basera-t-on pour affirmer la simplicité ?

Il est impossible, dans quelque exemple que ce soit, de faire le compte complet des relations dont l'ensemble constitue le contenu d'une notion mathématique. D'abord, on ne peut jamais être sûr qu'il n'en existe pas quelques nouvelles

(26) Voir plus haut, p. 318.
(27) Voir plus haut, p. 318.
(28) **H. Poincaré**, « Science et Méthode », p. 140.

à découvrir. Et puis, concevrait-on même, la possibilité d'en faire le compte, qu'il n'est pas certain du tout que ce serait la notion la plus simple (celle de triangle, par exemple, opposée à celle de décapentagone), qui en comporterait le plus petit nombre. Il pourrait arriver que ce soit exactement le contraire. Rien, à priori, ne nous permet, là dessus, une conjecture. D'un autre côté, toutes les relations englobées dans une même notion ne sont pas équivalentes. Il suffirait d'ouvrir un traité réunissant les relations les plus importantes que suppose un triangle, par exemple, pour se persuader, qu'il en est d'extrêmement plus compliquées que d'autres. Elles ne pourraient donc pas légitimement, dans le soi-disant compte qu'on en ferait, entrer toutes au même titre, comme « éléments ».

Si donc nous avons vu H. Poincaré regarder comme plus simples que d'autres certaines notions qui servent à les définir, cela peut être, quelquefois au moins, en tant que les secondes supposent les premières, en tant qu'elles comportent toute la réalité de ces dernières plus quelque chose. Mais il est impossible de déduire de là, comme nous l'avons tenté, une théorie identifiant la simplicité des notions mathématiques au petit nombre des relations qu'elles comportent, considérées comme éléments, et, encore moins, d'attribuer, implicitement, cette théorie à H. Poincaré. Il semble qu'on ne puisse pas, dans la recherche de la nature du simple chez un penseur comme H. Poincaré, faire abstraction du sentiment d'aisance que l'on éprouve dans la conception de certaines notions primitives telles que celles des polygones élémentaires, ou, en dehors de la géométrie, telles que celles d'unité, celles des premiers nombres, celle de la fonction simple par excellence $y = ax + b$, etc. Ce sentiment n'est sans doute pas, pour H. Poincaré, éloigné de l'impression de beauté que produit sur le mathématicien une démonstration bien claire, « aux parties heureusement balancées », une construction simple.

On pourrait en dire autant pour ce qui est de la simplicité dans les théories, chez H. Poincaré, en particulier, pour ce qui est de la simplicité des différentes théories spatiales dont le problème l'a surtout préoccupé. (On pourrait d'ailleurs, semble-t-il, aussi bien parler de la « notion » d'espace, que de théories spatiales).

Nous avons vu qu'il y a deux choses à considérer dans

« notre » espace, dans l'espace choisi parce qu'il est « le plus simple en soi » (29). Il y a d'abord qu'il est euclidien quant à sa structure, c'est-à-dire, qu'aux propriétés que son groupe métrique a en commun avec les groupes métriques de Riemann et de Lobatchewski, s'ajoute, le caractérisant, la propriété d'avoir un « sous-groupe invariant dont tous les changements sont interchangeables, et qui est formé de toutes les translations » (30). Il y a, ensuite, pour ce qui regarde sa « matière », qu'il admet le point comme élément, c'est-à-dire, qu'il a trois dimensions.

Nous avons cru justifier sa simplicité, successivement à ces deux points de vue. Dans le premier cas, nous avons remarqué que, posséder un sous-groupe dont tous les changements sont interchangeables, dont toutes les opérations de correspondance sont équivalentes, cela revient, pour notre groupe, à comprendre moins d'opérations différentes de correspondance, qu'un autre, qui ne posséderait pas un tel sous-groupe (31). Et nous avons assimilé chacune des dites opérations, en tant que différentes des autres, à un véritable « élément ». Puis, avons-nous ajouté, cet espace euclidien, quant à sa structure mathématique, a été pris à trois dimensions, pour la raison que, parmi les groupes de même forme que l'expérience nous suggère, c'est celui dont le nombre des dimensions est le moindre (32). Cela fut une occasion de plus pour nous d'assimiler la simplicité à un petit nombre d'éléments, distingués dans les choses simples. Sans doute, au sens ordinaire, les « éléments » de l'espace euclidien sont-ils les points et ces éléments sont-ils une infinité. Mais c'est, avons-nous dit, grâce au petit nombre des coordonnées (objets des opérations du groupe des déplacements) (33) au moyen desquelles nous construisons l'espace, que cet espace est simple — plus simple en tout cas qu'un espace « isomorphe » construit au moyen d'un plus grand nombre de coordonnées. Nous avons considéré ces coordonnéees comme éléments, sinon « de l'espace », du moins de la notion d'espace, une fois

---

(29) **H. Poincaré.**

(30) **L. Rougier.** « La Philosophie géométrique de H. Poincaré, p. 118. Voir plus haut, p. 247.

(31) Voir plus haut, p. 248.

(32) **Henri Poincaré.** « Revue de Métaphysique et Morale », 1897. « Réponses à quelques critiques », p. 67.

(33) Voir plus haut, p. 253.

que celle-ci est déjà à demi déterminée par le fait que la structure de son groupe métrique est arrêtée.

Mais, pas plus que l'interprétation que nous avions d'abord donnée de la nature de la simplicité des notions mathématiques en général, celle-ci ne peut être maintenue en définitive, en ce qui concerne l'idée d'espace. Et cela, pour la même raison : à savoir qu'elle va à l'encontre de l'attitude « psychologiste » de H. Poincaré. Cette notion d'« élément » appliquée à l'espace, et identifiée, tantôt à une opération du groupe métrique, tantôt à une dimension ou coordonnée, peut ne pas choquer autant, au premier abord, que celle d'« élément d'une démonstration », surtout si l'on insiste ici sur le fait qu'il s'agit d'éléments psychologiques. Mais elle n'en est pas plus satisfaisante, pour celui, qui essaye de regarder les choses de plus près, en ne perdant pas de vue que la théorie de H. Poincaré est une théorie « subjectiviste » de la simplicité, et que, par conséquent, ce n'est pas dans les choses simples elles-mêmes que la simplicité réside, pour elle, autant que dans l'esprit du mathématicien qui la sent.

Concevoir l'espace, c'est concevoir un groupe de déplacements, c'est entendu, avec tous les sous-groupes que celui-ci comporte, avec toutes les opérations de correspondance, équivalentes et différentes, dont il est constitué. De même que concevoir un polygone de trois côtés, c'est concevoir toutes les relations que cette définition entraîne et dont l'ensemble constitue la personnalité mathématique du triangle. Mais, pour le psychologue, c'est les concevoir, obscurément, sans les détailler. C'est, à proprement parler, les sentir plutôt que les concevoir.

La vraie notion d'espace n'est pas celle qui se dégagerait peu à peu d'une théorie préalable des espaces. C'est celle que fournit l'intuition. La théorie vient après coup. Que l'idée qu'on a de l'espace apparaisse, à l'analyse comme correspondant à celle d'un groupe de déplacements d'une structure déterminée, et d'un ordre donné, cela ne lui enlève rien de sa qualité. Et, il semble que, pour H. Poincaré, la simplicité soit la « qualité » de certaines conceptions de l'esprit. Si, comme lui, on place la simplicité dans l'esprit du mathématicien, plutôt que dans les faits mathématiques, considérés indépendamment de lui (à la manière des Logisticiens), il semble que, loin de dire que l'espace euclidien est plus simple que tout autre parce qu'il correspond au groupe des dépla-

cements le plus simple tant pour ce qui est de sa « forme » que pour ce qui est de sa « matière », on doive dire que, ce groupe spécial de déplacements, est le plus simple, parce qu'il se trouve au fond de la notion la plus simple d'espace, qui est une notion synthétique .

Ou plutôt, on devrait dire que cette notion d'espace est la plus simple (si on veut la rattacher au groupe métrique correspondant, afin de la présenter avec toute sa signification mathématique), parce que ce groupe auquel elle correspond, est le plus simplement concevable. C'est, c'est-à-dire, le groupe concevable avec le sentiment de la plus grande aisance, pour l'esprit du mathématicien ; le groupe par la représentation duquel, cette sorte de sensibilité esthétique, dans la satisfaction de laquelle H. Poincaré voit, chez le mathématicien, le critère de la simplicité de toute construction belle et féconde, comme de toute notion claire, est pleinement satisfaite.

Ce n'est pas que la structure du groupe des déplacements n'intervienne pas comme cause de la simplicité plus ou moins grande de celui-ci. Selon les sous-groupes que ce groupe admettra, selon les opérations de correspondance qui seront, en lui, identiques, les « changements » qui seront « interchangeables », il formera un tout plus ou moins bien adapté à l'esprit, pour reprendre une expression de H. Poincaré, donc un tout concevable avec plus ou moins d'aisance. Mais le nombre des opérations, comptées une à une, ne semble pas influencer ce plus ou moins d'aisance. C'est, semble-t-il, bien plutôt leur répartition qui importe, leur ordonnance les unes par rapport aux autres, comme cela est apparu, déjà, au début de cette étude, pour les groupes de permutations correspondant à une équation algébrique donnée.

De même, il paraît exact de soutenir que le nombre des dimensions d'un espace, rend la conception de celui-ci plus ou moins simple. Mais, là encore, pas seulement, pas surtout en tant que petit nombre, comme si c'était les dimensions elles-mêmes qui étaient considérées comme matériaux, comme « éléments » de la notion. Il intervient, d'une manière plus plausible, et plus en accord avec les tendances maîtresses de la philosophie de H. Poincaré, par la simplicité de l'ordre que son choix introduit dans le groupe, non plus pour ce qui est de sa structure, mais pour ce qui est de sa matière. Qu'est-ce, en effet, que les dimensions ? Nous

l'avons vu. Ce sont des « coordonnées », des « directions », selon lesquelles se répartit l'infinité continue des éléments matériels du groupe. Ce sont, pour ainsi dire, les nervures d'un schéma dans lequel l'esprit insère sa conception d'un continu donné.

On voit que, pas plus dans sa théorie de l'espace que dans sa conception des définitions ou des démonstration (d'une façon générale des « constructions » mathématiques), H. Poincaré n'identifie la simplicité au fait, du petit nombre des éléments. Toutes les fois que, de la manière dont il semble présenter les choses, un nombre, soit de dimensions spatiales, soit d'opérations, soit de relations, soit de parties, semble intervenir, on voit, dès qu'on y regarde de plus près, que ce n'est pas ce nombre qui détermine la simplicité par le seul fait qu'il est petit. C'est l'ordre, lié à ce nombre, qui, de plus en plus, apparaît comme « simple ». Et cela, par la seule adaptation plus parfaite qu'il permet, de la notion ou de la construction mathématique, à ces profondes exigences esthétiques, à demi-conscientes, auxquelles se ramène, chez le mathématicien, de l'avis de H. Poincaré, les exigences de rationalité et de clarté.

Il semble justement que ce soit la satisfaction de cette aspiration à la beauté intellecuelle, c'est-à-dire : l'impression de simplicité (forte comme une évidence), qu'elles donnent ou qu'elles ne donnent pas, qui sépare, aux yeux de H. Poincaré les constructions qui ne sont que logiques, des constructions rationnelles, les définitions qui se contentent de ne pas impliquer de contradiction, — comme celle du triangle comme polygone dont la somme des angles est égale à deux droits, — de celles que le mathématicien regarde comme normales, naturelles, répétons le mot : rationnelles, — (comme la définition ordinaire du triangle).

Mais pour distinguer les unes des autres, le mathématicien n'a pas besoin de raisonner longtemps ; il n'a même pas besoin de raisonner du tout, à proprement parler. Son intuition lui sert de guide. Et voilà pourquoi les notions simples comme celle d'espace euclidien, comme celles des polygones élémentaires, etc., ce sont des notions intuitives, comme nous le disions. Et les constructions simples — qui sont en même temps les constructions fécondes, — ce sont celles qui, après des recherches plus ou moins longues et pénibles sur le plan logique (recherches qui l'ont laissé insatisfait), semblent, avec

le sentiment net des analogies qu'elles illustrent, c'est-à-dire de l'ordre qu'elles mettent dans son sprit, se présenter d'elles-mêmes au mathématicien (34). Ce sont, elles aussi, les produits de l'intuition la plus claire.

Sans doute, l'intuition, H. Poincaré le reconnaît, trompe quelquefois. L'enfant a l'intuition du rond, et s'étonne cependant qu'il s'agisse là du lieu des points à égale distance d'un point intérieur appelé centre (35). Il est vrai qu'il n'a jamais essayé d'analyser ce que c'est qu'un rond, sinon, peut-être, son intuition se préciserait-elle, et cesserait-elle d'être trompeuse. Mais il est des cas plus graves. « Il faut être bien savant, dit H. Poincaré, pour ne pas regarder comme évident que toute courbe a une tangente » (36). Et c'est là une erreur qui ne fait pas de doute. Cependant, les intuitions trompeuses sont parmi celles que seule la représentation sensorielle fournit. Or « l'intuition n'est pas forcément fondée sur le témoignage des sens... ; nous ne pouvons nous représenter le chiliogone et cependant nous raisonnons par intuition sur les polygones en général, qui comprennent le chiliogone comme cas particulier » (37). L'intuition qui indique au mathématicien où se trouve le rationnel n'est pas, elle, l'effet d'une représentation sensorielle. Elle est l'expression d'un choix inconscient qui le met directement en possession de ce qui satisfait son esprit, de ce qui lui donne cette heureuse évidence intellectuelle comparable à celle que Descartes attachait aux idées claires et distinctes. Pour H. Poincaré, elle est la manifestation d'un sens esthétique spécial, dont le rôle est de trier les combinaisons, les constructions, les notions « possibles » que le moi subliminal du mathématicien sent toutes, mais dont les plus rationnelles, — les plus simples, — sont les meilleures (38).

La simplicité mathématique, pour H. Poincaré, c'est donc une simplicité psychologique, avant tout, une simplicité esthétique. Irréductible à la présence d'un petit nombre d'éléments dans les choses simples, — puisque « psychologique », « subjective », — elle est non moins irréductible à la présence

---

(34) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », pp. 52 à 56.
(35) **H. Poincaré.** Idem, p. 129.
(36) **H. Poincaré.** « La Science et l'Hypothèse », p. 43.
(37) **H. Poincaré.** « Valeur de la Science », p. 21.
(38) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 52 à 56.

d'un petit nombre d'éléments, de ceux que nous avions appelés, pour ce qui est des constructions mathématiques, des « éléments psychologiques », éléments dont chacun devait correspondre de la part de l'esprit, à un acte unique d'appréhension. C'est toute la démonstration, simple, dans son ensemble, toute la notion simple, dans son essence, qui est appréhendée par l'esprit en un acte unique et dans le sentiment d'aisance qui accompagne cet acte que se tient la simplicité. Les éléments psychologiques dans le petit nombre desquels nous avions cru devoir la résoudre, sont aussi inconcevables que ces « éléments de pensée logique » dont il était question, à propos de la simplicité objective telle que la comprennent, en mathématique, les Logisticiens.

Nous avons aussi dit un mot de ces philosophes tels que M. E. Goblot, Chaslin, Rignano, Ernst Mach, pour qui le symbolisme mathématique est une sorte de transposition, de moins en moins directe, des actes manuels qui, primitivement, servent de point de départ aux opérations de calcul, et suffisent à garantir leur légitimité. Nous avons assimilé chez eux, comme chez H. Poincaré, la simplicité des enchaînements mathématiques soit au petit nombre de leurs « parties » (39), soit au petit nombre des opérations qu'ils comportent (40), considérées comme des « éléments » par rapport à leur ensemble. Et quant à la simplicité des notions mathématiques, nous en avons été tentés d'en faire, chez eux, l'équivalent du petit nombre d'opérations manuelles que ces notions représentent (41) (exemple : les notions géométriques, représentant essentiellement une figure à dessiner), ou encore, de « propriétés » qu'elles comportent (42).

Toutes les remarques précédentes qui infirment la possibilité de segmenter l'unité d'une démonstration, en général d'un enchaînement mathématique en « éléments psychologiques », correspondant à d'hypothétiques « parties », déterminées par le fait que chacune répondrait à un seul acte d'appréhension, sont ici valables. En effet, il n'est possible de rapprocher certaines opérations pour les englober dans une « partie » de l'enchaînement qu'au nom d'une certaine

(39) Voir plus haut, p. 296.
(40) Voir plus haut, p. 298.
(41) Voir plus haut, pp. 325, 327, 330.
(42) Voir plus haut, p. 332.

continuité qui les sous-tend. Mais dans toute construction véritablement rationnelle, une telle continuité existe, non seulement entre les opérations d'une « partie » quelconque, mais entre celles de toutes les parties, — si parties il y a. — Dans une construction géométrique par exemple où les opérations manuelles sur lesquelles repose l'argument, sont plus directement accessibles que partout ailleurs, puisqu'elles se traduisent matériellement sur le papier, personne ne met en doute qu'il existe une solidarité profonde entre elles. Elle préexiste aux parties que l'on découvre dans la construction. Grouper les opérations d'une certaine façon plutôt que d'une autre, c'est, justement se rendre compte de ce qui la caractérise, et l'exprimer.

Si, comme les philosophes dont nous venons de parler, on conçoit la simplicité mathématique dans le travail de l'esprit du mathématicien et non, en soi, dans ce qui est qualifié de simple, il faut bien dire que c'est cette solidarité, ce genre de liaison entre les opérations, qui est simple ou ne l'est pas, dans un enchaînement mathématique. Parler seulement du nombre des parties de ce dernier, ou seulement du nombre des opérations, c'est donc un non-sens. Il faudrait, pour qu'on puisse le faire plausiblement, qu'on n'ait en vue que la simplicité matérielle, et, pour ainsi dire « visible » de la construction en question, — la simplicité des signes ou des traits sur le papier, ce que, tout au début de cette étude, nous avons appelé la simplicité d'écriture.

Tout ceci pourrait être répété à propos des notions mathématiques, qui, dans une conception qui les ramène à une juxtaposition d'actes manuels enchaînés par une intention qui les guide (actes toujours plus ou moins directement traduits), peuvent être considérées comme des constructions. Mais, serait-il légitime de compter à part chacune des opérations en tant que telle, — et non pour son résultat objectif, — que l'on ne pourrait pas, semble-t-il, en tirer des conclusions touchant la simplicité de leur ensemble ; et cela, même en regardant cet ensemble comme une pure juxtaposition, et non pas comme une synthèse. Car il faudrait, alors, comme l'a tenté Lemoine (43), attribuer à chaque opération un coefficient de simplicité. Toutes, en effet, ne sauraient

(43) **Lemoine.** « De la Mesure de la Simplicité dans les constructions mathématiques ».

être équivalentes. Par exemple, il peut paraître plus simple, dans une construction géométrique, de tirer un trait quelconque avec une règle, que de mener une perpendiculaire à une droite donnée, ou de procéder à je ne sais quelle autre opération.

Et quoi que l'on fasse, la détermination de ces coefficients serait toujours arbitraire. Ou bien, elle supposerait déjà une théorie achevée de la simplicité (en admettant qu'une telle théorie puisse rendre des services pratiques).

Il y a plus. Les opérations des mathématiques ont beau se réduire, aux yeux de plusieurs philosophes, à des opérations, en dernière analyse, manuelles, elles ne sont pas, actuellement, toutes des opérations manuelles. La plupart ne le sont pas. C'en sont des symboles plus ou moins directs, des symboles d'un degré plus ou moins élevé, comme dirait un Rignano. Il n'est pas possible, là encore, de les tenir pour équivalentes. Il y aurait lieu, de nouveau, de leur attribuer des coefficients de simplicité, et ces coefficients auraient, comme on s'en rend compte, une signification toute différente des premiers ; ils traduiraient une sorte de simplicité logique des opérations et non plus une simplicité matérielle.

Tout ceci n'a, en réalité, pas de sens, puisque, comme nous l'avons dit, il ne s'agit nullement, en bonne logique, de dénombrer les opérations que comporte un enchaînement ou une notion mathématique, une fois qu'on a pris conscience de ce qu'exige une attitude subjectiviste en face du problème de la simplicité. Mais cela sert, semble-t-il, à faire mieux sentir encore les difficultés en même temps que l'inutilité d'une telle démarche. Nous aurions pu appeler « éléments pratiques » (par oppositions aux expressions « éléments logiques » ou « psychologiques »), ceux au petit nombre desquels serait identifiable la simplicité des enchaînements comme des notions, considérées dans la position de ces philosophes pour qui le fondement de la pensée mathématique comme l'essence des constructions qu'elle édifie, est à chercher dans les actes matériels que symbolisent, en dernier ressort, toutes les opérations. Tout ce qui précède montre que, la notion de ces éléments-là, n'est pas plus solide, pas plus légitime que celles que nous avions élaborées auparavant, soit pour rendre compte de la simplicité mathématique chez les Logisticiens, soit pour en expliquer la nature chez H. Poincaré.

Pour M. Brunschvicg, enfin, nous avons vu la simplicité mathématique identifiée avec la parfaite unité « des enchaînements simples » (44).

Cette unité nous est apparue surtout dans l'esprit du mathématicien, dont la fonction même est appelée par l'auteur, une fonction unificatrice. Mais nous ne pouvons pas l'exclure pour cela du fait mathématique (45), car celui-ci n'existe, en tant que tel, que par la collaboration de la raison et de l'expérience. C'est, avons-nous dit, l'unité du raisonnement le plus direct, en ce sens qu'il se rapproche le plus possible, dans sa discursivité, de ce que serait l'appréhension intuitive des conclusions, dès les prémisses (46).

Le fait que cette unité nous est apparue, et cela, surtout dans le raisonnement élémentaire qui semble la réaliser au plus haut degré (47), comme synonyme de rectitude, a attiré notre attention. Et, comme dans toutes les philosophies précédemment passées en revue, nous avions toujours essayé d'attribuer ce caractère d'être « directs », que manifestent certains enchaînements, à la présence, en eux, d'un petit nombre seulement de ce que nous appelions des « éléments », nous avons été tentés d'imaginer, ici encore, une explication analogue. Nous avons ramené la rectitude, et par suite la simplicité des enchaînements mathématiques, au petit nombre de certains « éléments » qui les composeraient dans la pensée de M. Brunschvicg que nous voulions interpréter. Ce ne sont pas, à strictement parler des « éléments psychologiques » ou « esthétiques », non plus que de purs « éléments de pensée logique ». Nous les avons appelés des « éléments rationnels ».

Que sont ces « éléments » ? Ce sont des « actes simples » d'unification de deux jugements au moyen d'un jugement inexprimé que l'un et l'autre extériorisent et, en vertu duquel, on peut passer à un troisième jugement, qui, sans doute, n'est pas nouveau, mais qui, grâce à l'usage que l'intuition en fera, servira à faire « avancer » le raisonnement (48). Plus le choix de ces actes est judicieux, grâce à

(44) Voir plus haut, p. 398-399-409.
(45) Voir plus haut, p. 359.
(46) Voir plus haut, p. 399.
(47) Voir plus haut, p. 387.
(48) Voir plus haut, p. 386-387.

la mise en œuvre de l'intuition mathématique, et moins ils seront nombreux (49), avons-nous remerqué, et plus notre raisonnement se rapprochera du raisonnement élémentaire dans toute l'acception du mot, qui ne comporte qu'un seul acte de cette espèce.

Pour ce qui est des notions mathématiques, envisagées à la lumière des mêmes principes et en conformité avec la même attitude philosophique, nous avons cru être amenés à des conclusions analogues, en ce qui touche leur simplicité. Celle-ci serait, elle aussi, le fait d'un petit nombre d'éléments, les « éléments véritables » d'une notion étant, avons-nous dit, les divers actes d'intériorisation auxquels il procède jusqu'à ce qu'il arrive à l'intériorisation des idées rapprochées dans sa définition (50). Les notions mathématiques, — et les autres aussi, semble-t-il, — sont simples dans la mesure où elles sont directement saisissables, où elles ne présupposent aucune autre notion, où, c'est-à-dire, cette « intériorisation » progressive d'idées dont nous venons de rappeler le rôle, est inutile.

Que vaut cette conception de la simplicité, tant dans les enchaînements que dans les notions mathématiques ? Voilà maintenant ce qu'il y a lieu de se demander. Alors que, chacune des conceptions analogues que nous avions cru, d'abord, tirer de chacune des philosophies mathématiques précédemment examinées, nous est apparue comme nettement insuffisante après une critique plus serrée, celle-ci va-t-elle pouvoir être définitivement maintenue ? Ou, est-elle erronée autant que les autres, fût-ce ou non pour des raisons semblables ?

Les éléments auxquels il faudrait, disions nous, faire appel, sont des actes d'« unification » successifs, des actes d'« intériorisation de deux jugements ou de deux idées par l'intermédiaire d'autres. Il semble, du moins, qu'à relire nos développements explicatifs, il en soit ainsi.

Mais, si l'on se place au point de vue psychologique, il y a, peut-être, à la base de tout raisonnement où le mathématicien sait où il va, à la base de toute notion telle qu'en la définissant le mathématicien sait ce qu'il dit, un acte d'unifi-

(49) Voir plus haut, p. 387.
(50) Voir plus haut, pp. 426-439.

cation, un acte d'« intériorisation d'idées ». Mais il y en a un seul.

Si l'on se place au point de vue logique, il en est de même, dans la mesure où la logique repose sur l'analyse du raisonnement et du jugement réels. Sinon, il faut envisager le raisonnement, de même que la notion, indépendamment de l'esprit qui les conçoit, et alors, on se condamnera à ne saisir d'eux que ce qui les caractérise de l'extérieur : la forme verbale ou graphique. Et il ne peut plus, dans ce cas, être question d'actes d'unification, ni de dynamisme intellectuel, ni de concepts et d'enchaînements de vérités créés (et non contemplés), comme le spécifie à plusieurs reprises M. Brunschvicg.

Au fond, tout en insistant sur le caractère « objectif » des mathématiques, sur leur « valeur de vérité » fondée, en dernier ressort sur une expérience tangible, comme nous l'avons vu, M. Brunschvicg se rapproche beaucoup plus de H. Poincaré que des Logisticiens, par son attitude philosophique. Cela ne fait pas de doute. Et, quand, parfois, il a l'air de placer la simplicité mathématique dans les choses simples, du moins comme nous en avons eu l'impression, c'est, en réalité, dans l'esprit surtout qu'il la place. Les raisonnements simples, par exemple, pour lui, cela peut être quelquefois des raisonnements ardus, difficiles à suivre, ce sont, toujours, des raisonnements qui manifestent au plus haut degré cette loi d'unité, qui est, selon lui, la loi suprême de l'esprit (51). Mais, pour lui, tout raisonnement, tout enchaînement, par le seul fait qu'il est une « synthèse » de jugements, toute notion, par le seul fait, qu'elle est une notion définie à l'aide d'autres notions, à moins qu'elle ne soit conçue immédiatement, est un « tout » jouissant de cette unité sans laquelle nul produit de la pensée scientifique, artistique ou morale n'existe, comme a tenté M. Brunschvicg, de le mettre en relief (52).

Et dans l'unité il ne saurait y avoir de segmentations, d'échelons, d'étapes. Il peut y en avoir dans l'expression de la pensée unifiée, dans l'exposition d'une synthèse de jugements ou d'idées. Cela ne change rien au caractère fon-

(51) **L. Brunschvicg.** « Introduction à la Vie de l'Esprit », p. 155.

(52) **L. Brunschvicg.** « Introduction à la Vie de l'Esprit ».

cier de la synthèse elle-même. Bien plus. Il semble que, pour comprendre ces étapes, dans un enchaînement par exemple, où les vérités ne sont plus seulement juxtaposées, mais, suivant l'expression de l'auteur lui-même, devenues intérieures les unes aux autres (53), on soit obligé de présupposer l'unité qui les lie d'avance dans l'esprit du mathématicien. Sans quoi, leur choix apparaîtrait comme arbitraire, et leur ordre apparaîtrait comme un mystère. Le raisonnement simple, pour M. Brunschvicg, la notion mathématique « simple », cela ne peut donc pas être le raisonnement ou la notion comportant peu d'éléments, dans le sens où nous l'avons conjecturé, c'est-à-dire, supposant, un petit nombre d'actes d'unification partielle des idées, de la part de l'esprit. L'unification des idées, est en effet, de part et d'autre, plus ou moins totale, suivant le degré de perfection du raisonnement ou de la définition. Mais, dans tous les cas, on ne peut la concevoir en « plusieurs actes », même dans un raisonnement compliqué, ou dans une notion des plus complexes. Il faut qu'elle soit « une », sinon nous n'aurions plus affaire à une synthèse. La simplicité du raisonnement ou de la notion, semble bien avoir quand même affaire avec elle. Mais c'est avec sa *qualité,* avec son degré de perfection, et non pas avec le nombre d'actes, nécessaires à l'esprit, soit pour en prendre conscience, soit pour l'expliciter sous une forme logique.

C'est, — si l'on relit les pages que nous avons consacrées à son étude, on s'en rendra facilement compte, — l'idée qui domine notre analyse, semble-t-il. Dans la notion de « raisonnement élémentaire » que nous avons émise (54), dans celle de la rectitude des raisonnements simples par rapport aux autres, partout elle apparaît latente. Et si, nulle part nous ne l'avons formulée, cela vient, semble-t-il, de ce que, trompés déjà par une vue trop superficielle des choses dans les chapitres précédents, sitôt que nous avons rencontré, ici comme là, la notion de rectitude d'un enchaînement mathématique, identifiable avec celle de « simplicité » de cet enchaînement, nous avons éprouvé comme une nécessité de l'expliquer par la présence, en lui, d'un petit nombre d'élé-

(53) **L. Brunschvicg.** « La Modalité du Jugement »,, p. 86 (déjà cité). Voir plus haut, p. 399.

(54) Voir plus haut, p. 387.

ments (55), sans que la question de la légitimité d'une telle explication se pose pour nous. Nous avons, en d'autres termes, posé d'avance qu'il fallait bien, d'une manière ou de l'autre, arriver à mettre en lumière, chez M. Brunschvicg, comme chez les autres auteurs, l'identification de la simplicité mathématique avec le petit nombre d'éléments des choses simples, enchaînements ou notions. Et, ensuite, cela étant implicitement postulé, nous nous sommes ingéniés à fabriquer une notion d'« élément », telle qu'en effet, le petit nombre de ces éléments-là soit inséparable de l'idée de simplicité mathématique, telle que M. Brunschvicg la comprend. Nous ne pouvions manquer d'atteindre le but. Et nous l'avons atteint, en effet. Mais, cela, entraînés que nous étions par une interprétation préconçue, en émettant une fois de plus un non-sens, en donnant une fois de plus, disons le mot, dans l'absurdité. Car la notion d'« éléments » d'un raisonnement, est contradictoire du point de vue d'une théorie philosophique qui fait du raisonnement une « synthèse » de jugements. Tout au plus ces « éléments » auraient pu être les jugements eux-mêmes ; et encore ! le propre d'une « synthèse » c'est d'être quelque chose de différent, qualitativement, de chacun de ses constituants et de leur somme. Le sens de l'enchaînement est bien à chercher, comme nous l'avons fait, en dehors de celui des éléments enchaînés, — le sens de la notion, de même est à chercher en dehors de celui des notions qui servent à la construire, — réside ici et là dans l'effort, inconscient la plupart du temps, de l'esprit vers l'unité de sa conception. Mais ici et là, l'acte unificateur, qu'il se fasse plus ou moins parfaitement, se fait forcément en une fois — si, toutefois il « se fait » toujours, si, c'est-à-dire là où l'on se trouve en présence d'une notion confuse, il ne faut pas admettre qu'il n'a pas lieu du tout.

M. Brunschvicg ne parle pas, dans les construction intellectuelles en général, et, en particulier dans les constructions mathématiques, d'une unité interne comparable à celle d'une œuvre d'art, et qui serait la marque d'une attitude essentiellement « esthétique » de la part du mathématicien. Son « unité », à laquelle la simplicité parfaite s'identifie, est une unité intellectuelle : la loi suprême de l'esprit, comme il dit.

(55) Voir plus haut, p. 387.

Mais cette loi se retrouve pour lui, ailleurs que dans l'activité scientifique, dans toutes les activités, et, entre autres, dans l'activité artistique elle-même. Si bien que, sans confondre leurs points de vue, on peut, semble-t-il, au moins en ce qui concerne la question qui nous occupe, rapprocher M. Brunschvicg de H. Poincaré, suffisamment pour que soit valable ici, tout l'essentiel de la critique que nous avons précédemment faite de la notion d'« éléments psychologiques », telle qu'elle avait été forgée pour ramener la simplicité mathématique, telle que l'entend H. Poincaré, au caractère de ce qui comporte un petit nombre d'éléments. L'unité, réalisée, d'après M. Brunschvicg dans les raisonnements simples (ceux-là même où, comme nous l'avons remarqué, l'activité de l'esprit, essentiellement discursif, se rapproche le plus de l'acte direct de l'intuition), ainsi que dans les notions simples (directement conçues), y est réalisée, pour d'autres raisons, peut-être, mais, en fin de compte comme chez H. Poincaré, par le fait de l'adaptation spontanée de l'esprit à son œuvre. C'est une unité d'ordre dans une création synthétique, au fond une unité d'art. Et nous sommes, semble-t-il, en droit de dire que ces « éléments rationnels », imagines par nous pour « expliquer » la simplicité mathématique chez M. Brunschvicg, sur le modèle de ces autres « éléments », si différents les uns des autres quant à leur teneur, et au petit nombre desquels nous pensions ramener la simplicité mathématique vue à travers diverses philosophies, n'ont pas plus de consistance qu'eux.

Devons-nous donc renoncer définitivement à voir dans la simplicité mathématique, conçue de quelque manière que ce soit, le fait, dans ce qui est dit « simple », de la présence d'un petit nombre d'« éléments » ?

Sans doute, il ne s'agira pas d'« éléments de pensée logique » tels que nous les avions déterminés chez les Logisticiens ; ni d'« éléments » esthétiques, ou psychologiques, ou de ceux qu'en dernier lieu nous avions appelés « rationnels », puisque la notion en est inconcevable. Il ne s'agira pas non plus d'éléments « pratiques », du moins dans une théorie qui, tout en ramenant les opérations mathématiques à des opérations, en dernier ressort, manuelles, reste une théorie « subjectiviste » de la simplicité ; car, comme nous le remarquions, dans ce cas, outre que la liaison entre les opérations entre en ligne de compte, ces opérations elles-

mêmes n'ont pas toutes la même valeur. Mais n'y a-t-il vraiment aucune conception de la simplicité mathématique dans laquelle ces considérations-là n'entrent pas ? Et, s'il en existe une, est-elle vraiment sans aucun lien avec toutes celles que nous avons examinées au cours de ces pages, et que nous avons assimilées tour à tour à l'identification de ce qui est simple avec ce qui a peu d'éléments, sans que notre interprétation ait été, semble-t-il, une seule fois, satisfaisante ?

Il y aurait la conception qui ferait de la simplicité mathématique uniquement une simplicité d'écriture ; conception dans laquelle, par conséquent, la pensée vivante du mathématicien n'importe pas ; dans laquelle les opérations mathématiques qui comptent, ce sont celles que traduisent des signes, dans laquelle, enfin, un enchaînement ou une notion mathématique est, avant tout, une suite de signes (mots ou signes algébriques, cela n'a pas d'importance). Dans une telle conception, non seulement l'expression

$$y^2 = k$$

est incontestablement plus simple que

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

qui, d'après les valeurs attribuées à y et à k, lui est équivalente quand au sens), chose dont chacun se doute bien sans qu'on le lui explique, semble-t-il, mais encore, une expression telle que

$$y = \log x$$

est aussi simple que $y = 2x$, et plus simple que :

$$17 = (5 \times 3) + 2$$

ce qui, au premier abord, ne peut manquer de choquer, et qu'on n'admet qu'après avoir bien séparé l'écriture de la pensée.

Une telle conception est-elle représentée dans quelqu'une des philosophies mathématiques que nous avons passées en revue ?

Sans doute, nous ne l'avons pas notée, occupés que nous étions inconsciemment, à mettre, toujours, dans les concepts mathématiques, — même tels que les présentent les moins « psychologues » des théoriciens des science de l'ordre et du nombre, — un minimum de « pensée ». Sentant bien que cette pensée ne pouvait être une pensée réelle, nous nous sommes contentés de l'appeler « pensée logique », « pensée impersonnelle », sans nous rendre compte que, tant que nous

persisterions à vouloir en faire une pensée quelconque, il faudrait bien qu'elle ait quelqu'attache avec la pensée réelle ; qu'il faudrait bien, par conséquent, que la théorie logistique de la simplicité mathématique, soit un tout petit peu, malgré elle, une théorie « subjectiviste ». Mais si nous voulons y regarder de près, nous ne tarderons pas à reconnaître que toutes les difficultés dont nous nous sommes embarrassés en voulant, comme à toute force, interpréter en dehors d'elle ce que disent les Logisticiens de la simplicité mathématique, semblent aussitôt s'aplanir, si nous essayons de l'interpréter conformément à une idée de la simplicité conçue seulement comme simplicité d'écriture.

Les systèmes d'axiomes les plus simples seront, tout bonnement, ceux qui réunissent le moins grand nombre d'axiomes, indépendamment, cela s'entend, du contenu de ceux-ci, et même de leurs ressemblances formelles — chaque axiome n'étant rien de plus, du point de vue de l'écriture du système qu'une formule numérotée ; un élément, ici nous pouvons employer le mot. La théorie dite « absolutiste » de la grandeur sera « plus simple » que la théorie dite « relativiste », par le seul fait qu'elle est basée sur quatre axiomes au lieu de huit. (On serait presque tenté de dire qu'elle est deux fois plus simple. Si, en effet, la simplicité devient, dans certains cas, uniquement affaire de nombre d'éléments, on doit, en bonne logique, pouvoir lui appliquer les rapports numériques). La théorie de l'espace la plus simple sera celle qui comportera le plus petit nombre d'axiomes. Couturat le dit d'ailleurs lui-même ; une théorie qui en admet dix-neuf comme celle de l'espace ordinaire, est, pour lui, logiquement, c'est-à-dire mathématiquement, moins simple qu'une théorie qui n'en admet que dix-sept, comme celle de l'espace projectif absolu (56).

Il considère aussi parfois, il est vrai, le nombre d'axiomes d'un système par rapport à l'étendue du domaine mathématique qu'il permet d'embrasser (57). Mais, outre que cela est rare, on peut dire que là, sans aucun doute, ce n'est plus uniquement la simplicité « objective » du donné mathématique qui est en question. Les Logisticiens eux-mêmes ne peu-

(56) **L. Couturat.** « Les Principes des Mathématiques », (déjà cité). Voir plus haut, p. 204.

(57) Voir plus haut, pp. 169-170.

vent se défendre d'être quelquefois séduits par la pensée réelle, qui dépasse la « formule », et de juger celle-ci de son point de vue. Mais ce n'est pas leur point de vue habituel. Ce n'est pas, surtout, leur point de vue systématique, celui qu'ils veulent ne pas trahir.

Nous avons vu, tout au long, chez eux, la plus grande simplicité, d'une notion par rapport à une autre identifiée à son antériorité logique. L'antériorité logique, dira-t-on, n'est pas une question d'écriture. Elle est affaire de concevabilité. Une notion n'est pas antérieure à une autre parce que cette autre se définit au moyen d'elle, mais, au contraire, cette autre se définit au moyen d'elle, parce que la première lui est antérieure. Si la notion antérieure à l'autre est toujours la plus simple, il s'agit donc bien ici de simplicité logique. Mais, s'exprimer ainsi, ce serait oublier la très étroite connexion, chez les Logisticiens, entre la pensée et les signes qui la traduisent. Cette connexion va facilement jusqu'à la confusion complète. Et, pour ce qui est de la simplicité il semble qu'il n'y ait pas à hésiter. La définition verbale exacte d'une notion se confond avec la notion elle-même ; et l'antériorité logique, dans l'esprit de la doctrine, est, très naturellement réduite au seul fait du caractère verbalement primitif d'une définition par rapport à l'autre. La notion « antérieure » à une autre, ce serait la notion telle que la définition complète de cette autre, comprenne tous les mots, tous les signes (éléments de *sa définition*), plus d'autres mots, d'autres signes. Et, de deux notions quelconques, il semble que l'on puisse dire, toujours, dans le même esprit, que la plus simple est celle qui se définit exactement, à l'aide du moins grand nombre de mots.

Ces considérations du nombre de mots servant à définir une notion, que nous venons de montrer comme s'appliquant d'une manière plausible au problème de la simplicité, paraissent beaucoup plus plausibles encore, si l'on se rappelle qu'elles sont familières aux Logisticiens. Ceux-ci, en effet, les ont plus d'une fois fait intervenir dans leurs spéculations. Il suffit de rappeler, chez eux, cette idée d'objets qui ne seraient définissables qu'à l'aide d'un nombre infini de mots, idée entraînant qu'il y a davantage d'objets pensables que de nombres entiers — comme semble l'avoir démontré Cantor à propos des points de l'espace. On peut rappeler encore leur antinomies : l'antinomie citée par Russell

montrant que le plus petit nombre entier que l'on ne peut pas définir par une phrase formée de moins de cent mots français, existe, et n'existe pas ; antinomie de Richard (58) concernant l'ensemble E de tous les nombres décimaux que l'on peut définir par un nombre fini de mots, et auquel un nombre N, défini d'une certaine manière (59) appartient et n'appartient pas.

Il ne semble donc pas que l'on trahisse leur pensée en faisant de la simplicité mathématique, telle qu'ils la conçoivent une pure simplicité d'écriture, identique au petit nombre des éléments des choses simples, c'est-à-dire, ici, des mots, et, en général, des signes. En ouvrant le fameux « Formulaire de Mathématiques », de Péano, on fortifierait encore en soi, la conviction qu'au fond, pour les Logisticiens, la simplicité mathématique n'est que cela. On y trouve des phrases comme celle-ci : « La seule loi qui règle les notations du Formulaire, c'est qu'elles soient le plus simples possibles, et les plus précises pour représenter les propositions dont il s'agit » (60) ; « Après avoir écrit une formule en symboles, il convient de lui appliquer quelques transformations de logique. On verra ainsi, s'il est possible de la réduire à une forme plus simple, et l'on reconnaît facilement si la formule n'est pas bien écrite » (61) ; « Une définition n'a pas besoin d'être prouvée. Elle est l'effet de notre volonté de vouloir représenter un groupe de signes par une expression plus simple » (62) « La question posée tant de fois : « peut-on définir x » n'est pas à la rigueur bien posée. On peut la mettre sous la forme : « peut-on définir x avec les signes a, b, c ? » « peut-on avec les signes a, b, c, former un groupe de signes égal à x ? » (63).

On devra étendre cette conception de la simplicité, malgré la répugnance qu'on peut avoir, au premier abord, à le faire, aux raisonnements, aux « enchaînements » mathématiques dirigés vers un but, et qu'on se représente, semble-t-il,

---

(58) « Revue générale des Sciences », 30 juin 1905.

(59) « Si la n^e décimale du n^e nombre de l'ensemble E est 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, la n^e décimale de N sera: 1; 2; 3, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1. »

(60) **Péano**. « Formulaire de Mathématiques », Préface (III).

(61) **Péano**. Même ouvrage, Préface (VI).

(62) **Péano**. Idem, p. 49.

(63) **Péano**. Idem, p. 50.

comme animés d'une pensée directrice. Il n'y a, en effet, aucune raison de ne pas le faire, dès que l'on pose, comme paraissent le faire les Logisticiens, la solidarité parfaite de la pensée et de l'écriture, ou plutôt, la réduction de toutes les opérations mathématiques à des opérations d'écriture régie par des règles fixes.

Le seul cas, donc, dans lequel on puisse admettre, l'identification de la simplicité mathématique avec le petit nombre des éléments des concepts et constructions mathématiques, est celui, où, comme semblent le faire les Logisticiens, on identifie ces concepts et ces constructions avec leur expression écrite, considérant comme élément chaque signe d'écriture, ou chaque mot. Simplicité tout objective, placée dans les choses elles-mêmes, en ce qu'elles ont de plus visible, simplicité « d'écriture » dans toute l'acception du mot, elle ne peut manquer, au premier abord de choquer, surtout quand on l'attribue à des démonstrations. C'est peut-être la raison pour laquelle, tout au long de notre étude, nous avons cherché des biais, des compromis, comme pour éviter de la reconnaître dans l'esprit des Logisticiens. Mais il apparaît, à l'examen plus judicieux, qu'on ne peut guère ne pas voir, en elle la simplicité mathématique telle qu'ils la conçoivent.

Mais elle ne résout pas la question de la simplicité mathématique en général. Si, en effet, on hésite encore à reconnaître en elle, dans tous les cas qui se présentent, en mathématique, la simplicité telle que les Logisticiens la conçoivent, il est tout à fait impossible de l'assimiler, à plus forte raison, à cette simplicité, satisfaction esthétique du mathématicien, dont parle H. Poincaré, ou à celle que M. Brunschvicg place dans l'unité interne d'une notion, d'un raisonnement, ou d'un corps de vérités dépassant en étendue un raisonnement On ne peut, non plus pas trop songer à la rapprocher de cette simplicité pratique, ayant trait aux opérations mathématiques en tant qu'opérations manuelles. Celle-ci est encore une simplicité pour le mathématicien, et non pas une simplicité dans les objets mathématiques eux-mêmes. Poser le contraire, ce serait attribuer la réalité aux objets mathématiques en tant qu'objets matériels, — ce qu'aucun philosophe n'a songé à faire.

Et il est impossible de laisser de côté ces autres acceptions de la notion de simplicité, — surtout les deux premières. Car, si l'on se reporte aux premières pages de cette étude,

il semble que la simplicité a, dans ces acceptions-là une place, en mathématiques, au moins aussi grande qu'en tant que simplicité d'écriture, et que, si elle y joue un rôle de guide pour l'esprit, ce soit surtout, sinon exclusivement dans ces acceptions (que l'on peut d'ailleurs rapprocher l'une de l'autre comme nous l'avons dit plus haut).

La question reste donc ouverte.

CHAPITRE XXI

INSUFFISANCE DE LA CONCLUSION SUIVANT LAQUELLE IL Y AURAIT PLUSIEURS SIMPLICITES MATHEMATIQUES, IRREDUCTIBLES LES UNES AUX AUTRES

Il ressort nettement de ce qui précède que l'identification de la simplicité avec la présence, dans les choses simples, d'un petit nombre d'éléments, n'est légitime que dans le seul cas de la simplicité d'écriture. Dans les autres cas, la notion même d'« éléments », telle que nous avions d'abord cherché à la déterminer, s'est révélée inconcevable.

Devons-nous, en suite de cela, nous résigner à reconnaître, avec les conséquences que cela entraîne, qu'il n'y a pas une simplicité mathématique, mais plusieurs, — irréductibles les unes aux autres ? Telle est la manière dont le problème se pose maintenant.

Rappelons encore quelles seraient ces simplicités.

Il y aurait d'abord celle, due en effet au petit nombre des éléments des choses simples, ces éléments étant, en l'espèce, des signes conventionnels de représentation — la simplicité d'écriture, s'appliquant aux enchaînements ainsi qu'aux notions mathématiques considérés indépendamment de la pensée vivante du mathématicien.

Il y aurait (regardant l'esprit du mathématicien, et non plus les choses), d'abord, la simplicité esthétique, consistant en l'heureuse aisance, qui accompagne, chez lui, la conception de certaines notions particulièrement lumineuses, comme la création ou la compréhension de certaines démonstrations, de certains « enchaînements », aux « parties harmonieusement balancées », comme dit H. Poincaré. C'est la simplicité de l'ordre compris et senti. Il y aurait encore une simplicité quasi-synonyme de la facilité des opérations manuelles véritablement exécutées en géométrie ou symbolisées par les opérations de l'arithmétique et de l'algèbre. Enfin, il y aurait une simplicité consistant en la parfaite unité des choses

simples (notions ou enchaînements), unité par laquelle elles sont, sans doute « simples » pour le mathématicien, mais que l'on peut, en même temps, considérer comme reposant sur quelque chose d'objectif, car, pour M. Brunschvicg qui en fait une notion importante de sa philosophie, les mathématiques tirent leur « valeur de vérité » d'une expérience qui a trait à un « donné ». La raison « collabore » avec cette expérience, l'interprète et la prolonge, mais ne se substitue pas à elle.

Comme nous l'avons déjà laissé entrevoir, il ne serait pas impossible de rapprocher cette simplicité dans l'unité de la simplicité esthétique. On pourrait insister sur le sentiment d'unité que ne laisse pas de produire tout ordre harmonieux perçu dans une démonstration, ou senti plus obscurément dans la structure d'une notion comme celle d'espace euclidien ; rappeler que, pour H. Poincaré, « ce qui nous donne dans une solution, dans une démonstration, le sentiment de l'élégance » — ce sentiment inséparable de la simplicité que recherche le mathématicien, — « c'est tout ce qui y met de l'ordre, tout ce qui leur donne de l'unité » (1). On pourrait aussi faire remarquer que cette « unité », que M. Brunschvicg place dans ce qu'il appelle « l'intériorité réciproque des idées », est, malgré le fondement objectif sur lequel elle peut reposer dans l'expérience initiale, une unité avant tout, dans l'esprit du mathématicien ; qu'elle est, au fond, surtout quand il s'agit d'un raisonnement, une unité d'ordre, une unité « esthétique », permettant « d'y voir clair et d'en comprendre l'ensemble en même temps que les détails » (2), selon l'expression de H. Poincaré, avec un sentiment d'aisance certain ; qu'enfin, pour M. Brunschvicg, comme pour H. Poincaré, le simple, en mathématiques, conçu sous la forme soit surtout de « l'un » soit surtout du « beau », est le caractère de ce qui, parmi les différentes expressions possibles du concevable, s'impose à l'intuition. Et l'on notera qu'en cela, l'un et l'autre se rapprochent de Descartes.

On n'aurait, finalement, après cette fusion des notions de la simplicité d'une part dans l'élégance, de l'autre dans l'unité, affaire qu'à trois simplicités apparemment irréductibles l'une à l'autre :

---

(1) **H. Poincaré.** « Science et Méthode, p. 25 (déjà cité).
(2) **H. Poincaré.** « Science et Méthode », p. 25.

La simplicité d'écriture, la seule identifiable à la présence, dans les choses simples (confondues avec leur traduction écrite), d'un petit nombre d'éléments ;

la simplicité « psychologique », à la fois esthétique et rationnelle, en laquelle se confondraient, pour le mathématicien, « l'un » et « le beau », en un commun sentiment d'évidence, d'aisance et d'harmonie, disons le mot, dans le sentiment de la « perfection » ;

la simplicité « pratique » des opérations de construction et des opérations arithmétiques ou algébriques, en tant qu'opérations manuelles, réalisées ou symbolisées.

Cela réduit un tant soit peu la complexité, s'il est permis de s'exprimer ainsi, de la notion de simplicité, telle qu'elle nous était apparue tout au début de cette étude (4). Mais cela semble, en même temps, détruire l'espoir que nous avions eu, de trouver de la simplicité en mathématiques une acception, sinon « simple », du moins unique ; une acception suffisamment large et riche pour englober les autres. Le progrès que cela constitue, toujours du point de vue de celui qui ne peut se défendre d'un sentiment de gêne devant la complexité d'une notion aussi banale, et, malgré tout, aussi claire, n'est qu'un leurre. Car, tandis que le nombre des acceptions de la simplicité diminue, on acquier l'impression de plus en plus nette qu'il n'y a pas moyen d'aller plus loin dans cette unification à laquelle on aspire. La dernière étape qui nous rapproche d'elle, — nous pourrions presque dire, la dernière concession qu'il a été possible de lui faire, — a été faite quand nous avons, en forçant peut-être un peu la pensée des deux philosophes, reconnu dans la simplicité esthétique de H. Poincaré et la simplicité dans l'unité telle que la conçoit M. Brunschvicg, sinon une même simplicité, du moins, deux espèces fort voisines d'une même simplicité, que nous avons appelée psychologique.

Nos trois simplicités suffiraient à justifier les divers emplois que nous avons, dès le début passés en revue, de « la » simplicité en mathématiques, ainsi que ce rôle de guide, que nous lui avons vu jouer en maintes circonstances (4).

La simplicité d'écriture est celle que recherche le mathématicien toutes les fois que, soit par une double division

(3) Voir plus haut, pp. 83 et suivantes.
(4) Voir plus haut, Chapitres II et III (1re partie).

opérée sur des termes qui se correspondent (comme quand il s'agit d'une fraction ou d'une égalité), soit par le remplacement des termes par d'autres, plus synthétiques quant à leur contenu, il « simplifie » une expression quelconque. Une grande quantité de simplifications, pour ne pas dire toutes, ne sont pas autre chose que cela. Et, s'il faut admettre avec M. Brunschvicg, que la simplicité d'écriture n'est pas la simplicité de pensée (5), — et tous ceux qui ne réduisent pas les mathématiques à un pur jeu de symboles, uniquement régi par les règles de la logique, sont d'accord sur ce point, — il faut reconnaître aussi que, dans bien des cas au moins, la simplicité d'écriture entraîne celle de la pensée.

En effet, le mathématicien oublie volontiers, momentanément, le contenu plus ou moins compliqué des nouveaux symboles qu'il a créés. Il est tout entier aux transformations que leur introduction permet, désormais. De ces transformations, qui sont des transformations d'écriture, il fera surgir quelque formule, d'autant plus expressive et d'autant plus facile à manier que plus simple, elle aussi quant à son écriture. Une fois en possession de cette formule, c'est sur elle qu'il raisonnera, et bien souvent, sinon toujours, la simplicité, — d'écriture, — de la formule, entraînera la simplicité du raisonnement, — qui, si on voit en celui-ci autre chose qu'un jeu automatique de symboles, — est une simplicité psychologique, une simplicité de pensée. Nous en voyons un exemple dans l'étude, très élémentaire, de la résolution classique de l'équation du deuxième degré à une inconnue, déjà citée. On se rappelle la formule à laquelle on aboutit, grâce à des simplifications d'écriture, obtenues au prix de la simplification du « sens » des symboles :

$$y^2 = k \qquad \text{ou} \qquad y = \sqrt{k}$$

La simplicité de cette formule permet de raisonner, sur elle, simplement. Comme on le sait y est, par convention, égal à $x + \frac{p}{2}$. Ce qui donne pour x, par une nouvelle transformation d'écriture de la formule ci-dessus :

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{k}$$

---

(5) **L. Brunschvicg**. « Les Etapes de la Philosophie mathématique » p. 493 (déjà cité). Voir plus haut, p. 344.

Le seul aspect de cette expression, parce qu'elle est « simple » est suggestif, et permet une « discussion » aisée et claire de l'équation proposée. Il met en évidence que la solution de cette équation, — l'inconnue — est égale à une quantité fixe, déduite des coefficients (peu nous importe comment, pour l'instant), augmentée de la racine d'une certaine quantité, connue sans doute, mais dont on peut avoir oublié la valeur. On n'a pas besoin de la connaître pour raisonner. Selon que la quantité, quelle qu'elle soit, sera positive, nulle ou négative (et ce sont là les trois seuls cas qui peuvent, logiquement, se présenter), elle aura une racine non nulle, ou elle aura une racine nulle, ou n'admettra pas de racine, et l'équation proposée admettra deux solutions, ou une seule, ou aucune.

Cette discussion très simple découle immédiatement de l'aspect de la formule à laquelle on a abouti, grâce à des simplifications d'écriture. C'est la présence du terme $\sqrt{k}$ qui nous en donne l'idée. Il est temps, ensuite, de rétablir l'expression de la valeur de k en fonction des coefficients de l'équation proposée et d'examiner ce à quoi l'alternative de $k < o$, $k = o$, ou $k > o$, correspond pour ces coefficients.

La simplicité pratique, elle, n'aurait, malgré l'apparence, rien à voir avec celle de l'écriture. Il ne s'agirait, en effet, pas de la simplicité placée dans les choses simples elles-mêmes, et réduisible au petit nombre des éléments qui les composent, mais d'une simplicité en nous, qui fait que, pour nous, les choses simples sont simples : Si l'on veut, il s'agit d'une certaine aisance opératoire, regardant ces opérations manuelles sur lesquelles, en dernier ressort, se fondent toutes les mathématiques aux yeux de plusieurs philosophes. Il sera, par exemple, plus simple de tirer un trait que de tracer une ligne brisée, indépendamment du nombre d'opérations que chaque dessin peut comporter, car, encore une fois, il n'est pas question de donner à chaque opération un coefficient de simplicité comme le voudrait M. Lemoine, ce qui supposerait un « élément » opératoire forcément arbitraire, et ramènerait finalement la notion de simplicité à celle de petit nombre d'« éléments ». Il s'agit de juger de la simplicité de chaque dessin, ou de chaque opération concrète de calcul, prise, du point de vue du sujet, dans son tout, en tant qu'opération.

La simplicité des figures géométriques, en particulier, pour-

rait être conçue comme étant de ce type, ainsi que celle de leurs définitions, considérées comme indications du moyen de construire effectivement la figure : par exemple les définitions du triangle, polygone à trois côtés ; du losange, quadrilatère aux côtés tous égaux ; du carré, quadrilatère aux côtés égaux et aux angles droits, etc. Encore faut-il faire attention de ne pas confondre cette simplicité « pratique » des figures, avec la simplicité esthétique qu'elles peuvent devoir à leur aspect (simplicité qui, elle, n'est pas de nature mathématique, semble-t-il, puisque, ceux même qui ont placé la simplicité mathématique dans l'élégance, n'ont pas, apparemment, en vue cette élégance des formes visibles, cette beauté picturale qu'ont certaines figures mathématiques particulièrement régulières).

De même la simplicité des constructions géométriques peut être celle dont il est question ici (toute figure est d'ailleurs une construction, comme nous venons de le rappeler), à condition toutefois qu'on n'envisage pas l'enchaînement des raisons que le mathématicien a de mener telle perpendiculaire après avoir tiré tel trait, après avoir tracé telle circonférence, etc., mais ces opérations en elles-mêmes, comme formant une suite d'actes plus ou moins aisés à réaliser à l'aide de l'équerre, de la règle et du compas. Et il est très plausible que cette préférence, dont nous parlions dans les premiers chapitres, accordée par le mathématicien aux constructions « simples », leur soit, en effet, accordée, bien souvent, sinon la plupart du temps, en vertu de cette simplicité-là, en somme, de cette facilité du dessin.

Enfin, on peut considérer cette simplicité dans les opérations, arithmétiques ou algébriques, à la condition d'envisager celles-ci comme symboles d'opérations manuelles, comme le font certains philosophes. On peut très bien soutenir, par exemple, que l'addition est plus simple que la multiplication, la soustraction que la division, la multiplication (en général), que l'élévation au carré ou surtout à une puissance supérieure à la seconde, mathématiquement, parce qu'elles correspondent, respectivement, à des opérations plus aisées. Il semble, en effet, pratiquement plus simple, de réunir des collections différentes d'objets et de compter le tout, que de compter un certain nombre de collections équivalentes à une collection donnée, de les réunir ensuite, puis de compter le tout ; comme il semble plus simple d'ôter un certain

nombre d'objets à une collection et de compter ceux qui restent, que de répartir les objets d'une collection donnée en un nombre donné de collections, équivalentes entre elles. Or, nous avons vu, au début de cette étude, que l'un des avantages de l'emploi des logarithmes dans les calculs, était justement de simplifier les opérations, en remplaçant une multiplication par une addition, une division par une soustraction, etc... La préférence accordée par le mathématicien à « la » simplicité, pourra, là encore, l'être à une simplicité pratique, de sorte que celle-ci, de même que la simplicité d'écriture, est visée, quand nous disons que la notion de simplicité est, en mathématiques, d'un emploi courant, déterminant la « préférence » pour telle solution, pour tel genre de calcul, pour telle construction, etc...

Mais il semble bien que la plus importante, en mathématiques, des trois simplicités, soit, sans conteste, celle que nous avons appelée psychologique ou esthétique, simplicité résidant, pour le mathématicien, en cette impression d'élégance et d'unité, inséparable des conceptions « simples », qu'elles soient des « enchaînements » ou des « notions ».

Si l'on voulait absolument ne pas confondre élégance et unité, on pourrait dire que la première regarde seulement la sensibilité du mathématicien, tandis que l'unité est, à la fois objet de sa sensibilité et de sa raison. Mais il est trop difficile de séparer, en mathématiques, ce qui est part de la raison de ce qui est part de cette « sensibilité spéciale » dont parle H. Poincaré, pour que nous insistions sur cette distinction. Dans quelle mesure la seconde se manifeste-t-elle toujours dans les œuvres de la première ? Il semble que nulle part, il n'y a lieu, mieux qu'en mathématiques, d'utiliser la fameuse affirmation platonicienne dans toute son éloquente concision : « Le Beau est la Splendeur du Vrai » (6). Il faut cela s'entend, donner à ce mot « vrai », non le sens de « logique » seulement, mais le sens de « rationnel » que lui donne M. Brunschvicg ; le sens de vivant de la vie même de l'esprit (7).

Cette simplicité psychologique, c'est, par excellence, celle des enchaînements. C'est la seule qui pourrait, semble-t-il,

(6) « Le Beau est la Splendeur du Vrai », formule traditionnelle attribuée au platonisme.

(7) L. **Brunschvicg**. « Introduction à la Vie de l'Esprit ».

servir à rendre compte de la préférence accordée à un enchaînement plutôt qu'à l'autre. Et, même s'il s'agit d'un enchaînement tenu pour préférable soit parce qu'il est nettement plus court qu'un autre, soit parce que s'y succèdent des opérations, pratiquement « simples » à exécuter, il faut, semble-t-il, à ces raisons qui le rendent avantageux aux yeux du mathématicien, ajouter sa simplicité en tant qu'enchaînement. Par là, nous voulons dire la simplicité due, non plus au petit nombre de ses signes d'écriture, ni à la facilité pratique de ses opérations, mais à la qualité de la liaison entre les idées signifiées (qui est une liaison rationnelle), — voire même entre les signes pris comme des individus absolus, s'il s'agit d'algèbre. — ou entre les opérations faites ; à ce qui rend clair pour l'intelligence, en même temps que satisfaisant pour ce besoin esthétique d'harmonie dont il est question chez H. Poincaré, l'ordre et le groupement de ces idées ou de ces opérations. Car c'est cela, qui, apparemment, du point de vue mathtmatique, constitue l'essence d'un enchaînement. Nous disions, plus haut, que la simplicité d'écriture, sans doute à juste titre à distinguer de celle de la pensée, entraîne toutefois souvent celle-ci, au moins dans une certaine mesure. La « simplicité de la pensée », que M. Brunschvicg avait en vue en faisant cette distinction (8), c'est celle dont nous parlons en ce moment. C'est la simplicité que nous avons appelée « psychologique ».

Il n'y a guère que les Logisticiens, qui, systématiquement, ne lui font pas de place dans leur philosophie. Cela vient, c'est évident, de ce qu'ils placent la simplicité uniquement dans l'objet. Les philosophes qui voient l'essence des mathématiques, pourtant, dans les opérations pratiques qui sont à la base de leur symbolisme, semblent, eux, dans la simplicité des raisonnements et des démonstrations, voir, en premier lieu, celle dont il est question ici. M. Goblot est, en cela, très près de H. Poincaré quant à l'esprit de sa doctrine. Sa théorie du raisonnement en est une preuve, si on la regarde de près. La simplicité pratique des constructions géométriques ou des opérations arithmétiques, se surajoute, chez lui, à celle que nous disons « psychologique », mais ne la masque pas.

---

(8) **L. Brunschvicg**. « Les Etapes de la Philosophie mathématique », p. 493. (Déjà cité.) Voir plus haut, p. 344.

On la retrouve, cette simplicité, dans les notions mathématiques simples et dans leurs définitions, toutes les fois qu'on les envisage comme des constructions purement intellectuelles. Il est difficile, quand il s'agit de notions de figures géométriques qu'on peut tracer, que, même, en général, leurs définitions permettent avant tout de tracer, de déterminer où commence la conception purement intellectuelle et où finit l'intuition mécanique du dessin. Mais dès qu'il est question d'autres notions, cela l'est déjà beaucoup moins. Il est certain que la simplicité d'une notion mathématique comme celle de l'« espace » géométrique, est, avant tout une simplicité psychologique. C'est l'aisance avec laquelle l'esprit conçoit ce qui lui est le plus intuitif.

Nous avons, à propos de la notion d'espace chez H. Poincaré, et, tout au début de cette étude, à propos de la résolution des équations par la méthode des radicaux, en l'occasion de rencontrer l'idée de « groupe », et de parler de la simplicité d'un groupe. La simplicité d'un groupe, on s'en souvient (9), tient à sa structure, c'est-à-dire, à la manière dont il peut être décomposé en sous-groupes — c'est-à-dire, en d'autres termes, à quelque chose de donné, qu'il n'est pas eu le pouvoir du mathématicien de changer. Un groupe, avons-nous dit (10), est une réalité, et l'ordre qui y règne, et dont la perfection en fait, justement, la simplicité, est un ordre objectif. C'est vrai. Mais cela n'empêche nullement la simplicité de cet ordre d'être une simplicité « subjective ». Le groupe peut servir à former une fonction résolvante « simple », ou constituer la base mathématique d'une notion simple, par exemple, d'espace, à cause de sa structure, qui est un donné. La fonction est simple, ou la notion d'espace est simple parce que le groupe a telle ou telle structure ; c'est une affaire entendue. Mais cela n'empêche pas que, en disant qu'elle est « simple », — à moins, comme cela se pourrait dans le premier cas, que l'on n'ait en vue une simplicité d'écriture, — on veut parler de l'aisance avec laquelle la conçoit le mathématicien, on veut dire qu'elle est, selon une expression de M. Brunschvicg : « intellectuellement plus simple » (11). Et.

(9) Voir plus haut, p. 92.

(10) L. **Brunschvicg**. « Les Etapes de la Philosophie mathématique, p. 520.

même si c'est le groupe lui-même qu'on envisage plus particulièrement, sans songer à sa connexion avec la formation d'une certaine fonction ou avec la notion de l'espace, et qu'on dise qu'« il est simple » parce qu'il est parfaitement ordonné, on ne confond pas la notion de simplicité avec quelque chose d'objectif. Ce donné objectif est la cause qui, en la circonstance, fait naître en nous cette notion. Nous le notons. Mais la notion de simplicité reste dans cette impression d'unité et de clarté que procure au mathématicien la compréhension de l'ordre. C'est parce que l'ordre dans sa perfection produit cette impression spéciale, aussi nette qu'une évidence, que nous l'appelons « simple ».

Sans doute, la simplicité d'écriture, de même que la simplicité pratique, comptent-elles quand il s'agit pour le mathématicien de « préférer » telle solution ou telle construction ou tel calcul. Mais, pour ce qui est du rôle (de beaucoup plus important), de guide, que nous avons vu, au début, échoir, en mathématiques, à la « notion de simplicité », il semble que ce soit, à peu près uniquement la simplicité que nous avons appelée « psychologique », qui le joue. Les deux autres peuvent bien intervenir, après coup, pour décider d'une préférence, en somme, de détail. La première peut même, — l'œuvre d'un Péano et de ses collaborateurs, en serait la preuve, — paraître assez précieuse pour que des penseurs, d'ailleurs mathématiciens, s'attachent, une fois le travail d'invention mathématique achevé, à « transcrire, en les ramenant à leur expression la plus simple et la plus claire, les principes de la science » (12). C'est là, peut-être, un des principaux mérites de la Logistique, comme le reconnaît M. Brunschvicg, d'accord, en cela, avec Vailati qu'il cite (13). Mais ces transcriptions ne servent pas à l'invention en mathématiques ; elles ne sont pas constructives. Elles ne sont pas indispensables au développement, à la vie même de la science. Et la simplicité dont l'influence obscure, mais puissante, aide le mathématicien à trouver sa voie, à choisir, par exemple, des coefficients en apparence arbitraires et même

(12) **L. Brunschvicg.** Même ouvrage, p. 381.

(13) **Vailati.** « De quelques Caractères du Mouvement philosophique contemporain en Italie ». « Revue du Mois », 1907, t. I. p. 173.

compliqués (14) ; cette simplicité qui dépasse celle du « cas » qu'il a sous les yeux, et vers laquelle il « tend » comme vers un idéal ; dont le pressentiment lui fait venir à l'esprit, sans qu'il sache pourquoi, telle ou telle analogie intéressante qui, tout d'un coup, éclaire vivement un problème demeuré jusqu'alors embarrasé ; cette simplicité qui n'est, au fond, que la marque psychologique du « plus rationnel », ou plutôt du « parfaitement rationnel », c'est celle dont nous avons parlé en troisième lieu. C'est celle qui tient à la sensibilité esthétique du mathématicien autant qu'à son intelligence ; celle que M. Brunschvicg voit dans l'« unité » vers laquelle tend constamment le dynamisme de l'esprit, par une progressive intériorisation des idées ; celle que H. Poincaré voit dans l'élégance interne des constructions, laquelle procède du sentiment de l'ordre, c'est-à-dire de l'unité psychologique : facilité de comprendre en même temps l'ensemble et les détails, sentiment que chacun de ceux-ci est à sa place, qu'aucun n'est de trop, qu'aucun ne manque. Nous pensons traduire à la fois ces deux interprétations en disant de cette simplicité psychologique, de ce guide du mathématicien si on admet que le « simple » joue, en effet, un rôle de guide, c'est : le sentiment, ou plutôt l'intuition, de la perfection. Et même dans le cas où, par exemple dans la résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, des simplifications heureuses, qui sont des simplifications d'écriture, se succèdent pour donner du problème posé la solution à la fois, semble-t-il, la plus rapide et la plus élégante, ce n'est pas la notion d'une simplicité d'écriture qui a pu servir de guide au mathématicien. Il aurait, en effet, pu trouver une quantité d'autres combinaisons qui auraient mis l'équation proposée sous une forme également concise. Si, dans cette circonstance, la conscience plus ou moins obscure d'une « simplicité » l'a dirigé dans son invention, cela n'a pu être que celle de l'enchaînement des formules, c'est-à-dire celle d'une simplicité à la fois rationnelle et esthétique, d'une simplicité de pensée, — de celle dont nous venons de parler dans tout ce qui précède immédiatement ce exemple.

D'après tout cela, en résumé, on ne saurait parler de « la » simplicité, en mathématiques. Il faudrait préciser de laquelle

(14) Voir plus haut ce que nous avons dit de la résolution des équations par la méthode des radicaux (chap. III, Ire partie).

il s'agit, car toutes les trois, — simplicité d'écriture, simplicité pratique, simplicité psychologique, — y auraient, comme nous le disions, une place, du moins aux yeux de ceux qu'aucune position philosophique trop peu souple, n'inclinerait à en méconnaître, à priori, deux, au profit d'une seule. Et si l'on admet que l'idée de simplicité joue dans l'invention mathématique un rôle directeur, parfois, il faudrait, semble-t-il, réserver ce rôle à la simplicité « psychologique ». Toutes les fois, en effet, qu'une formule simple est recherchée, c'est en vue de la simplicité qu'elle permet d'apporter dans les enchaînements qui partent d'elle. Les autres simplicités ne seraient, en mathématiques, que d'un emploi occasionnel, parfois seules, mais, le plus souvent aux côtés de la simplicité psychologique avec laquelle on est quelquefois tenté de les confondre. Mais, elles restent, toutes les trois irréductiblement différentes l'une de l'autre. Et leur collaboration, pourtant remarquable tant dans les constructions géométriques que dans les enchaînements algébriques, ne serait, en somme, qu'un fait de pur hasard. Telles sont les conclusions auxquelles semble nous conduire le rejet de cette identification, reconnue illusoire, de « la » simplicité, dans tous les cas, avec la présence dans ce qu'on appelle « simple » d'un petit nombre d'éléments. Devons-nous les accepter définitivement ? telle est la question qui, maintenant, se pose.

A première vue, nous pourrions les accepter. Rien, en elles, en effet, ne mérite, comme cette notion d'éléments de pensée, d'abord imaginée par nous sous différentes formes, ce reproche d'inconcevabilité qui condamne sans appel une hypothèse.

Elles pourraient, à la rigueur, marquer le terme de notre enquête sur la nature de la simplicité en mathématiques. Mais ce ne serait, nous venons de le dire, qu'« à la rigueur ». Elles ont beau, à l'analyse, paraître jusqu'ici plausibles et bien étayées, elles ne laissent l'esprit qu'à demi satisfait. Il y a dans cette idée d'une pluralité de simplicités, quelque chose qui, malgré nous, nous choque.

Nous admettons bien qu'un même nom générique englobe plusieurs espèces irréductibles l'une à l'autre. Mais ces espèces, du seul fait qu'on a pu les désigner toutes d'un même nom global, accusent, sans doute des traits communs importants. Derrière elles, il y a l'idée du « genre » qui est unique. Si cela est vrai d'espèces comprenant des individus con-

crets, comme, par exemple, les divers espèces humaines ou animales, cela l'est encore, semble-t-il, de celles qui ont trait à des notions idéales. Nous savons bien, pour prendre un nouvel exemple, que la beauté morale n'est pas la beauté plastique, et cependant, nous sentons invinciblement que, sous ces deux expressions il existe une idée unique : l'idée de « la » beauté, qui doit pouvoir être caractérisée. Nous ne pouvons, sans une certaine hésitation, prendre définitivement notre parti du fait, soi-disant, de trois simplicités, derrière lesquelles il n'y aurait pas moyen de découvrir une idée unique de « la » simplicité. Le seul fait du même nom de « simplicité » attribué concurramment à ces trois notions « irréductibles l'une à l'autre », que nous avons cru dégager de la critique des chapîtres précédents, nous porte à croire que l'intuition collective, dont il faut tout de même tenir compte, a senti nettement, sous ce que nous nous sommes plus à distinguer, une connexion profonde, qu'un scrupule excessif d'analyse ne nous a pas permis, sans doute, de saisir.

Les trois simplicités dont nous avons relevé l'existence, nous ont paru trois notions carrément différentes. Il est remarquable que, parmi les théoriciens des mathématiques dont nous avons examiné les doctrines, et qui, en tant que philosophes, auraient dû, semble-t-il, être frappés par des différences de signification aussi tranchées d'une même expression verbale employée par eux, pas un n'y ait fait la moindre allusion. On peut, il est vrai, objecter que, chacun concevant en mathématiques, une seule simplicité, négligeait de parler des autres comme de notions étrangères au domaine dont il s'occupait. Toutefois, le fait ne laisse pas de paraître assez important pour mériter d'être signalé. Il y a plus. Jamais les mathématiciens eux-mêmes, en employant, en dehors de toute spéculation philosophique, le mot de « simplicité », n'ont, apparemment senti le besoin d'un surcroît de précision. Sans doute, les traités de mathématiques et les recueils des problèmes solutionnés, ne sont pas des livres de philosophie, justement. Leurs auteurs n'ont nullement l'intention d'apporter des éclaircissements aux apories auxquelles peuvent se heurter soit le logicien soit le psychologue, en réfléchissant sur les notions qu'il y rencontre. Mais malgré tout, il semble que le fait pour les auteurs de tous ces traités, depuis les plus élémentaires jusqu'à ceux destinés à l'enseignement supérieur, de caractériser certaines constructions géo-

métriques, certains démonstrations, certaines définitions, certaines opérations, certaines figures, et que sais-je encore, toujours par le même épithète, sans aucun commentaire, prouve qu'elles jouissent toutes, à leurs yeux à tous, de quelque chose de commun ; qu'elles sont, au moins, capables de produire, jusqu'à un certain point, sur eux tous, la même impression. La cause commune de cette impression, sommes-nous immédiatement tentés de dire, voilà justement ce que nous voulons connaître. Que l'on doive la placer dans les choses, dites simples, ou dans l'esprit qui les juge telles peu importe . Voilà justement ce qui serait « la » simplicité. Quelle est-elle donc ?

Il semble que ce soit bien difficile à dire. — d'autant plus difficile que cette idée du petit nombre des éléments dont toute chose simple, du moins en mathématiques, nous avait paru faite, soit en tant qu'« objet », soit en tant que processus de pensée, s'est, à l'analyse, révélée vide de sens. Après être constamment, tout au long de cette étude, allés au devant de la critique dans le détail — (mais sans nous être préoccupés préalablement d'assurer notre position contre l'objection la plus fondamentale, qu'elle ne pouvait manquer d'opposer à notre affirmation), nous avions cru pouvoir par cette idée du petit nombre des éléments, concilier, en même temps, tout ce qu'il pouvait y avoir de contradictoire dans les conceptions de la simplicité mathtmatique chez les philosophes, et découvrir ce qui faisait, chez les mathématiciens qui l'évoquent fréquemment, l'unité de cette notion de « simplicité ». Mais, à peine cette théorie élaborée, nous nous sommes vus forcés d'en reconnaître l'insuffisance. Nous restons persuadés que nous ne pouvons essayer d'y revenir.

Et cependant, devant l'impression d'incomplétude que laisse la théorie d'une pluralité de simplicités, irréductibles l'une à l'autre, devant le malaise que nous éprouvons à ne pas pouvoir distinguer, derrière cette pluralité, ou plutôt, au-dessus » d'elle, une notion de « la » simplicité, dont les trois notions précédemment vues ne seraient que des « espèces », des « variétés », nous en venons, malgré nous, à nous demander, si, de cette idée « d'élément », rappelée au cours de cette étude avec tant d'insistance, il n'y aurait pas, tout de même, quelque chose à tirer.

Sans doute faut-il rejeter sans appel l'interprétation de la nature de la simplicité mathématique, que nous y avions atta-

chée d'abord. Mais peut-être cette interprétation n'est-elle fausse que parce que, précisément, nous avons mal su faire usage de la notion d'« élément ». Peut-être que, en essayant d'analyser cette notion, nous arriverions à montrer sa vraie conexion avec celle de simplicité, et, par suite, à jeter quelque lumière sur la nature de celle-ci, du moins telle qu'elle apparaît en mathématiques.

CHAPITRE XXII

LA SIMPLICITE MATHEMATIQUE : CARACTERE DES « FORMES ELEMENTAIRES ». — LE PROBLEME DE LA SIMPLICITE EN GENERAL

Plus on y réfléchit, et plus il semble impossible de séparer la notion de simplicité de celle d'élément.

L'effort désespéré que nous avons fait au cours de ces pages pour essayer, parfois en torturant la notion d'élément d'une manière excessive, d'identifier, dans tous les cas, la simplicité mathématique avec la présence, dans les choses dites simples, d'un petit nombre d'éléments, reste, malgré l'échec auquel il a abouti, comme une protestation de la conscience tenace que nous gardons de cette indissoluble association d'idées. Nous avons eu beau démontrer que la notion d'élément « pratique » est tout ce qu'il y a d'arbitraire (1), que celle d'élément « de pensée » est absurde de quelque façon qu'on tente de la présenter (2), nous ne pouvons nous empêcher de constater comme un fait, que, plus un processus opératoire est simple, en mathématiques, et plus un processus de pensée, tel un raisonnement, est simple, lui aussi, et plus ils donnent, l'un comme l'autre, l'impression de comprendre peu d'« éléments «.

Que sont ces éléments ? Nous venons longuement de prouver qu'il est vain de vouloir le savoir. N'empêche que, pour nous, ce qui est, en mathématique, parfaitement simple, que ce soit d'une simplicité d'écriture, d'une simplicité opératoire pratique, ou d'une simplicité « psychologique », donne l'impression de correspondre à un seul de ces constituants. Une lettre, ou un chiffre isolé, un trait tiré, un syllogisme réalisent à un égal degré, semble-t-il, l'idéal d'une formule simple (bien que dépourvue de signification), d'une opération simple, d'un

(1) Voir plus haut, chap. XX.
(2) Voir plus haut, chap. XX.

raisonnement simple. Chacun est fait d'« un seul élément », constituant mystérieux, sans doute, mais réel au moins dans la mesure où il traduit une impression indéniable.

Laissons de côté, pour le moment, le problème qui consiste à se demander ce que peut bien être un élément. Dans ce que nous venons immédiatement de dire, semble se trouver la clef du malentendu qui nous a acculés à une impasse : dès qu'une formule écrite, un processus opératoire, ou un processus de pensée déductive nous paraît parfaitement simple, il nous donne l'impression d'être fait d'un seul élément, d'être lui-même, un élément. C'est là ce que nous avons dit, l'esprit libéré de toute théorie préconçue du fait même de l'échec de nos tentatives successives pour déterminer ce qu'est la simplicité, en mathématiques, et de la sorte d'indifférence intellectuelle qui en résulte. En d'autres termes, nous avons avoué, sans nous en douter, ce qui semble fondamental pour peu qu'on y prête l'attention : l'antériorité naturelle de la notion de simplicité, par rapport à celle d'élément, par laquelle, cependant, nous prétendions d'abord l'expliquer. Nous avons mis le doigt sur la sorte de pétition de principes qui aurait suffi à remettre nos conclusions en question, en admettant même que nous eussions pu trouver un sens acceptable, à ce que nous disions en parlant d'un nombre plus ou moins grand d'« éléments » pratiques ou psychologiques, esthétiques ou rationnels. Ce n'est pas parce que certaines notions et certains enchaînements mathématiques comportent moins d'éléments que d'autres (quels que puissent être ces éléments), qu'ils sont plus simples. C'est, au contraire, parce qu'ils sont plus simples, qu'ils paraissent comprendre moins d'éléments. Ou, plus brièvement : ce n'est pas le simple qui est simple parce qu'il ne comporte, dans sa perfection, qu'un seul élément. C'est au contraire l'élément qui est élément parce qu'il est parfaitement simple.

La définition d'un « élément », jusqu'ici impossible à fournir, devient, tout d'un coup, d'une facilité inattendue. L'« élément », c'est ce qui est absolument simple ; rien de plus.

Reconnaître cela, peut, philosophiquement, constituer un progrès. Mais, pratiquement, cela ne fait guère avancer notre recherche. Que les notions et les enchaînements mathématiques simples, le soient parce qu'ils représentent un petit nombre de mystérieux « éléments », — un seul, dans les cas idéaux de simplicité, — ou bien qu'une notion, un

enchaînement mathématique « élémentaire », ne soit élémentaire que parce qu'il est « simple » dans toute l'acception du mot, nous paraissons toujours en être réduits, d'une part comme de l'autre, à considérer comme indéfinissable l'une des notions. Tout à l'heure, c'était celle d'élément. Maintenant, c'est celle de simplicité, — celle même que nous nous proposons d'élucider. Ce n'est guère mieux.

Et si nous n'arrivons pas à montrer ce qui fait d'un élément quelque chose de simple, en d'autres termes, ce qui fait que le simple est simple, nous risquons de ne jamais pouvoir nous défaire de cette idée gênante d'une irréductible pluralité de simplicités, à laquelle nous nous heurtions dans le chapitre précédent. Il ne semble pas, du moins du premier abord, que la notion d'élément, telle que nous en avons reconnu la vraie signification, puisse nous servir bien effectivement à édifier, ou plutôt à découvrir l'unité qui, nous en sommes convaincus, domine cette pluralité. Dire, en effet, que l'élément est élément parce qu'il est simple, ne suppose pas forcément une idée unique de simplicité. L'élément, pourrait, suivant les cas, être élément de plusieurs façons. Tant qu'on n'est pas arrivé à expliquer, ou, du moins, à caractériser ce qui, dans tous les cas fait qu'on a affaire à quelque chose d'« élémentaire », toutes les fois qu'on se trouve en face d'une parfaite simplicité, on n'aura pas fait avancer la discussion. Un raisonnement élémentaire pourra être élémentaire pour une tout autre raison que ne l'est une opération élémentaire, au sens pratique, ou une formule réduite à l'un seul de ses éléments d'écriture. Il semble, à première vue, impossible de sortir de là.

Mais essayons de préciser la difficulté. C'est l'obscurité de la notion d'« élémentaire » qui nous empêche de nous en servir. Sans prétendre dissiper cette obscurité, du moins pour le moment, il est permis de se demander à quoi elle est due, d'autant plus qu'elle semble graduelle, de l'un à l'autre des trois cas-types, auxquels nous avions été amenés à faire correspondre trois simplicités mathématiques distinctes.

La notion d'élément, équivalent à « ce qui est simple », est claire au possible quand elle est représentée par un signe unique d'écriture. Quand on dit qu'une formule telle que $y = \sqrt{k}$ est plus simple que la formule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(qui est la même, quant à sa signification), non seulement on sait ce qu'on veut dire, mais on peut l'expliquer à n'importe qui. Ici, l'identification du plus simple à ce qui comporte moins d'éléments, et du « simple », absolument à l'élément lui-même, est facile parce que les « éléments » en question se voient. Ce sont comme des choses matérielles qu'on peut compter. La simplicité de l'élément est une simplicité objective. Il est facile de se rendre compte pourquoi l'élément est « un » : il n'y a qu'à le regarder sur le papier.

C'est déjà plus difficile de dire pourquoi l'opération qui consiste, par exemple, à tracer un trait, ou à échanger un objet contre un autre, est « simple », pourquoi elle donne l'impression d'« un » élément pratique. S'il s'agissait de la simplicité de son résultat, ce serait possible. Il n'y aurait qu'à convenir de ce à quoi, dans l'ordre des dessins géométriques (ou dans tel autre), on doit attribuer une valeur d'unité. Les conventions que Lemoine est obligé de faire pour imaginer une mesure de la simplicité dans les constructions géométriques (3), procèdent de cette idée, et indiquent que, pour lui, la simplicité en géométrie, reste, malgré tout, une simplicité objective, une simplicité des tracés, non des opérations. Ce sont, au fond, des conventions analogues qui nous permettent de dire qu'une lettre ou un chiffre est l'« élément » simple d'une formule, qu'il s'agisse du chiffre 1, si facile à tracer, ou la lettre ξ, par exemple. C'est toujours un chiffre, une lettre ; une « unité », un « élément ». Mais ce n'est pas un acte qu'on a là en vue. C'est un résultat matériel. Alors que, dès qu'ils s'agit d'une opération, nous abordons le domaine du subjectif. En disant, par exemple qu'il est élémentaire, c'est-à-dire tout à fait « simple » de tracer un trait, nous traduisons une impression subjective d'unité indivisible, dans l'action, en même temps que de facilité due à un repos de l'esprit.

Ceci est encore vrai, à plus forte raison, quand il s'agit du caractère élémentaire, parce que simple, d'un raisonnement, d'une définition, d'une expression quelconque de la « pensée » mathématique. C'est que nous abordons là, plus encore, si l'on peut dire, le domaine du subjectif, par conséquent, de ce qui ne se voit pas, ne se mesure pas, ne se détaille pas. Nous avons vu, plus

(3) **Lemoine.** Ouvrage cité.

haut, qu'un élément de pensée est quelque chose d'inconcevable. N'empêche que, parfois, quand nous avons affaire à un raisonnement extrêmement simple et clair, à une définition mathématique lumineuse, aisée, en même temps que concise, à une solution si rapide et si élégante qu'il semble qu'on ne puisse pas en inventer une meilleure, nous avons l'impression d'une unité indivisible comparable à celle d'un « seul » signe ou d'un « seul » geste élémentaire. Nous avons d'abord traduit cela, en inventant un « élément de pensée », objet de cette impression. Mais nous venons de voir que cette impression n'est autre que celle de la parfaite simplicité de la pensée, dont nous prenons ainsi conscience. Mais nous sommes toujours incapables d'en dire davantage, concernant cette simplicité.

Tout ce dont nous sommes sûrs, expérimentalement, c'est que cette impression, nette comme l'évidence, que nous traduisons par la notion d'élément, est la même, quelle que soit la simplicité qui nous fait juger « élémentaire », une formule, une opération ou un processus de pensée ; et cela, bien que, d'un cas à l'autre, « ce qui » est simple, soit de moins en moins saisissable, de moins en moins « objectif ». L'explication de cette impression nous échappe. Mais nous sentons que, si nous pouvions la saisir, nous tiendrions le principe qui fait des trois simplicités, irréductibles l'une à l'autre, trois espèces d'un même genre, et, par suite, la caractéristique de ce genre, tant cherchée.

Demandons-nous, un instant, pourquoi, alors qu'il est si facile de parler d'un élément d'écriture, il est impossible de dire pour quelle raison on considère une opération pratique ou un processus de pensée mathématique, comme élémentaire, autrement qu'en invoquant une impression. Nous avons déjà esquissé la réponse à cela quand nous avons dit que la simplicité d'une formule est une simplicité « objective », tandis que celle d'une opération, et, à plus forte raison, d'un raisonnement, d'une solution, ou d'une notion mathématique que l'on conçoit, est une simplicité « subjective ». Mais cela ne suffit pas. Pourquoi, en effet, l'élément, — par définition, « ce qui est simple », — est-il si difficile à déterminer dans son unité, compacte, évidente, et si bien sentie comme telle par le mathématicien, dès que l'on aborde le domaine « subjectif » ? En d'autres termes, clairs, semble-t-il, malgré ce qu'ils ont en apparence de paradoxal ; quelle est la cause

qu'un fait mathématique « simple », subjectivement, ne peut pas être « objectivement » déterminé avec clarté ?

A y réfléchir, il semble qu'elle soit à chercher dans le fait suivant :

« Objectivement », un élément objectif — un élément matériel en quelque sorte, comme un signe d'écriture, ou un mot, pris indépendamment de sa signification, — est, en effet, « un ». Non seulement, il est senti comme étant « sans parties », suivant l'expression employée par Leibuitz pour définir la simplicité, mais il est, en effet, sans parties. Il n'est la somme de rien. Il n'est la synthèse de rien. Il n'est la résultante de rien. Il n'y a, non seulement rien à juxtaposer, mais encore rien à supposer pour le concevoir, parce que, en réalité, il n'y a pas à la concevoir à proprement parler ; il n'y a qu'à le compter pour « un ». Quant à son individualité, elle est tout entière contenue dans sa figure visible, qui n'a d'ailleurs, aucune importance. Il est un, — essentiellement. Il n'est pas autre chose. Il n'en est pas de même de ce qui « subjectivement » donne l'impression d'unité et de perfection, que le mot « élément » nous a servi à traduire.

Le résultat d'une opération, un trait tiré, un échange accompli, pourrait, lui, aussi, être simplement compté pour « un ». Si on le détache du sujet, il se range de lui-même dans la catégorie des « éléments » dont nous venons de parler. C'est, d'ailleurs, remarquons-le, ce qui se passe, par exemple, dans le dénombrement. Mais l'opération elle-même, l'acte que le mathématicien tient pour « simple » dans certains cas rappelés dans ces pages, c'est autre chose. Elle est une pour le sujet. Elle est sentie comme élémentaire. Mais, objectivement, elle est la résultante d'un très grand nombre de facteurs mécaniques, physiologiques, psychologiques même, dont il est impossible de déterminer la plus grande partie ; elle est la synthèse d'uen quantité de mouvements « élémentaires » qui se complètent. Son unité, sa simplicité qui l'oppose à d'autres opérations, est, en réalité, une unité de synthèse. Objectivement, elle n'est pas « un » élément de la catégorie de ceux dont nous parlions tout à l'heure ; mais elle est « composée » d'un nombre d'« éléments » sans doute très grand. D'ailleurs, qui dit « synthèse » dit composition.

De même un processus de pensée, une construction mathématique en tant qu'échaffaudage intellectuel, une démonstration, une notion arithmétique, algébrique ou géométrique,

tant « simple » soit-elle, est, aux yeux du psychologue, un complexe, comme tout produit de l'activité de la pensée discursive ou conceptuelle. Il serait bien difficile de l'analyser, et de dire de quels éléments elle est faite ; sur quels faits inconscients, mais réels, et sans doute très nombreux, elle repose ; en un mot, quel « donné » elle suppose, objectivement, chez celui qui la conçoit avec une aisance et une clarté telles, qu'il en retire l'impression de quelque chose d'« élémentaire ». Cela supposerait que nous sommes capables de répondre aux questions : qu'est-ce que raisonner ? qu'est-ce que concevoir une idée ? qu'est-ce que penser ? autrement que par des considérations se rattachant toujours uniquement au domaine « subjectif ». Mais, quoi qu'il en soit, il est certain que cette simplicité, cette unité interne de certains enchaînements mathématiques, cette unité dans la cohésion, de certaines notions, qui s'impose avec une telle force, que le mathématicien a vraiment l'impression d'avoir affaire à un enchaînement ou à un concept « élémentaire », n'est pas du tout celle de l'« élément » objectif, celle, par exemple, qui apparaît dans un mot, ou dans un signe conventionnel quelconque considéré tout seul.

Même sans aller chercher les multiples éléments dont pourrait se composer, du point de vue d'une physiologie de l'intelligence, qui reste à faire, un acte soi-disant « élémentaire » comme celui de l'intériorisation de deux jugements dans un syllogisme, la seule présence, dans les démonstrations, les raisonnements, les solutions, dans tout enchaînement mathématique, d'un certain nombre de « parties » que l'on peut distinguer, suffirait à montrer que l'on ne peut pas comparer leur simplicité avec celle d'un « élément » au sens plein, tel que nous l'avons rencontré plus haut. C'est l'« heureux balancement de ces parties », « ce qui y introduit de l'ordre », qui, aux yeux de H. Poincaré, fait la simplicité de l'enchaînement. C'est, aux yeux de M. Brunschvicg, l'unité dans la parfaite intériorité des idées. Ces seules expressions suffiraient à faire voir, dans la simplicité des enchaînements mathématiques, comme dans celle de toute construction — et par suite celle des notions, — une simplicité dans la multiplicité, une unité de synthèse, comparable à celle que nous avons vue dans une opération pratique. M. Brunschvicg définit d'ailleurs bien le raisonnement : une « synthèse » de jugements, insistant sur l'erreur qui consis-

terait à voir en lui une pure « juxtaposition » de vérités, alors qu'en réalité ces vérités sont « intérieures les unes aux autres ». Et il semble bien que, si nous avons échoué en essayant d'itentifier dans tous les cas la simplicité mathématique à la présence, dans les choses simples, d'un petit nombre d'éléments ; s'il nous a été impossible, à la réflexion, de détailler » en éléments, soit les opérations pratiques, soit, à plus forte raison, les constructions intellectuelles (enchaînements aussi bien que notions), sans en détruire l'essentiel, c'est que, précisément ces opérations pratiques et ces processus de pensée sont avant tout des *synthèses*.

Une synthèse, — et surtout une synthèse subjective. — c'est quelque chose d'un et de différent essentiellement, dans son unité, des éléments qui y entrent. Ceux-ci ne pourraient la reconstituer par juxtaposition ; elle est autre chose que sa matière toute seule. Et on ne peut, non plus déterminer des « éléments », de même nature qu'elle, cette fois, et qui la constitueraient, autrement qu'en les découpant en elle arbitrairement. Cette seule genèse arbitrlire met en évidence leur irréalité.

Mais c'est aussi pour la même raison qu'il nous a été absolument impossible de définir, en termes d'objet, ce qui fait l'unité, et d'une opération pratique, et d'une construction mathématique (enchaînement ou notion) en tant que tout organisé, et donne au mathématicien l'impression de l'« élément », c'est-à-dire du simple. Une synthèse, quoique « une », procède, objectivement parlant, d'une multiplicité, c'est-à-dire de quelque chose dont la notion est la contradiction même de celle d'un « élément ». Ce qui fait l'unité de la synthèse. — ce qui, par conséquent, fait le caractère élémentaire soit de l'opération pratique soit de la construction intellectuelle, en mathématiques, — ce n'est pas dans la « matière », dans le « donné » synthétisé qu'il faut le chercher. C'est ailleurs. C'est, semble-t-il, dans la *forme* que supporte cette matière, dans la *loi de la synthèse* (4). Car on ne voit pas ce qui, en dehors de cette loi, de cette forme, pourrait bien être « élémentaire » dans une multiplicité, être « simple » dans un tout objectivement complexe. C'est là, semble-t-il, la seule notion capable de rendre compte de la simplicité de ce que,

(4) **Et. Souriau.** «Art et Vérité». «Revue philosophique», mars-avril 1933, pp. 166-177-193-198.

en mathématiques, est « senti » simple, avec toute la netteté irréfutable d'une évidence, alors qu'il est impossible, si l'on s'en rapporte au donné, de n'en pas reconnaître la complexité.

Dira-t-on que cela ne réduit pas forcément les trois simplicités distinctes à n'être que des « espèces » différentes de « la » simplicité mathématique unique ? Que cette forme caractéristique qu'il faut chercher dans toute construction mathématique simple (qui est une synthèse), peut bien différer de celle que supporte cette autre synthèse qu'est une opération simple ? Que, surtout, si l'on place dans la loi d'une synthèse la simplicité mathématique dans les deux cas que nous venons de citer, il n'est peut-être pas possible de l'y placer dans le cas où l'on a affaire à une simplicité d'écriture,, cas où, ce qui donne l'impression de l'élément, n'est pas un tout pensé d'une certaine manière, mais un vrai « élément », une « unité » au sens objectif du mot ?

Il semble que, en ce qui concerne le premier point, la réponse soit aisée. Un peu d'attention apportée à la notion de « forme » y suffit. En effet, nous disions, il y a un instant, que la forme c'est la loi de la synthèse. Mais cette loi est tout à fait indépendante des matériaux employés à cette synthèse. Des synthèses, en apparence très différentes, peuvent fort bien exprimer la même loi ; et si, dans tous les cas, cette loi est simple, elles donneront toutes l'impression d'une unité interne, d'une stabilité et d'une aisance dans leur conception identique. Car cette impression est la conscience que nous prenons de leur loi, de leur « forme ». C'est elle que nous traduiront en disant qu'elles sont toutes « simples ».

Quant au cas de l'élément « objectif » qui, quand il est tout seul représente le maximum de simplicité auquel puisse atteindre une formule conventionnelle (un ensemble de signes ou de mots considérés indépendamment de leur sens), une réflexion s'impose. Cet « élément » d'écriture est objectif, sans doute. Mais le fait qu'il est objectivement seul ne suffirait pas à nous le faire appeler élément, à nous y faire voir le maximum de simplicité possible, si, précisément, nous ne le considérions pas indépendamment de son contenu. Quand nous disons, par exemple (pour reprendre une formule connue), que l'expression $y = \sqrt{k}$ est simple, nous oublions complètement que y signifie $x + \frac{p}{2}$, c'est-à-dire $x + \frac{b}{2a}$, et que k est égal à $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Qu'est-ce à dire sinon que, en ma-

thématiques, l'élément soit-disant objectivement simple, parce que représenté par un seul signe, n'est, en réalité un « élément » que parce qu'il est subjectivement « simple », et cela au plus haut degré. Ce n'est pas parce qu'il est écrit à l'aide d'un seul signe que le mathématicien le tient pour « un », mais, au contraire parce que le mathématicien le tient pour « un », en d'autres termes parce qu'il le pense en lui faisant supporter la « forme simple » par excellence, qu'il l'écrit à l'aide d'un seul signe.

Quand il s'agit d'un mot, dans une définition, par exemple, on peut dire la même chose, avec la différence que, la simplicité d'une notion, jugée, à la manière des Logisticiens, au nombre de mots qui servent à définir cette notion, — ou au nombre d'axiomes qui servent à l'asseoir, — indépendamment de leur liaison, de leur signification, et par suite, de leur importance par rapport au tout qu'ils composent, est quelque chose de beaucoup plus conventionnel encore que celle des formules mathématiques, quelque chose de plus extérieur encore à l'objet véritable de la pensée. En réalité, la notion conçue n'entre pas en ligne de compte. C'est la définition, en tant que phrase, — alignement de mots, — c'est le système d'axiomes, en tant qu'alignement de phrases, qui sont jugés « simples », à cause de leur petit nombre d'éléments. Mais chaque mot, chaque phrase, comme tout à l'heure chaque signe, n'est « une » unité, n'est « un élément », que par décret du mathématicien, — que parce que celui-ci le « pense » comme tel. (Sinon, du point de vue strictement de l'écriture, du point de vue « objectif » auquel on se place, il faudrait ne pas tenir pour également « un », un mot de deux lettres et un mot de douze ou quinze, un axiome exprimé en peu de mots et un axiome exprimé en davantage de mots). C'est, là encore, malgré l'apparence, la simplicité « subjective »; — celle de la pensée — qui impose son caractère à l'objet de la pensée. C'est la simplicité de la forme, en d'autres termes, qui met sa marque distinctive sur la chose, qui en fait, conventionnellement, « un » élément, la forme étant, comme nous l'avons répété, la loi de la synthèse, le schème selon lequel la pensée s'organise.

La notion de « forme » est donc celle, semble-t-il, à laquelle on soit logiquement conduit à faire appel, pour arriver, à la fois, à rendre compte du caractère « élémentaire » attaché malgré tout à certaines opérations pratiques et à cer-

tains processus de pensée, en mathématiques, et à mettre en lumière ce qui, derrière la simplicité d'écriture, la simplicité pratique (dans le sens opératoire), la simplicité que nous avons appelée « psychologique », — toutes trois, à des degrés divers, considérées par le mathématicien, comme nous l'avions montré au début, — constitue « la » simplicité mathématique, dont les trois premières semblent être des espèces. On pourrait résumer ce qui vient d'être exposé, énoncer, en somme, la conclusion de toute cette étude, en disant que la simplicité mathématique, c'est le caractère commun des notions et enchaînements mathématiques qui supportent une forme élémentaire.

Mais ceci appelle de nouvelles explications. Car ce n'est rien dire, au fait, que de remplacer le mot « simple » par une autre expression sans caractériser cette autre expression. La notion de « forme » est suffisamment familière à tous ceux qui s'occupent de problèmes philosophiques. Mais quand dira-t-on, d'une forme, qu'elle est élémentaire ? Quand, la loi d'une synthèse comme une notion ou un enchaînement mathématique est-elle telle, que l'on doive appeler cette notion ou cet enchaînement « simple » ? Telle est maintenant la question. En d'autres mots, maintenant que nous croyons avoir établi que la simplicité mathématique regarde la forme, quel en est le critère ?

Il est difficile de répondre à cette question parce qu'il est toujours difficile de déterminer un critère qui ne regarde que l'esprit seul. Pourtant il semble qu'une allusion à certaines notions mathtmatiques très familières, nous mettrait sur la voie. Nous voulons parler de ces figures géométriques dont l'idée est tout particulièrement liée à la notion de forme telle que la conçoit un esprit non habitué à l'abstraction, c'est-à-dire à la « forme » visible, matérialisée. Sans doute, aucun mathématicien ne confond la forme visible, le polygone, par exemple, tel qu'il se présente sur le papier, avec la notion proprement mathématique du polygone, « être idéal » que la figure tracée sert à évoquer. Mais aucun mathématicien, non plus, ne nierait, semble-t-il, l'étroit rapport qui existe, du point de vue même de la pensée, entre la représentation de la figure et l'idée de l'être mathématique. La figure fait plus que d'« aider » l'imagination prête, à chaque instant, à se lasser. Ou, si l'on préfère, elle ne peut servir à soutenir l'imagination, à aiguiser l'initiative du mathématicien qui in-

vente un raisonnement, qui combine une construction rationnelle, que, précisément, parce que, il existe entre sa forme, et la forme que supporte la notion idéale — la notion du « polygone en soi », pour parler un langage platonicien, — un rapport de parfaite identité. Si l'on veut, la figure, et l'être de raison sur lequel travaille le mathématicien, sont deux synthèses qui ont la même loi. Le mathématicien, en raisonnant sur l'une, raisonne sur l'autre. Ce n'est donc pas faire fi du caractère idtal des spéculations mathématiques, que d'évoquer, dans une discussion sur la nature des formes élémentaires, ces figures de la géométrie, étudiées sans doute, à l'origine à cause de leur beauté, et qui ont si souvent servi d'exemples dans des études semblables à celle-ci : les polygones.

Qu'est-ce donc qu'un polygone élémentaire ? C'est un polygone « simple ». Et qu'est-ce qu'un polygone « simple » ? C'est un polygone élémentaire. Il nous serait apparemment difficile d'échapper à ce renvoi stérile d'une affirmation à l'autre sans les exemples concrets de polygones qui se présentent à l'esprit. Un polygone simple, c'est, par exemple, le triangle ; c'est par exemple encore, le carré, ou le losange, ou le trapèze — d'une manière générale, le quadrilatère. Un polygone qui n'est pas simple, c'est, par exemple, sans aller chercher le kiliogone ou même le décapentagone, l'hexagone, l'octogone, l'ennéagone, le décagone ,etc. Il semble que tout le monde soit d'accord pour dire que l'hexagone, ou l'octogone, est « plus simple » que le kiliogone. Mais qui dirait qu'un triangle équilatéral est plus simple qu'un carré ? un triangle quelconque plus simple qu'un quadrilatère ? ou viceversa ? Dans aucun traité de mathématiques, du moins que nous connaissions, pareille comparaison n'a été faite. De même, il est dit que, parmi les courbes du même genre que lui, le cercle est la plus simple. Mais nulle part on n'affirme que l'ellipse soit plus ou moins simple que la parabole ou que l'hyperbole, ni que, de ces dernières l'une soit plus simple que l'autre. Ceci nous éloigne un instant des polygones, mais nous montre que la non possibilité de déterminer, de deux ou plusieurs notions, laquelle est la plus simple, se retrouve, en mathématiques, ailleurs qu'en ce qui les concerne.

Si donc la simplicité est le caractère des formes élémentaires, nous dirons, — pour revenir aux polygones, — que le triangle, le quadrilatère, correspondent à des formes sim-

ples, à des formes « élémentaires ». Nous dirons qu'il n'y a pas, entre ces formes élémentaires de possibilités de comparaison quant à leur simplicité. Une forme est élémentaire ou ne l'est pas, et c'est là ce qui fait que la figure qui la matérialise, en quelque sorte, de même que le raisonnement dont elle est le schème organique, de même que toute synthèse d'ordre pratique ou intellectuel qui l'admet comme sa loi de construction, est simple, ou ne l'est pas. On pourrait sans essayer de la dresser, se faire l'idée d'une liste de toutes les formes élémentaires en lesquelles peut penser le mathématicien. Est simple, toute notion mathématique, toute opération, toute construction, tout enchaînement, comme principe rationnel duquel se trouve l'un de ces schémas, l'une de ces « formes » idéales. N'est pas simple tout ce qui est pensé en dehors d'elles. Ce qui ne veut pas dire, bien entendu, sans connexion aucune avec elles.

La liste des polygones correspondant à des formes élémentaires est facile, elle du moins, à dresser. Elle comprendrait le triangle, le quadrilatère, et le pentagone, tout au plus. L'exagone ne peut déjà certainement plus compter comme polygone « élémentaire ». On ne voit pas, il est vrai, au premier abord, pourquoi. C'est une certiture intuitive, semble-t-il. A la réflexion, il semble que ce soit parce que le nombre des côtés de l'hexagone, est obtenu par duplication de celui des côtés du triangle, c'est-à-dire, parce que la « forme » essentielle de l'hexagone est dérivée de celle du triangle (dérivée, il est vrai, immédiatement, au moyen d'une opération simple ; mais, tout de même « dérivée »). Et, quant aux polygones d'un nombre de côtés supérieur, leurs formes sont, toutes, de même, dérivées plus ou moins directement des formes élémentaires : ou bien, sans être « dérivées », elles sont aussi compliquées, sinon davantage, que des formes dérivées. (On ne peut nier, par exemple, que l'endécagone ne soit au moins aussi compliqué que le décagone, à la forme « dérivée » ; ni que l'heptogone ne soit aussi compliqué que l'hexagone).

On ne peut dire que le quadrilatère est plus ou moins simple que le triangle. Mais on peut, semble-t-il, dire que l'hexagone, par exemple, qui est moins simple que l'un et que l'autre, est, par contre, plus simple que l'eunéagone ou que le décagone, polygones correspondant à des formes, dérivées, moins directement que la sienne de la même forme élémen-

taire. En d'autres termes, dire qu'une forme est plus simple qu'une autre (ce que l'on affirme toutes les fois que l'on compare, quant à leur simplicité, deux notions ou deux enchaînements mathématiques), c'est dire, ou bien que l'une des deux est « élémentaire », alors que l'autre ne l'est pas, ou bien, qu'aucune n'est élémentaire, mais que l'une dérive d'une forme élémentaire, ou s'y rattache, de quelque manière que ce soit, plus directement que l'autre.

Mais nous n'avons toujours pas répondu à la question : à quoi se reconnaît une forme « élémentaire » ? C'est-à-dire, quel est, du moins en mathématiques, le critère de la simplicité ? Dans l'exemple des formes géométriques que nous avons invoqué, on comprend que l'hexagone ne soit pas élémentaire, ni l'octogone, ni aucune des formes dérivées des formes élémentaires. On comprend que l'heptagone ou l'eudécagone ne le soient pas davantage, car il paraît évident que les formes auxquelles ils correspondent ne sont pas plus simples que certaines formes « dérivées ». Les ranger parmi les formes « élémentaires », choquerait, sans aucun doute. Mais pourquoi les formes élémentaires des polygones sont-elles celles que nous avons vues, et pas d'autres ?

Les moins compliquées des formes non élémentaires, nous venons de le voir, dérivent de celles que nous avons appelées élémentaires Cela nous amène à penser que les « élémentaires », sont celle qui ne dérivent d'aucune autre. Nous retrouvons-là, à la racine de la notion de la simplicité mathématique, la notion d'antériorité rationnelle que, si souvent, nous avons vu, au cours de cette étude, confondue avec elle. Les formes géométriques correspondant au triangle, au quadrilatère, au pentagone, sont, en effet, la base sur laquelle d'autres formes se conçoivent, formes que supportent les polygones que nous avons reconnus plus compliqués ; alors que, aucune autre forme concevable ne leur sert, à elles, de base. Elles sont, en quelque sorte, pleinement suffisantes à elles-mêmes. Et il est remarquable que, ces formes, par lesquelles sont « simples » des êtres mathématiques comptant parmi les plus anciennement étudiés (et auxquelles il faudrait cependant ajouter celle du cercle), on les retrouve, semble-t-il, à la base des dessins décoratifs primitifs de tous les pays du monde (7), comme si elles attestaient à l'origine

(7) **H. Beuchat.** « Manuel d'Archéologie Américaine », pp. 169-719-726.

de l'art et de la pensée, une recherche commune. En effet, le triangle, le carré ou le losange, la croix, le cercle, l'étoile à cinq branches aussi, sont, sinon les motifs qui reviennent, tels quels, le plus souvent dans les dessins (par exemple dans la décoration des poteries préhistoriques) (8), du moins les formes qui figurent à leur base, qui en constituent l'essence. Les combinaisons si fréquentes de droites et de zig-zags, donnent des ensembles décoratifs dont l'effet esthétique est encore à chercher dans une de ces formes élémentaires. Et on peut dire que ces formes se retrouvent, sinon dans le détail, du moins dans « l'essence » des décorations plus évoluées, comme dans les schèmes architectoniques des « styles » qui ont atteint leur perfection. Il serait intéressant de le montrer, en passant en revue les principaux « styles » du monde, et en particulier les styles architectoniques, — qui en sont arrivés à ce point de l'art, où il n'y a plus rien à ajouter, plus rien à retrancher. Sans doute cela dépasserait-il le cardre de ce travail. Mais, sans entrer dans le détail, il suffit de songer à quelques-uns de ces « styles » pour apercevoir, comme à leur base, dans leur essence, une prédominance de l'une des formes élémentaires, du quadrilatère (carré, rectangle ou trapèze), du triangle, du cercle, ou une combinaison harmonieuse des trois ou de deux d'entre elles. Nous songeons, par exemple à ce qu'on pourrait nommer le « schème » d'une tour babylonienne à étages, telle que les archéologues nous en fournissent des reconstitutions, d'un « building » de New-York, parmi ceux qui ont une valeur artistique incontestable ; d'un temple grec classique, d'une église byzantine, d'une cathédrale gothique, d'une mosquée arabe, d'un temple hindou, d'un palais kmer, d'un téocalli du Mexique.

L'impression esthétique, caractéristique de chacun de ces monuments, est sans doute fort différente. Et elle ne diffère pas forcément en raison de la distance qui sépare leur éclosion dans le temps et dans l'espace. Nous avons, à dessein, rapproché d'une part l'art des Etats-Unis l'aujourd'hui et celui de l'ancienne Mésopotamie, qui nous semblent dans leur essence, se ressembler, et, de l'autre, l'art grec classique et l'art grec du Moyen-âge, si différents, au premier abord surtout, quoique ayant flori sur le même sol et à moins de mille ans de distance. En tout cas, quelle que soit cette impression, toutes ces œuvres d'art, typiques, semblent mériter,

(8) **G. Mylonas.** « I Néolithiki Epokhi en Helladi » (Athènes 1928. « Bibliothèque de la Société Archéologique »), pp. 15-16-27-33-49-53-54-55-56-57-98, etc...

au même titre, le qualificatif de « belles ». On peut préférer l'une à l'autre. C'est une affaire d'adaptabilité personnelle. On ne peut, toutefois, à moins de faire de la beauté quelque chose de tout à fait individuel, à moins de nier qu'il y ait un bon et un mauvais goût, nier que du point de vue de ce « bon goût », subjectif sans doute, mais humain, elles sont belles également. Et l'on est obligé de reconnaître que, si complexe que puisse être d'ordinaire le détail de quelques unes, si sobre au contraire le détail des autres, toutes sont essentiellement, conçues sur la base de ces « formes simples », — ou formes « élémentaires » — dont nous parlions tout à l'heure. Ces formes, avec, en général, prédominance plus ou moins marquée de l'une d'elles, en sont comme la nervure ; bien plus encore : elles en sont, esthétiquement parlant, l'âme.

Ceci nous amène à chercher à déterminer ces formes élémentaires par une caractéristique artistique. Nous les avons trouvées à la naissance de l'art exprimées d'une manière brute. Nous les retrouvons au sommet de l'art, principes d'unité dans la complexité, lois simples de synthèses qui ont atteint leur terme. C'est précisément parce que nous sentons que ces synthèses ont atteint leur terme, que nous en inférons la simplicité de leur loi, que nous retrouvons à la réflexion. Il n'y a, venons-nous de dire, plus rien à ajouter, plus rien à retrancher à une œuvre qui, fut-ce dans la plus grande complexité de détails, supporte une de ces formes d'une manière adéquate. Qu'est-ce à dire, sinon qu'elles sont, ces formes « élémentaires », les schèmes (visibles ou intelligibles, ou les deux à la fois), de ce que nous appelons : la perfection. Ce mot est déjà, à plusieurs reprises, venu sous notre plume. Il n'y a, semble-t-il, pas moyen de définir la loi élémentaire de synthèse, — la « forme élémentaire » — en laquelle nous avons reconnu, en mathématiques, l'essence de la simplicité, autrement qu'en la caractérisant de manière à la faire reconnaître. La perfection peut être une notion subjective — (la simplicité mathématique aussi, est, nous l'avons vu, une notion subjective. Mais il semble que, tout comme le beau (dont elle nous paraît synonyme), elle ait une valeur humaine. Elle est le caractère de ce qui nous donne ce « plaisir en repos de l'intelligence » dont parle M. Souriau (9), impression, pour l'esprit, de s'être rendu tout effort inutile, en

(9) **Et. Souriau.** « Pensée vivante et Perfection formelle » (Avant-Propos, p. VIII.)

ayant fait sienne — ou plutôt en ayant, en agissant découvert comme sienne, — une loi de création éternelle.

Il est un autre domaine que celui de l'art, domaine déja mathématique, ou bien près de le devenir, où semblent réapparaître avec ténacité les formes élémentaires en question, et, plus spécialement celles-là même dont nous avons récemment parlé : c'est celui de la numération.

Il est remarquable que tous les systèmes complets de numération anciens ou modernes, utilisent comme base soit le nombre 5 lui-même, soit son double, ou, plus rarement, son quadruple (10). On a souvent invoqué comme raison justificatrice de cet usage si général, la pratique primitive du calcul digital. Sans doute, cette pratique, en relation si étroite avec la constitution du corps de l'homme, a dû, sinon déterminer, du moins fortement favoriser la formation de ces systèmes de numération. Mais il nous semble impossible de ne pas faire un rapprochement entre ce fait que ce n'est jamais à partir de moins de cinq que commencent les duplications, — entre ce fait, en d'autres termes, que les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 sont considérés, en quelque sorte comme « élémentaires », — et celui du caractère également « élémentaire », des formes polygonales à 3, 4 ou 5 côtés (auxquelles nous pourrions ajouter celles de l'angle pur et simple (du zig-zag) et de la droite, si fréquentes, elles aussi, dans l'art décoratif primitif). Il semble impossible de ne pas rapprocher la présence des formes élémentaires à l'origine de l'art universel, de leur présence à la base de l'opération élémentaire de la mathématique universelle : la numération.

Pour nous, si le nombre 5 a, dans celle-ci, une place à part, c'est au moins autant à cause de la simplicité des formes — lois de la synthèse qu'est chacun d'eux, — supportées par chaque nombre avant lui, que pour la facilité de la comparaison des collections concrètes d'objets à la collection des doigts de la main. Sinon, la mathématique se formant, le calcul abstrait remplaçant le calcul digital, nul n'était besoin de conserver les vieilles bases de la numération si d'autres étaient plus rationnelles. Il semble que, si le calcul digital a pu les suggérer, tout au plus, c'est la rationalité — la perfection, — c'est-à-dire, encore, la simplicité des formes vraiement « élémentaires » que ces numérations expriment, qui

(10) **H. Beuchat.** « Manuel d'Archéologie américaine », p. 480.

les a fait conserver après l'éveil complet de la raison spéculative chez chaque peuple.

Et, — chose digne d'être notée, — ce n'est pas seulement à l'origine de la pensée mathématique, comme ce n'est pas seulement dans l'art primitif, que les formes élémentaires apparaissent. A travers la complexité croissante de son symbolisme c'est vers elles que le mathématicien semble tendre de toutes ses forces, fut-ce inconsciemment, comme l'artiste à travers la complexité croissante de sa technique, la richesse humaine croissante de ce qu'il exprime, et parfois, l'abondance de détails, indispensables au caractère de son œuvre en ce qu'elle a de singulier. Les auteurs que nous avons consultés dans cette enquête sur la simplicité mathématique, admettent bien tous, semble-t-il, que les mathématiciens font avancer leur science par une suite, ou plutôt un réseau de constructions de plus en plus complexes. Mais M. Brunschvicg voit, au terme de cette complexité, l'unité de la mathématique, c'est-à-dire sa simplicité organique en tant que « tout ». Bien plus, il voit, au delà de la réussite des mathématiques, dans l'achèvement de toutes les sciences, l'unité de la pensée humaine dans son expression, — dans sa « stylisation » comme dirait encore M. Souriau (11) — c'est-à-dire, pour lui, le sumnum de simplicité. Et déjà à chaque grande étape de la science, il voit un pas vers cela. De même, pour H. Poincaré, il semble que, si la simplicité se trouve dans les opérations élémentaires des mathématiques, elle est aussi, elle est même surtout, l'idéal vers lequel tend, non seulement chaque démonstration qui n'est pas encore parfaite, mais la synthèse de tous les efforts faits dans chaque branche des mathématiques. Pour les Logisticiens eux-mêmes, dans un autre ordre d'idée, l'achèvement de leur méthode doit permettre de faire tenir toutes les mathématiques dans les formules les plus brèves, c'est-à-dire, les plus simples possibles. Quel que soit, en un mot l'idée qu'ils se font, dans le détail, de la simplicité mathématique, tous la retrouvent dans l'achèvement idéal des mathématiques. Comme nous le disions, les formes élémentaires sont les formes de la pensée mathématique, à son terme comme à son origine, tout comme elles

(11) **Et. Souriau.** « Pensée vivante et Perfection formelle » (déjà cité).

sont les formes de toute expression artistique à son terme comme à son origine.

A l'origine, elles sont, pour ainsi dire, appréhendées nues. Au terme, elles sont comme l'âme organisatrice d'une vie débordante de richesse. Mais ce sont toujours elles. L'esprit va compliquant son jeu parce qu'il veut par là, précistment, embrasser peu à peu toute cette richesse. Mais il n'est content, il ne s'arrête que, quand il a enfin réussi à jouir d'elle en la pensant en une forme simple, en une forme qui, comme nous le disions plus haut, lui donne, avec l'impression combinée de l'évidence et de la beauté, le sentiment d'appréhender ce qui est éternel. M. Brunschvicg montre, à chaque étape importante de la mathématique, et, en général, de la science, un pas vers l'unité dans la synthèse. c'est-à-dire, vers la simplification par l'enrichissement. C'est, semble-t-il, justement parce que cette « étape » constitue une simplification de la forme pensée, — un perfectionnement de la synthèse, — qu'elle est une « étape », c'est-à-dire, un palier où l'on s'arrête et où l'on se repose. Mais l'esprit ne s'y arrête qu'un moment, et, bientôt, reprend sa marche. saisi de nouveau par l'inquiétude. C'est que cette simplicité qui l'avait d'abord satisfait au point de lui inspirer le goût d'une inactivité contemplative, n'était, il le sent, qu'une moindre complication. Il n'a pas encore atteint « la » simplicité, c'est-à-dire la perfection ; il n'a pas encore reconquis la « forme élémentaire » en laquelle il est permis de repenser perpétuellement sans se lasser ; sinon il s'arrêterait pour toujours.

*
**

Après qu'un parallèle entre les formes élémentaires en mathématiques et dans l'art, comme celui qui vient d'être esquissé, nous a, semble-t-il, si grandement aidés à caractériser cette notion de forme élémentaire à laquelle nous identifions, en mathématique, celle de simplicité, il paraît superflu de se demander si nous pensons que l'essence de la simplicité soit la même en mathématiques et dans l'art. La réponse serait affirmative, on le prévoit sans peine.

Mais on pourrait se demander si, en posant dans d'autres domaines, tels que celui des « faits » physiques, ou celui des faits psychologiques, — en particulier dans le domaine affectif, — ce même problème de la nature de l'idée du simple, on arriverait à lui donner une réponse analogue.

Nous avions d'abord été conduits à admettre, bien qu'à contre gré, trois notions de simplicité, distinctes, employées par les mathématiciens, toutes les trois, plus ou moins. L'idée unificatrice de forme élémentaire, nous a permis de ramener ces « trois » notions à trois espèces d'une seule et même simplicité mathématique. Nous avons caractérisé celle-ci parce qu'elle a de profondément esthétique, semble-t-il, confondant, dans la forme élémentaire, rationnalité et beauté, dans l'idée, qui les embrasse toutes deux, de perfection.

La simplicité « physique », la simplicité dans le monde affectif, ne seraient-elles pas, comme la simplicité mathématique, à leur tour, que des « espèces » de *la* simplicité en général, résidant, elle, dans tous les cas, dans le sentiment de *perfection* qu'inspirerait, non seulement à l'esprit, mais à tout l'être, la « forme élémentaire » supportée, suivant les cas, par des « matières » différentes, ordonnant, suivant les cas, une richesse de détails d'une autre nature ?

La question n'est pas à résoudre ici. Elle nous entraînerait beaucoup trop loin, hors du cadre de ce travail. Mais, il semble que sa résolution par l'affirmation d'une notion unique de simplicité, à la fois rationnelle et esthétique, identifiée à la « forme élémentaire » entraînerait, comme conséquences :

1° Une conception *esthétique* de la vérité sous toutes ses formes (y compris, pour nous la vérité religieuse, et cette « vérité », sociale et culturelle, dont les innombrables manifestations vécues constituent, dans leur ensemble, ce qu'on appelle une « civilisation »).

2° Une conception *unitarienne* de la beauté, sans doute pas dans son expression visible, mais dans son essence : conception que l'on pourrait formuler en disant : « tous les « styles » d'art, sont également beaux, dans leur perfection. Si on les considère *dans leur expression parfaite*, il n'y en a pas de « supérieurs » ni d'« inférieurs », de « nobles » et de « barbares ». Ils ne sont que différents ; et les préférences qu'on peut avoir, sont, au sens large du mot, des préférences personnelles.

3° Une conception *unitarienne* de la vérité, sous toutes ses formes (y compris celles que nous venons, plus haut, de désigner ; conception unitarienne de la vérité dans son essence, à travers ses multiples expressions dogmatiques ou pratiques, découlant du seul fait que rien ne saurait mieux traduire notre pensée la plus intime que le mot de Lache-

lier : « La seule vérité solide et digne de ce nom, c'est la beauté » (12).

A moins que cet ensemble de soi-disant « conséquences », qui résume notre conception personnelle du vrai, du beau et du bien, en ce qu'elle a de moins « raisonné » et de plus vivace ; qui exprime notre attitude en face de la vie, et par suite, en face de la pensée, ne soit, au contraire, ce qui, inconsciemment, nous a conduits à la conclusion moins générale de cette étude.

Vu et permis d'imprimer :

Lyon, le 13 juin 1934

Le Recteur :

A. LIRONDELLE

Vu et approuvé :

Le Doyen :

KLEINCLAUSZ.

(12) **J. Lachelier.** « Le Fondement de l'Induction », édit. 1910, page 83.

BIBLIOGRAPHIE

Ire PARTIE

ARAGO. — *Eloge de Monge.* (Lu à l'Académie des Sciences, le 11 mai 1846).

A. BÉCHÉ. — *Géométrie.* (A l'usage des Ecoles primaires supérieures).

G. BOULIGAND. — *Cours de Géométrie analytique.* (Paris, Vuibert, 1928, avec préface de M. Cartan).

Carlo BOURLET. — *Cours d'Algèbre et de Géométrie.* (A l'usage des E. P. S.).

Carlo BOURLET et Z. DESBROSSES. — *Algèbre.* (A l'usage des E. P. S., Hachette).

T. CHOLLET et P. MINEUR. — *Traité de Géométrie descriptive,* I et II. (A l'usage des classes de première C et D et des condidats aux baccalauréats, Vuibert 1924).

M. CHASLES. — *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles, 1837).

H. COMMISSAIRE. — *Trigonométrie et compléments d'Algèbre.* (Classes de première C et D.)

DESCARTES. — *Règles pour bien conduire son esprit et trouver la vérité dans les sciences.* (Edition Cousin.)

E. GALOIS. — *Œuvres mathématiques.* (Publiées par Picard. 1897).

GRÉVY. — *Traité d'Algèbre.*

— *Compléments de Géométrie.* (A l'usage des classes de première C et D, Vuibert, 1926.)

R. JAVELOT. — *Comment résoudre les problèmes de géométrie élémentaire.* Méthodes, solutions, exemples. (Edit. F. Nathan.)

LAGRANGE. — *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés.*

LAISANT. — *Initiation mathématique.*

LEMAIRE. — *Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de Géométrie.* (Vuibert, 1926).

LEYSSENNE. — *Deuxième année d'arithmétique.*

LIARD. — *Définitions géométriques et définitions empiriques*
J. NICOD. — *La Géométrie dans le Monde sensible.*
M. ROYER. — *Arithmétique.* (A l'usage des Ecoles Primaires supérieures.)
B. RUSSELL. — *Préface de l'ouvrage de J. Nicod « La Géométrie dans le Monde sensible ».*
SERRET. — *Cours d'Algèbre supérieur*, I et II.
E. VESSIOT et P. MONTEL. — *Cours de Mathématiques générales*, I et II.

IIe PARTIE

BÖCHER. — *The fundamental conceptions and methods of mathematics.* (Bulletin of the American Mathematical Society, t. XI, pp. 115-135, décembre 1904.)
G. BOOLE. — *An investigation of the Laws of the thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities.* (Londres, 1854).
— *The mathematical Analysis of Logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning.* (Cambridge, 1847.)
— *A treatise on differential equations.*
E. BRÉHIER. — *Histoire de la philosophie.*
C. BURALI-FORTI. — *Sulla teoria generale delle grandezze.*
— *Le classi finite.* (Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino, 1896.)
— *Introduction à la géométrie différentielle.* (Paris, Gauthier-Villars, 1897.)
— *Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la Science.* (L'Enseignement mathém., t. I, 1899.)
C. BURALI-FORTI et MARCOLONGO. — *Eléments de calcul vectoriel.* (Trad. S. Lattès, Paris, Hermann, 1916.)
Georg. CANTOR. — *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis.* (1895, traduction Marotte.)
— *Sur les ensembles infinis et linéaires de points* (1882, traduct. franç. Acta Mathematica.)
— *Fondements d'une théorie générale des ensembles.* (1883, Acta Mathematica, t. II.)
Louis COUTURAT. — *De l'infini mathématique.* (Alcan, 1896.)
— *La Logique de Leibnitz*, d'après des documents inédits. (Alcan, 1901.)

— *L'Algèbre et la Logique.* (Paris, Gauthier et Villars, 1905.)
— *Traité de Logistique.* (Alcan, 1905.)
— *Les Principes des Mathématiques.* (Alcan, 1905.)
— *Histoire de la Logistique.*
— *Sur les rapports du nombre et de la grandeur.* (Revue de Métaphysique, 1898.)
— *Sur les axiomes de la géométrie.* (Revue de Métaphysique, 1898.)
— *La logique mathématique de M. Péano.* (Revue de Métaphysique, t. VII, septembre 1899.)
— *L'Algèbre universelle de M. Whitehead.* (Revue de Métaphysique et Morale, t. VIII, mai 1900.)
— *Sur la définition logique du nombre.* (Revue de Métaphysique, t. VIII, janvier 1900.)
— *Les définitions mathématiques.* (L'Enseignement mathématique, 1905.)
— *Logistique et intuition.* (Revue de Métaphysique, mars 1913.)

DEDEKIND. — *Was sind und was sollen die Zahlen* (1887).

DICKSON. — *Definition of a field by independant postulates.* (Transactions of American Mathematical Society, t. IV.)

ENRIQUES. — *Sui fondamenti della Geometria projettiva* (1894).
— *Questioni riguardanti la geometria elementare.* (Bologne, 1900.)

M. FANO. — *Sui postulati fondamentali della geometria projettiva.* (Giornale di Matematiche, t. XXX, 1891.)

FREGE. — *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* (Halle, (1879.)
— *Funktion und Begriff.* (Iena, Pohle, 1891.)
— *Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-matematische Unstersuchung über Begriff der Zahl.*
— *Was ist eine Funktion ?* (Leipzig, Barth, 1904.)
— *Grundgesetze der Arithmetik begriffsschrifttich abgeleitet.* (Iena, 1893.)

GRASSMANN. — *Gesammelte Werke.* (Edit. Engel, 1894.)

D. HILBERT. — *Grundlagen der Geometrie.* (Leipzig, 1899.)

— *Ueber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik.* (ap. Verhandl. III International Mathem. Kongr. in Heidelberg, 1904.)

HUNTINGTON. — *A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude.* (Transactions of the American Mathematical Society, 1902.)

— *Note on the definition of abstract groups and fields by sets of independant postulates.* (Transactions of the American Mathmatical Society, t. VI, 1905.)

— *Simplified definition of a group.* (Bulletin of the American Math. Society, t. VIII.)

F. KLEIN. — *Sur l'arithmétisation des mathématiques*, ap. Göttinger Nachrichten, 1875. (Traduction Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. XVIe, 1897.)

LIARD. — *Les Logiciens anglais contemporains.*

MOORE. — *A definition of abstract groups* (transactions of American Mathematical Society, t. III, 1902.)

MORGAN. — *On the symbols of logic.* (Transactions of the Cambridge philosophical Society, t. IX, 1856.)

PADOA. — *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque.* (Bibliothèque du 7e congrès de Philosophie, t. III, p. 315.)

— *Théorie des nombres entiers absolus.* (Revue de Mathématique, t. VIII, 1902.)

PEANO. — *Formulaire de Mathématiques*, 1903. (En collaboration avec Burali-Forti, Vailati, Vivanti. — Rivista di Metematica.)

— *Principii de Geometria logicamente espositi.* (Torino, 1889.)

— *Arithmetices principia nova methodo esposita.* (Turin, Bocca, 1889.)

— *Les définitions mathématiques.* (Bibliothèque du 1er Congrès de Philosophie, t. IIIe, p. 280.)

— *Sui fondamenti della geometria.* (Rivista di Metemamatica, 1894, t. IV.)

— *I principii di Geometria.*

— *Sur un courbe qui remplit toute une aire plane.* (Math. Annalen., t. XXXVI, 1890.)

— *Sul concetto di numero.* (Rivista di Matematica, I, 1891.)

— *Arithmetica generale e Algebra elementare.* (Torino, Paravia, 1902.)
— *Sui numeri irrazionali.* (Revue de Mathématiques, t. VI, pp. 126-140.)
— *Analisi della teoria dei vettori.* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1898.)
— *Sur la définition de la limite d'une fonction.* (Exercice de logique mathématique. American Journal of Mathematics, t. XVII, 1895.
— *Notations de logique mathématique.* (Turin. 1894.)
— *Principio di permanentia.* (Revue de Math., t. VIII.)

B. PEIRCE. — *Linear Associative Alegebra.* (Mémoire daté de 1870. — American Journal of Mathematics, t. IV, 1881.)

M. PIERI. — *I principii della Geometria di Posizione composti in sistema logico-deduttivo.* (Bulletin du 1er Congrès international de Philisophie, t. III, 1901.)
— *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo,* monografia del ponto e del moto. (Memorie rella R. Accademia delle Scienze di Torino, série II, t. XLVIII et XLIX, 1898 et 1899.)

B. RUSSELL. — *A critical exposition of the philisophy of Leibnitz.* (Cambridge University press, 1900.).
— *Essai sur les fondements de la Géométrie.* (An Essay on the Found. of Geom., 1877. Traduction Cadenat, Paris, 1901.)
— *The principles of Mathematics.* (Cambridge University press, 1903.)
— *Recent work on the principles of Mathematics.* (The International Monthly, vol. IV, Burlington, July 1901.)
— *Sur la Logique des relations.* (Revue de Mathématiques, t. VII, août 1901).
— *Sur la logique des relations avec des applications à la théorie des séries.* (Revue de Mathématiques de G. Peano, t. VII, Turin, 1902.)
— *L'idée d'ordre et la position absolue dans l'espace et dans le temps.* (Congrès international de philosophie, Paris, t. III, 1901.)
— *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types.* (Proceedings of the London Mathematical Society, t. IV, 1906.)

— *Les paradoxes de la logique.* (Revue de Métaphysique, 1906.)
— *La théorie des types logiques.* (Revue de Métaphysique, 1910.)
— *Le réalisme analytique.* (Bulletin de la Société de Philisophie, IIe année, n° 3, mars 1911.)
— *L'importance philosophique de la Logistique.* (Revue de Métaphysique, 1911.)
— *Introduction à la Philosophie mathématique.* (Traduction par G. Moreau, Paris, Payot, 1928.)
— *The scientific outlook.* (Londres, G. Allen et Unwin.)

SCHRÖDER. — *L'Algèbre et la Logique.*

J. TANNERY. — *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* (1re édition, 1886.)
— *De l'Infini mathématique.* (Revue générale des Sciences, 1897.)

G. VAILATI. — *Sui principii fondamentali della Geometria della retta.* (Rivista di Matematica, t. II, 1892.)
— *Di un' opera dimenticata del P. Girolamo Saccheri.* (Rivista filosofica, sept.-oct. 1903.)
— *Sur une classe remarquable de raisonnements par réduction à l'absurde.* (Revue de Métaph., 1904.)
— *De quelques caractères du mouvement philosophique contemporain en Italie.* (La Revue du Mois, 1907.)

O. VEBLEN. — *A System of Axioms for Geometry.* (Transactions of the American Mathematisal Society, t. V, July 1904.)

VERONESE. — *Fondamenti di Geometria.* (Padoue, 1891.)

WHITEHEAD. — *Treatise of Universal Algebra.* (Cambridge, 1898.)
— *On cardinal numbers.* (American Journal of Mathematics, t. XXIV, 1902.)
— *Introduction logique à l'étude de la géométrie.* (Revue de Métaphysique et Morale, janvier 1907.)

IIIe PARTIE

AMPÈRE. — *Essai sur la philosophie des sciences.* (Paris, 1856).

René BERTHELOT. — *Un romantisme utilitaire, étude sur le mouvement pragmatiste.* (1911.)

BOLONA. — *La Geometria non-euclidea.* (Bologne, 1906.)

E. BOREL. — *L'Espace et le Temps.*

— *L'évolution de l'intelligence géométrique.* (Revue de Métaphysique, 1907.)

— *Les « paradoxes » de la théorie des ensembles.* (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale, 1908.)

P. BOUTROUX. — *L'imagination et les mathématiques, selon Descartes.* (Paris, 1900.)

— *Les Mathématiques et la Physique.* (Revue de Métaphysique, mars 1907.)

— *Les principes de l'Analyse mathématique.* (Paris, 1914.)

— *L'Idéal scientifique des Mathématiciens.*

E. CARTAN. — *Théorie des groupes.* (Revue du Mois, avril 1914.)

Ph. CHASLIN. — *Essai sur le mécanisme psychologique des opérations de la Mathématique pure.*

COURNOT. — *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique.*

— *Traité de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal.* (Paris, 1841.)

— *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie.*

— *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes.* (Paris, 1872.)

— *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales, dans les Sciences et dans l'Histoire.* (Paris, 1911.)

DELBŒUF. — *L'ancienne et les nouvelles géométries.* (Revue de Métaphysique et Morale, novembre 1895. — Revue philosophique, 1894.)

DUFUMIER. — *La généralisation en mathématiques.* (Revue de Métaphysique et Morale, 1911.)

DUHAMEL. — *Des méthodes dans les Sciences de raisonnement.* (Paris, Gauthier-Villars.)

P. DUHEM. — *Le Système du Monde.* (Paris, 1913.)

DUMONT. — *Théorie générale des nombres.* (Scientia, 1914-1915.)

F. ENGEL et STÆCKEL. — *Die Theorie der parallellinien, von Euklid bis auf Gauss.* (Leipzig, 1895.)

F. ENRIQUES. — *Sur quelques questions soulevées par l'infini mathématique.* (Revue de Métaphysique et Morale, mars 1917.)

— *Les concepts fondamentaux de la Science.* (Trad. L. Rougier.)

EUCLIDE. — *Eléments.*

E. GOBLOT. — *Essai sur la classification des Sciences.* (Paris, Alcan, 1898.)

— *Traité de Logique.* (Paris, 1918.)

— *Le Système des Sciences.* (Paris, 1922.)

— *La Logique formelle et la Nécessité logique.* (Revue philosophique, 1926.)

— *Cours de logique*, professé à la Faculté des Lettres de l'Université de Lyon, de 1924-25 à 1928. (Notes inédites, prises au cours.)

F. GONSETH. — *Les fondements des mathématiques.* (Paris, Albert Blanchard, 1926.)

Dr HALSTED. — *Géométrie rationnelle.* (Trad. Barbarin, Paris, 1911.)

A. HANNEQUIN. — *Etudes d'histoire des sciences et de la philosophie.* (1908.)

HELMOLTZ. — *Ueber die thatsächlichen Grundbagen der Geometrie.* (Verh. d. Natur. Vereins Heidelberg, 1868.)

— *Uweber die Thasachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.* (Ap. Nachr. Ges. Gött., 1868.)

— *Les axiomes de la géométrie.* (Revue Scientifique, France et étranger, juin 1877.)

JORDAN. — *Traité des substitutions.*

F. KLEIN. — *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* (Math. Ann., 1893. Trad. franc. Padé. Annales de l'Ecole Normale, 1871.)

LANGEVIN. — *L'évolution de l'espace et du temps.* (Revue de Métaphysique, 1911.)

LEBESGUE. — *Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo.* (Bulletin de la Société Mathématique. (1907.)

E. LEBON. — *Henri Poincaré.* (Collection : Savants du Jour.)

G. LECHALAS. — *Etude sur l'Espace et le Temps.* (Paris, Alcan, 1896.)

— *Etudes esthétiques.* (Paris, Alcan, 1902.)

— *La Géométrie non-euclidienne.* (Revue de Métaphysique et Morale, 1893.)

— *De l'Infini mathématique.* (Revue de Métaphysique et Morale, 1897.)

LOBATCHEWSKI — *Opera geometrica.* (Kasan, 1883-1886.)

LE ROY. — *Science et Philosophie.* (Revue de Métaphysique et Morale, 1899-1900.)

— *Un Positivisme nouveau.* (Revue de Métaphysique et Morale, 1901.)

E. MACH. — *La Connaissance et l'Erreur.* (Trad. Dufour, Paris, 1912.)

G. MILHAUD. — *Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique.* (1894.)

— *La Science rationnelle.* (Revue de Métaphysique 1894.)

— *Le Rationnel.* (1898.)

— *Les Philosophes-Géomètres de la Grèce.* (1900.)

J. NICOD. — Ouvrage cité.

J. PACOTTE. — *La pensée mathématique contemporaine.* (Paris, 1925.)

PASCH. — *Vorlesungen über neuere Geometrie.* (Leipzig, 1882.)

H. POINCARÉ. — *La Science et l'Hypothèse.*

— *La valeur de la Science.*

— *Science et Méthode.*

— *Dernières pensées.*

— *Sur les Hypothèses fondamentales de la Géométrie.* (Bulletin de la Société Mathémltique de France, t. XV. 1886-1887, 2 nov. 1887, pp. 203-216.)

— *Les géométries non-euclidiennes.* (Revue générale des sciences pures et appliquées, t. II, 15 déc. 1891, pp. 769-774.)

— *Lettre de H. Poincaré à M. Mouret.* (Revue générale des sciences pures et appliquées, 30 janvier 1892, pp. 74-75.)

— *Le Continu mathématique.* (Revue de Métaphysique et morale, 1893.)

— *L'Espace et la Géométrie.* (Revue de Métaphysique et Morale, 3e année, novembre 1895, pp. 631-649.)

— *Réponse à quelques critiques.* (Revue de Métaphysique et Morale, 5e année, janvier 1897, pp. 59-70.)

— *On the foundations of Geometry.* (The Monist, vol. IX, 1898-1899, octobre 1898, pp. 1-43.)

— *Des fondements de la géométrie, à propos du livre de M. Russell.* (Revue de Métaphysique et Morale, 8e année, janvier 1900, pp. 73-86.)
— *Note du « Traité de Géométrie », de Rouché et Comberousse.* (7e édition 1909, t. II, pp. 582-593.)
— *Fondements de la géométrie.* (Journal des Savants, mai 1902, pp. 252-271.)
— *L'Espace et ses trois dimensions.* (Revue de Métaphysique et Morale, 11e année, mai et juillet 1903, pp. 281-301 et 407-429.)
— *La Relativité de l'Espace.* (L'Année philosophique, t. XIII, 1907, pp. 1-17.)
— *Pourquoi l'Espace a trois dimensions ?* (Revue de Métaphysique et Morale, 20e année, juillet 1912, pp. 483-504.)
— *L'Espace et le Temps.* (Scientia, t. XII, 1912, pp. 159-171.)

E. RIGNANO. — *Psychologie du raisonnement.* (Paris, 1920.)
— *Essai de synthèse scientifique.*

RIQUIER. — *De l'idée de nombre considérée comme fondement des sciences mathématiques.* (Revue de Métaphysique, 1893.)

ROUCHÉ et COMBEROUSSE. — *Traité de géométrie,* (7e édition, 1900.)

L. ROUGIER. — *La démonstration géométrique et le raisonnement déductif.* (Revue de Métaphysique et Morale, nov. 1916, pp. 809-858.)
— *Henri Poincaré et la mort des vérités nécessaires.* (La Phalange, 20 juillet 1913.)
— *De la nécessité d'une réforme dans l'enseignement de la logique.* (Revue de Métaphysique et Morale, septembre 1917.)
— *Réflexions critiques sur les principes de la thermodynamique.* (Revue philosophique, nov.-déc. 1918.)
— *Les erreurs sytématiques de l'intuition.* (Revue de Métaphysique et Morale, septembre-octobre 1919.)
— *La philosophie géométrique de Henri Poincaré.* (Paris, 1920.)
— *Les paralogismes du rationalisme.* (Paris, 1920.)
— *La structure des théories déductives. Nouvelle théorie de la déduction.* (Paris, 1921.)

SOPHUS LIE. — *Geometrie der Berührungstransformationen.*
J. TANNERY. — *Introduction à l'étude de la théorie des nombres.*
P. TANNERY. — *Pour l'histoire de la science hellène.*
M. WINTER. — *Importance philosophique de la théorie des nombres.* (Revue de Métaphysique, 1910.)
— *Note sur l'infini en mathématiques.* (Revue de Métaphysique, 1911.)
— *La Méthode dans la philosophie mathématique.* (1911.)
ZENTHEN. — *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen-Age.* (Traduction Mascart.)

IVe PARTIE

L. BRUNSCHVICG. — *La Modalité du Jugement.*
— *Spinoza et ses contemporains.*
— *Le génie de Pascal.*
— *Introduction à la vie de l'Esprit.*
— *L'Idéalisme contemporain.*
— *L'Expérience humaine et la Causalité physique.*
— *Les Etapes de la Philosophie mathématique.*

Ve PARTIE

H. BEUCHAT. — *Manuel d'Archéologie américaine.* (Paris, A. Picard et Fils, 1912.)
L. BRUNSCHVICQ. — *Ouvrages cités.*
L. COUTURAT. — *Ouvrages cités.*
J. LACHELIER. — *Le fondement de l'Induction.* (Edit. 1910.)
LEMOINE. — *De la mesure de la simplicité dans les constructions mathématiques.*
Γ. ΜΥΛΩΝΑΣ. — Ἡ νεολιθικὴ ἐποχὴ ἐν Ἑλλάδι (Athènes, 1928.)
J. NICOD. — *Ouvrage cité.*
H. POINCARÉ. — *Ouvrages cités.*
B. RUSSELL. — *Ouvrages cités.*
Et. SOURIAU. — *Pensée vivante et perfection formelle.*
— *Art et Vérité.* (Revue philosophique, mars-avril, 1933.)
P. SOURIAU. — *La Beauté rationnelle.*

Principaux errata

CHAPITRE PREMIER

p. 12 (ligne 34) **lire :** Pour circonscrire le premier au second PQRS, on décrit, etc...

p. 16 (ligne 12) **lire :** $P\alpha Q$ et $P_1\alpha Q_1$.
— (ligne 18) **lire :** $(P_1\alpha_1, xy)$;
— (ligne 24) **lire :** $(xy, \alpha_1 Q_1)$.

p. 20 (ligne 29) **lire :** $\overline{CM}^2 = a^2$.

p. 23 (ligne 1) **lire :** En *simplifiant*...

CHAPITRE II

p. 29 (ligne 24) **lire :** ..... résultat. »

p. 35 (fig. 11) **lire :** D' (à l'intersection de la droite y avec la circonférence de centre 0).

p. 40 (lignes 37, 38, 39) **lire :**

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$$

p. 44 (équation (2)) **lire :**

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dy = 0$$

(équation (3)) **lire :**

$$\frac{(X - x)}{dx} = \frac{Y - y}{dy}$$

p. 45 (ligne 4) **lire :**
tangente :

$$(X - x)\,\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

p. 47 (ligne 12) **lire :** un parallèle.

p. 50 (ligne 12) **lire :** , et que cette dérivée est égale à m ».

p. 54 (ligne 14) **lire :** $B\widehat{C}A = C\widehat{A}E$
— (ligne 16) **lire :** $E\widehat{A}D$

CHAPITRE III

p. 78 (ligne 24) **lire :**
$(x-1)\,[ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(a+b)x+a] = 0$

p. 80 (ligne 6) **lire :**
$x^2-2x+2\,(\lambda-1)$ etc.....

CHAPITRE IV

p. 104 (ligne 36) **lire :** mathématicien

CHAPITRE V

p. 112 (lignes 8-9) **lire :** ..... qui se rattachent à lui.....

CHAPITRE VI

p. 116 (ligne 3) **lire :** Russell

p. 117 (ligne 3) **lire :** (such that)

p. 120 (ligne 16) **lire :** Russell

p. 127 (ligne 11) **lire :** et le faux (Λ)

— (ligne 13) **lire :** .....$\Lambda \supset x,\ x \supset V$.

— (ligne 20). Le « que », premier mot de la ligne, est de trop.

— (ligne 27) **lire :** quel que soit p

p. 128 (ligne 35) **lire :** Russell

p. 129 (ligne 21) **lire :** .....devant être entendue

p. 136 (ligne 35) lire : *au moyen des seuls principes de la logique.*

p. 138 (ligne 23) **lire :** le nombre.

p. 142 (ligne 14) **lire :** $a^{(b+c)}$

p. 146 (note 152, ligne 6 du passage cité) **lire :** (if any)

— (ligne 9 du même passage) **lire :** is zero. »

CHAPITRE VII

p. 153 (ligne 6) **lire :** ou $A \succ B$.....

— (ligne 11) **lire :** Si $A \succ B$.....

— (ligne 12) **lire :** Si $A \succ B$, et $B \succ C$, on a : $A \succ C$

— (ligne 21) **lire :** ..... n'est $\succ$ ou $\prec$ qu'elle-même

— (ligne 24) **lire :** Si $A \succ B$ on a.....

— (ligne 26) **lire :** Si $A \succ B$ et $B \succ C$, on a : $A \succ C$

p. 156 (ligne 15) **lire :** la seconde, elle, se passe totalement (12)

p. 174 (dernière ligne) **lire :** $xx' = a^{(y+y')}$

p. 175 (ligne 7) **lire :** $xx' = a^{(y+y')}$

— (ligne 12) **lire :** $xx' = a^{(y+y')}$

— (ligne 32) **lire :** (ou $y = \log_a x$)

p. 176 (ligne 17) **lire :** $y = \log_a x$,

p. 178 (ligne 25) **lire :** $xx' = a^{(y+y')}$ (c'est-à-dire $a^{(\log x + \log x')}$)

CHAPITRE XIII

p. 294 (ligne 6) **lire :** guidée, etc...

p. 301. **La 1re ligne doit être lue la 3e.**

CHAPITRE XIV

p. 320. **La 6e ligne manque. Lire :**

..... De cet ordre interne caractéristique de la personnalité mathématique d'une notion, *dérive* etc.....

— (ligne 11) **lire :** dentelière.

p. 325. **La 1re ligne de la page ne se rattache à rien dans ce passage du livre.** (C'est la ligne 12 de la page 310.) **Lire la page 325 à partir de la 2e ligne — comme si la 1re n'existait pas.**

La 13e ligne manque. Lire :

....., ou la non-divisibilité d'un nombre premier, mais un fait énormément plus compliqué »....

p. 329 (ligne 9) **lire :** Le dit « cas général » .....

p. 336 (ligne 1) **lire :** en référant.....

CHAPITRE XVI

p. 349 (ligne 26) **lire :** nous avons déjà citée,.....

p. 350 (ligne 26) **lire :** bien plus, de la même expérience.

— (lignes 30-31) **lire :** ..... qu'une affaire de paramètre) (24).

p. 351 (ligne 35) **lire :** ... être question, en lui ni en elles,...

p. 353 (ligne 21) **lire :** « Pour nous, etc.....

p. 356 (ligne 13) **lire :** ... leur ordre initial, ce qui n'arrive pas.

— (ligne 17) **lire :** ..... en même temps, ...

p. 361 (ligne 11) **lire :** peut-être.....

— (ligne 27) **lire :** nous relevions, ...

p. 362 (ligne 32) **lire :** Hankel,

p. 363 (ligne 5) **lire :** de ses œuvres, ...

p. 364 (ligne 10) **lire :** tout entières .....

— (ligne 38) **lire :** de l'exposition, ...

p. 369 (ligne 9) **lire :** En d'autres termes, plus l'œuvre etc.....

CHAPITRE XVII

p. 375 (ligne 1) **lire :** angles adjacents.....

p. 377 (ligne 15) **lire :** philosophie

p. 379 (ligne 8) **lire :** tout lieu de croire, qu'à etc.....

— (ligne 32) **lire :** ... entre des termes, ...

— (ligne 34) **lire :** ... des jugements-prémisses au jugement-conclusion .....

p. 381 (ligne 21) **lire :** ..... correct .....

p. 383. **La dernière ligne de la page est de trop.** Tourner la page après la lecture de l'avant-dernière ligne.

p. 384. **La 3e ligne manque.** (Elle n'est autre que la dernière ligne de la page 383 .)

p. 386 (ligne 16) **lire :** plus vite que par la première.

p. 389 (dernière ligne) **lire :** Il semble, quelle que soit etc.....

p. 392 (ligne 17) **lire :** substitution,... ..

— (ligne 20) **lire :** , propres, eux, aux jugements etc.....

p. 394 (ligne 21) **lire :** quel que.....

p. 403 (ligne 20) **lire :** dans tout ceci, ...

p. 405 (ligne 8) **lire :** perfection .....

p. 415 (ligne 9) **lire :** simplicité de ce que etc.....

CHAPITRE XVIII

p. 421 (lignes 38-39) **lire :** ... distinct de lui .....

p. 422 (ligne 13) **lire :** ... rigoureux, — .....

p. 425 (ligne 11) **lire :** ... du point de vue mathématique, ...

— (ligne 22) **lire :** jugements. » (21)

p. 426 (ligne 5) **lire** ..... leur définition , ce qui.....

p. 429 (ligne 7) **lire** Les rapports .....

p. 443 (ligne 1) **lire :** par l'esprit, et, etc.....

CHAPITRE XIX

p. 448 (ligne 19) **lire :** considère.....

CHAPITRE XX

p. 475 (ligne 6-9) **lire :** de la raison et de l'expérience.....

p. 476 (ligne 32) **lire** d'« intériorisation »

p. 478 (ligne 26) **lire** ...les pages que nous avons.....

p. 479 (ligne 26) **lire :** ... Il réside, ici et là,.....

p. 483 (ligne 27) **lire :** quelconques.....
p. 484 (ligne 3) **lire :** l'antinomie

CHAPITRE XXI

p. 492 (ligne 30) **lire :** arithmétiques
p. 495 (note 9) **lire :** Voir plus haut, p. 92.
p. 500 (ligne 9-10) **lire :** , peu importe.
— (ligne 24) **lire :** mathématique
— (ligne 28) **lire :** forcés

CHAPITRE XXII

p. 506 (ligne 30) **lire :** élémentaire,
p. 507 (ligne 33) **lire :** ..... d'une.....
p. 508 (ligne 31) **lire :** ..... nous l'avons.....
— (ligne 32) **lire :** ... ses parties.....
p. 509 (ligne 19) **lire :** ..... genèse arbitraire.....
p. 510 (ligne 39) lire $y = \sqrt{k}$
— (ligne 41) **lire :** $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
p. 513 (ligne 2) **lire :** il existe entre sa forme.....
— (ligne 9) **lire :** caractère idéal.....
p. 514 (ligne 40) **lire :** ... l'ennéagone.....
p. 518 (ligne 13) **lire :** la pratique du calcul
p. 520 (ligne 6) **lire :** , précisément,.....

BIBLIOGRAPHIE

p. 524. **lire :** (IIe partie)
— (G. Boole) An investigation of the Laws of the thought...
p. 525 **lire :** (Enriques) ..... Geometria progettiva.....
— **lire :** (Fano) ..... Geometria progettiva.....
p. 526 **lire :** (Peano) Sur une courbe.....
p. 530 **lire :** (Helmoltz) Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie.....
— Ueber die Thatsachen, etc.....
p. 533 **lire :** (Sophus Lie) Geometrie der Berührungstransformationen.....